

특별직교이방성 복합적층판 이론을 응용한 포스트텐션된 슬래브 교량의 해석

Analysis of Post-tensioned Slab Bridge
by Means of Specially Orthotropic Laminates Theory

한 봉 구¹⁾ · 김 은 표²⁾
Han, Bong Koo Kim, Yun Pyo

요 약 : 포스트텐션된 슬래브 교량은 특별직교이방성 복합적층판 이론으로 해석할 수 있다. 슬래브 교량의 해석에 있어 단면의 기하학적, 물리적 특성이 중립축을 중심으로 휨-연계 강성 $B_{ij} = 0$ 이고, $D_{16} = D_{26} = 0$ 임을 고려해야 한다. 각각의 횡방향철근과 수직방향철근은 하나의 lamina로 간주하고, 재료상수는 각각의 lamina의 혼합법칙에 의해서 계산되어진다. 단순지지된 슬래브 교량은 등분포하중과 축하중을 받고 있다. 본 논문에서는 유한차분법과 보 이론에 의해서 해석하였다. 그 결과 보 이론에 의한 해석 값이 판 이론에 의한 해석 값에 근접함을 알 수 있었다. 본 논문에서 얻은 연구 결과를 이용하여 가까운 장래에 학부정도의 실력을 가진 기술자가 포스트텐션된 슬래브 교량의 해석에 있어서 유용하게 사용 할 수 있다.

ABSTRACT : A post-tensioned slab bridge is analyzed by the specially orthotropic laminates theory. Both the geometry and the material of the cross section of the slab are considered symmetrical with respect to the mid-surface so that the bending extension coupling stiffness, $B_{ij} = 0$, and $D_{16} = D_{26} = 0$. Each longitudinal and transverse steel layer is regarded as a lamina, and material constants of each lamina is calculated by the use of rule of mixture. This bridge with simple support is under uniformly distributed vertical and axial loads. In this paper, the finite difference method and the beam theory are used for analysis. The result of beam analysis is modified to obtain the solution of the plate analysis. The result of this paper can be used for post-tensioned slab bridge analysis by the engineers with undergraduate study in near future.

핵심 용어 : 포스트텐션된 슬래브 교량, 특별직교이방성 복합적층판 이론, 보 이론, 판 이론

KEYWORDS : post-tensioned slab bridge, specially orthotropic laminates theory, beam theory, plate theory

1. 서론

토목, 건축 분야의 건설에는 주로 콘크리트 및 강재 등이 구조용 재료로 주로 사용되어져 왔다. 그러나 최근 산업이 급속도로 발전함에 따라 구조물이 대형화되고, 중량과 부식, 내구성 문제 및 경과 연수의 증가로 인한 유지 보수가 중요한 문제로 대두됨에 따라 신소재인 복합재료를 건설에 응용하기 위한 노력들이 활발하게 진행되어 왔다.

복합재료는 이방성이므로 휨-인장, 인장-전단 및 휨-비틀림의 연계(coupling) 효과의 발생으로 고전적 이론에 비해 너무 어렵다는 단점이 있으므로 일반 기술자들이 건설분야에 응

용하기에는 많은 어려움이 있다. 이러한 문제점들은 토목 구조물처럼 단면이 커질 경우 특별직교이방성 이론으로 해석이 가능하다는 결과가 제시됨에 따라 해석에 따른 어려움이 점차 해결되고 있다. ^{(1)~(5), (10)~(11)}

그러나 대부분의 토목구조물은 그 경계조건이 복잡함을 갖고 있으며, 이러한 구조물에 관한 정확한 해를 구한다는 것은 상당한 어려움이 있다. 이러한 문제를 공학적으로 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있는 방법 중 하나가 유한차분법이다.

토목구조물의 대부분은 판 구조요소로 되어 있으며 이들 중 많은 부분이 여러 소재를 합성한 복합구조로 구성되어 있다. 그 중 대표적인 구조물이 포스트텐션된 슬래브 교량이다.

1) 정희원, 서울산업대학교 구조공학과 교수, 공학박사

2) 서울산업대학교 구조공학과 석사과정

본 논문에 대한 토의를 2002년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

본 논문에서는 포스트텐션된 슬래브 교량을 복합적층판으로 고려하여 해석하고 그 타당성을 입증하고자 한다. 그 중 복철근으로 배근된 포스트텐션된 슬래브 교량은 각각의 층이 대칭으로 구성되어 있어 $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ 형태의 특별직교이방성 판과 동일하게 거동한다고 가정할 수 있다.

본 논문에서는 양단 단순, 타단자유(SF)로 지지된 복철근 콘크리트 슬래브에 프리스트레스를 도입 한 경우 특별직교이방성 이론에 의한 해석결과⁽⁷⁾와 단순지지된 슬래브의 보 이론에 의한 해석 방법⁽⁹⁾을 비교하여 본 논문에서 제시하고 있는 방법이 타당하며 실용적임을 밝히고자 한다.

2. 본 연구에서 사용된 이론과 공식

2.1 특별직교이방성 이론에 의한 포스트텐션된 슬래브 교량의 해석

등분포 수직하중과 축방향 등분포하중을 동시에 받는 특별직교이방성 복합적층판의 평형방정식은 다음 식(1)과 같다.⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q(x, y) \quad (1)$$

이 때 단면력과 처짐과의 관계는 다음 식(2), 식(3), 식(4)와 같이 쓸 수 있다.

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

식(4)를 식(1)에 대입하여 정리하면 다음 식(5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q(x, y) \quad (5)$$

2.2 복철근 직사각형보의 고전적 보 이론

고전적 보 이론에 의하여 복철근 직사각형보를 해석하기 위하여 자유물체도를 그리면 Fig. 1과 같다.

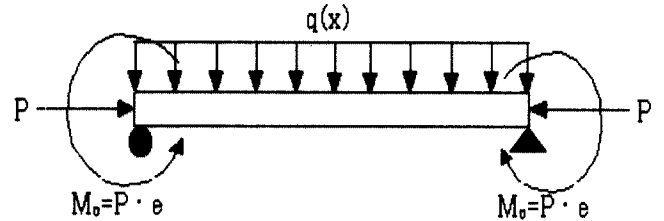


Fig. 1 복철근 직사각형 보의 자유물체도

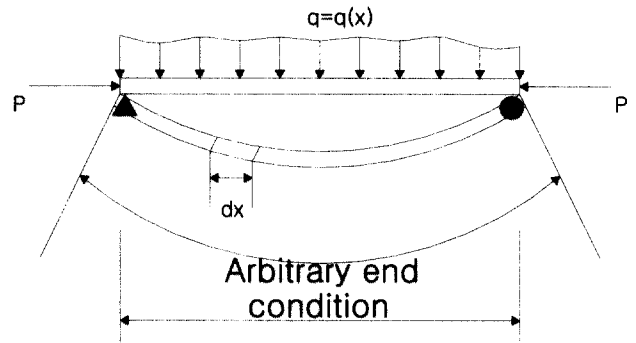


Fig. 2 복철근 직사각형보의 처짐 형상

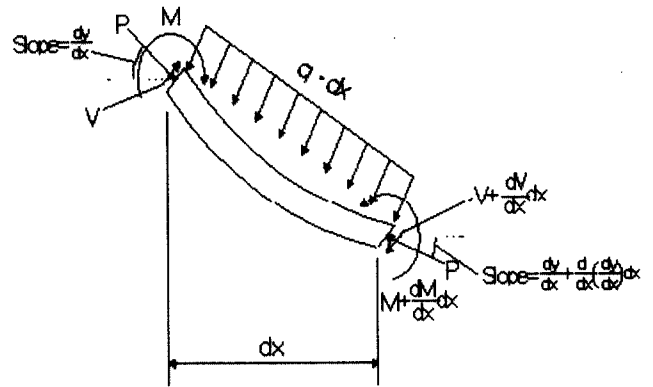


Fig. 3 미소구간 \$dx\$에 작용하는 힘

Fig. 2 는 축방향력과 등분포하중을 받는 복철근 직사각형보의 처짐 상태를 나타내고 있다. 본 논문에서 이용될 보 이론은 포스트텐션된 슬래브 교량을 단위 폭의 보로 고려하여 해석하였다. 미소구간 \$dx\$ 를 확대하여 \$dx\$ 구간에 작용 중인 상태를 나타내면 Fig. 3 과 같이 나타낼 수 있다.

위의 Fig. 3 에서 $\frac{dV}{dx} - P \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -q$ 라는 평형방정식이 성립한다.^{(6),(9)~(10)}

이때 $V = \frac{dM}{dx}$ 이므로 $\frac{d^2M}{dx^2} - P \frac{d^2y}{dx^2} = -q$

여기서 $M = -EI \frac{d^2y}{dx^2}$ 이므로

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = q \quad (1), (6), (9) \quad (6)$$

식(6)에서 처짐에 관한 방정식을 유도하여 정리하면 식(7)과 같이 쓸 수 있다.

$$y = \frac{e(1 - \cosh kl)}{2 \sinh kl} \sinh kx + \frac{e}{2} \cosh kx + \frac{e(\cos kl - 1)}{2 \sin kl} \sin kx - \frac{e}{2} \cos kx + \frac{1}{D} \left(\frac{1}{24} qx^4 - \frac{1}{12} qlx^3 + \frac{1}{24} ql^3x \right) \quad (7)$$

$$M = -D_{11}y'' = -\frac{Pe(1 - \cosh kl)}{2 \sinh kl} \sinh kx - \frac{Pe}{2} \cosh kx + \frac{Pe(\cos kl - 1)}{2 \sin kl} \sin kx - \frac{Pe}{2} \cos kx - \left(\frac{1}{2} qx^2 - \frac{1}{2} qlx \right) \quad (8)$$

여기서, D는 복합재료의 적층판에서 구한 D_{11} 값이다.

3. 수치해석

본 연구의 해석방법에 대한 예제로서 Fig. 4, Fig. 5 및 Fig. 6 을 고려하고 이때 사용한 물성값은 다음과 같다.

- 콘크리트 설계기준강도 : $f_{ck} = 240 \text{ kgf/cm}^2$
- 종방향 철근 : D25 - 20cm 간격으로 배치
- 횡방향 철근 : D13 - 20cm 간격으로 배치
- 철근의 피복두께 : 3cm

콘크리트탄성계수: $E_c = 15,000 \times \sqrt{f_{ck}} = 232,379 \text{ kgf/cm}^2$

철근의 포아송비 : $\nu_s = 0.3$

콘크리트의 포아송비 : $\nu_c = 0.18$

이러한 물성값을 이용하여 계산된 슬래브 교량의 휨강성은 Table 1에 나타내었다.

본 연구에서는 mesh 의 크기를 1.0m로 하였으며, 교량중심으로부터 편심거리가 0.2m인 경우에 대해서 연구를 수행

Table 1. 포스트텐션된 슬래브 교량의 휨 강성

휨강성 (N·m)	
D11	483,909,280
D12	78,999,832
D22	443,173,824
D66	177,517,632

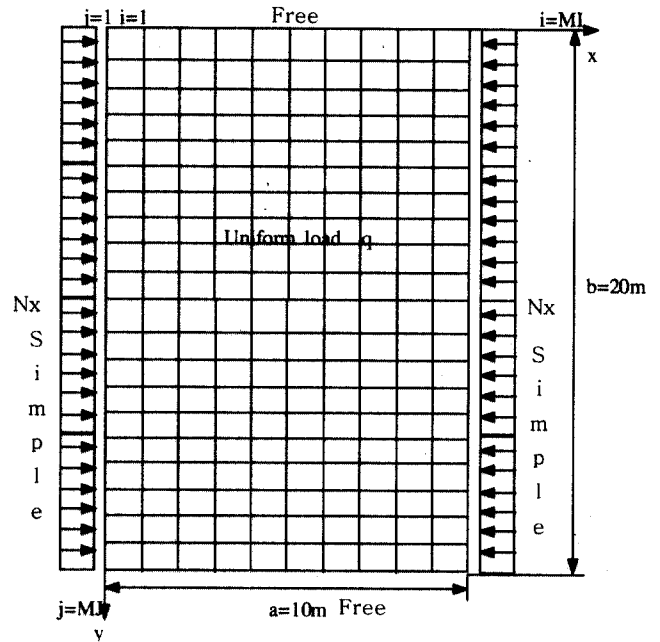


Fig. 4 Modeling of Bridge Deck

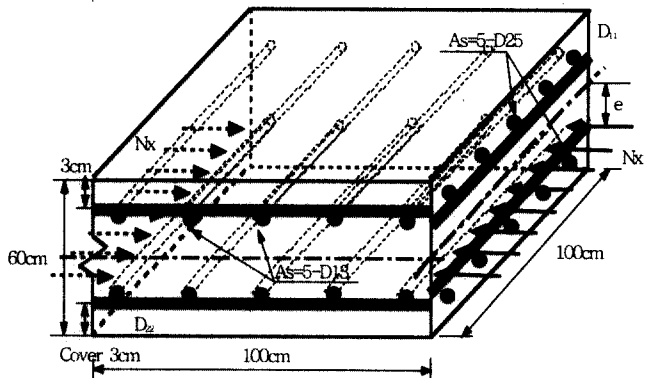


Fig. 5 Cross Section of Slab

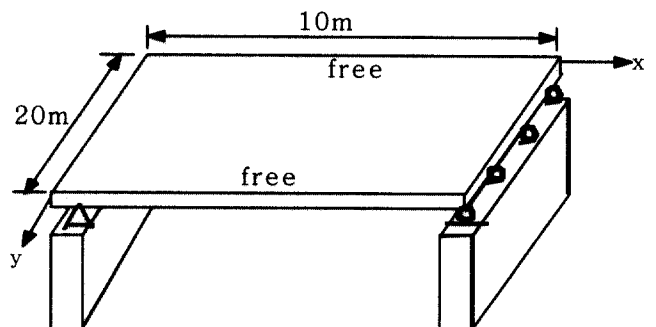


Fig. 6 Boundary Condition of Slab

하였으며 편심거리가 0.1m인 경우에 대해서도 검토해 보았다.

수직방향 하중조건으로는 자중 $0.6m \times 2.5tonf/m^3 = 1.5tonf/m^2$ 이고 총하중이 $1,500 + 1,250 = 2,770kgf/m^2 \approx 27,700N/m^2$ 이 작용하는 것으로 하였으며, 축방향 하중을 100KN, 200KN, 400KN, 700KN, 1000KN로 증가시키면서 판의 축방향 하중별 단면력과 처짐에 대한 해석을 수행하였다.

4. 비교분석 및 고찰

판의 자중과 등분포 수직하중을 고려하고 편심은 0.2m로 고정하여 축방향 하중을 100KN, 200KN, 400KN, 700KN, 1000KN으로 변화를 주고, 단위 폭을 가진 보의 처짐과 모멘트 값을 비교 분석하였다.

Table 2. Deflection with Increase of Axial Load

x(m) \ (Nx)	100KN	200KN	400KN	700KN	1000KN
1m	0.00220	0.00202	0.00165	0.00109	0.0005
3m	0.00575	0.00532	0.00446	0.00315	0.0018
5m	0.00708	0.00657	0.00555	0.00400	0.0024
7m	0.00575	0.00532	0.00446	0.00315	0.0018
9m	0.00220	0.00202	0.00165	0.00109	0.0005

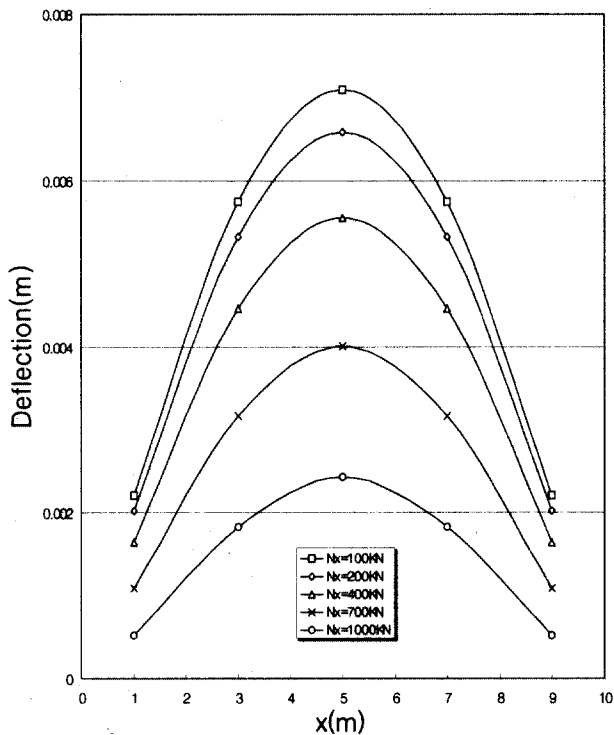


Fig. 7 Deflection Distribution

4.1 특별직교이방성 이론에 의한 경우

본 연구에서는 x 방향이 단순지지 되고 y 방향이 자유인 경계조건을 갖는 경우의 x=1m, 3m, 5m, 7m, 9m에서의 100KN, 200KN, 400KN, 700KN, 1000KN의 축방향 하중을 증가시키며 고찰하였다. 축방향 하중의 증가에 따른 처짐 결과는 Table 2와 같다.

양변에 동일한 축방향 하중을 가했을 경우 중앙부인 5m에 가장 크게 처짐이 발생하는 것을 알 수 있으며 축방향 하중을 증가시킬수록 처짐이 감소되는 경향을 나타내었다. 경간 방향의 거리에 따른 처짐을 그래프로 나타내면 Fig. 7과 같다. Table 3는 축방향력 증가에 따른 교량 중심선상 지점으로부터 위치별 모멘트 값을 나타낸 것이다. Fig. 8은 경간 방향의 거리에 따른 모멘트를 그래프로 나타낸 것이다.

Table 3. Mx with Increase of Axial Load (N · m)

x(m) \ (Nx)	100KN	200KN	400KN	700KN	1000KN
1m	105734.61	85866.30	46009.48	-14063.2	-74491.1
3m	273697.25	254029.0	214464.0	154434.1	93551.18
5m	329762.06	310188.6	270730.7	210737.5	149744.5
7m	273690.03	254034.6	214461.7	154425.2	93552.28
9m	105735.21	85864.21	46009.19	-14062.3	-74490.5

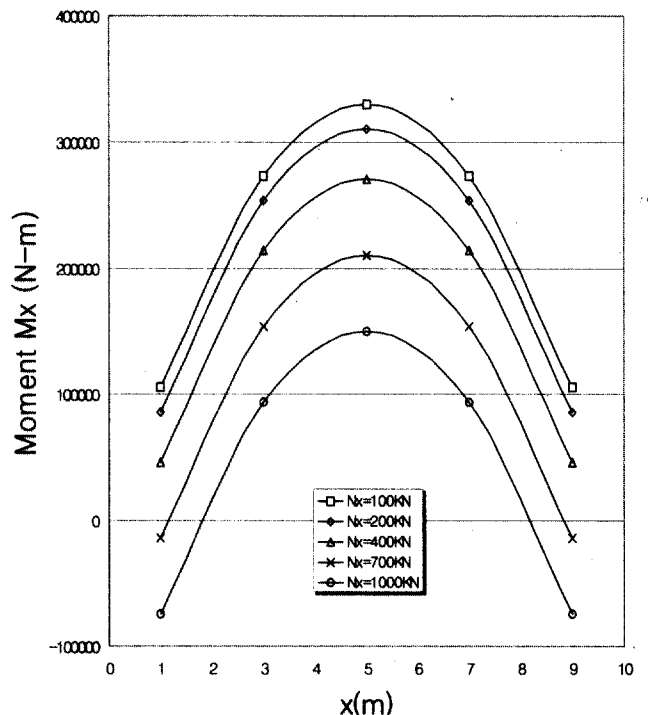


Fig. 8 Mx Distribution

4.2 보 이론에 의한 수치해석의 경우

Table 4는 특별직교이방성의 경우와 같이 x 방향이 단순 지지 되고 y 방향이 자유단인 경계조건을 갖는 단순보의 x = 1m, 3m, 5m, 7m, 9m에서 축방향 하중을 100KN, 200KN, 400KN, 700KN, 1000KN의 축방향 하중을 변화시킬 때의 처짐을 나타낸 것이다.

Fig. 9는 경간 방향의 거리에 따른 처짐을 하중의 변화에 따라 나타내었다.

Table 5는 축방향력 증가에 따른 교량 중심선상 지점으로부터 위치별 모멘트 값을 나타내었다.

Fig. 10은 지간 방향의 거리에 따른 모멘트를 그래프로 나타내었다.

4.3 편심 e = 0.1m인 경우에 대한 고찰

위 방법의 신뢰성을 검증하기 위해 편심 e=0.1m로 하여

Table 4. Deflection with Increase of Axial Load

(Nx) x(m)	100KN	200KN	400KN	700KN	1000KN
1m	0.00215	0.00196	0.00159	0.00103	0.0004791
3m	0.00562	0.00519	0.00432	0.00302	0.0017189
5m	0.00693	0.00642	0.00538	0.00383	0.0022848
7m	0.00562	0.00519	0.00432	0.00302	0.0017189
9m	0.00215	0.00196	0.00159	0.00103	0.0004791

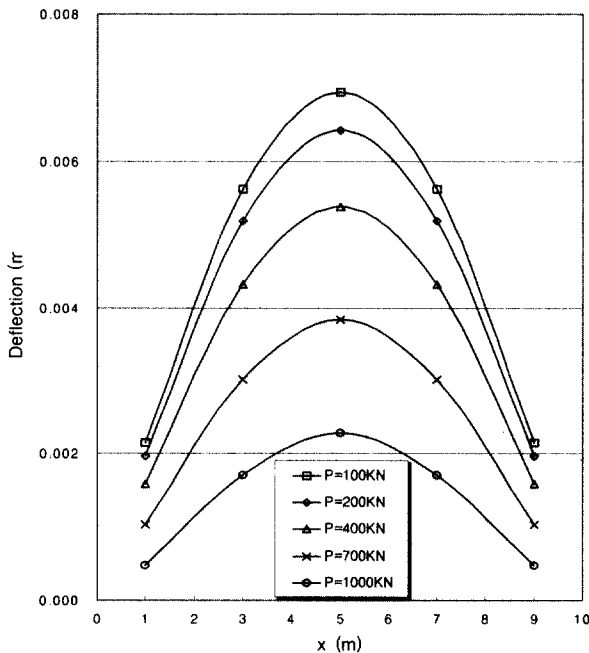


Fig. 9 Deflection Distribution

해석하였다. 해석의 절차는 편심 e=0.2m인 경우와 마찬가지로 지이다.

Fig. 11 과 Fig. 12 에서의 결과를 고찰하여 보면 복합적층판 이론에 의한 해석 결과와 보 이론에 의한 해석 결과와 거의 유사한 결과를 보여주었다.

Table 5. Mx with Increase of Axial Load (N · m)

(Nx) x(m)	100KN	200KN	400KN	700KN	1000KN
1m	104865.37	85043.55	45288.31	-14623.6	-74870.80
3m	271412.65	251888.5	212579.8	152965.4	92568.962
5m	326943.67	307534.0	268404.7	208935.3	148534.80
7m	271412.65	251888.5	212579.8	152965.4	92568.962
9m	104865.37	85043.55	45288.31	-14623.6	-74870.80

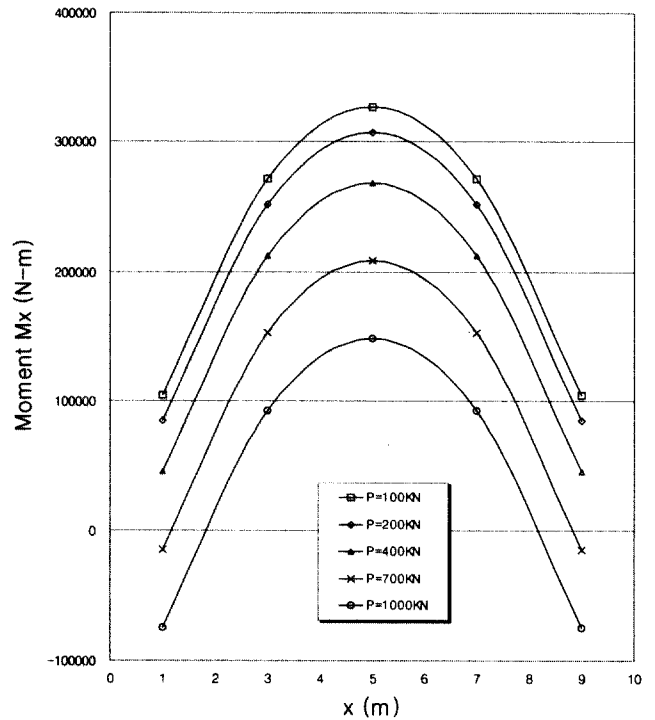


Fig. 10 Mx Distribution

Table 6. Deflection with Increase of Axial Load (m) (e=0.1m)

(Nx) x(m)	100kN	200kN	400kN	700kN	1000kN
1m	0.002246	0.002153	0.001967	0.001688	0.001409
3m	0.005840	0.005626	0.005192	0.004541	0.003889
5m	0.007195	0.006936	0.006420	0.005644	0.004869
7m	0.005843	0.005626	0.005192	0.004541	0.003889
9m	0.002246	0.002153	0.001967	0.001688	0.001409

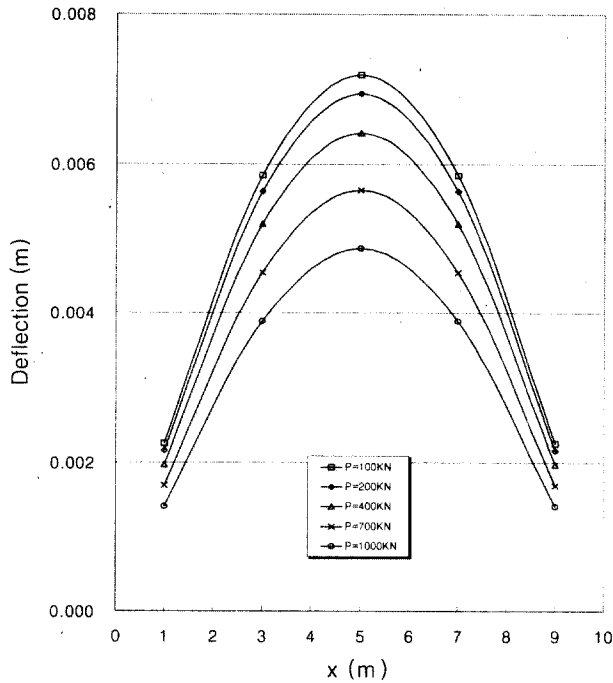


Fig. 11 Deflection Distribution (e=0.1m)

Table 7. Mx with Increase of Axial Load(N · m) (e=0.1m)

(Nx) x(m)	100kN	200kN	400kN	700kN	1000kN
1m	114649.98	104649.86	84648.88	54644.01	24632.53
3m	280849.95	270849.63	250847.10	220834.48	190804.76
5m	336249.94	326249.55	306246.44	276230.92	246194.37
7m	280849.95	270849.63	250847.10	220834.48	190804.76
9m	114649.98	104649.86	84648.88	54644.01	24632.53

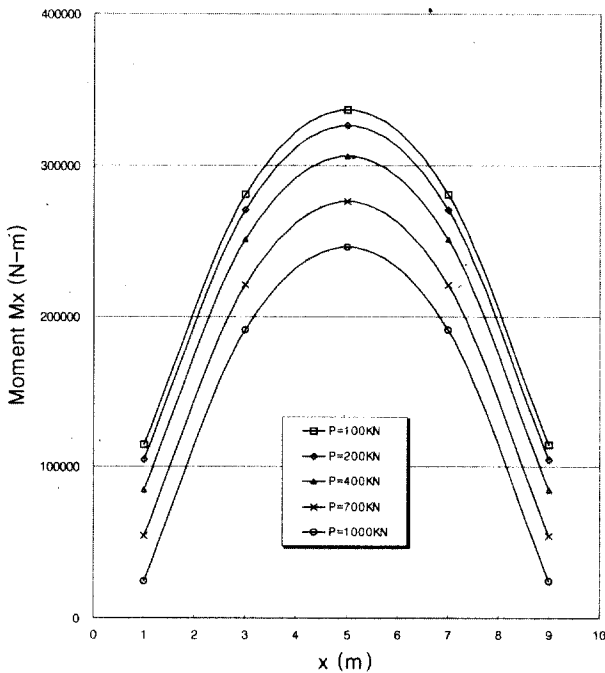


Fig. 12 Mx Distribution (e=0.1m)

4.4 결과 분석 및 고찰

정확도를 검증하기 위해 양단 단순지지, 타단 자유인 경우의 복합적층판 이론에 의한 처짐 결과를 비교한 결과 중앙점 5m에서의 처짐은 축방향력 100kN 에서 0.000152의 차이를 나타냈으며, 1000kN에서의 차이는 0.000140 으로 매우 정확한 값을 알 수 있다. 축방향 하중 증가에 따른 교량 중심선상 지점으로부터 위치별 모멘트는 100kN에서 2818.385 N · m 의 차이를 나타내었으며, 1000kN에서의 모멘트는 1209.6922N · m 의 차이를 나타내었다. 양단 단순지지, 타단 자유인 경계 조건하에서의 복합적층판 이론에 의한 포스트텐션된 슬래브 교량의 해석과 고전적인 보 이론에 의한 포스트텐션된 슬래브 교량의 해석 결과 처짐과 모멘트 값에 있어서 큰 차이를 보이지 않았다. 같은 조건의 모멘트의 차이는 0.01% , 처짐에서도 0.01%의 오차만이 발생됨을 알 수 있다. 이러한 일련의 결과를 고찰하여 보면 복합적층판 이론에 의한 해석 결과와 보 이론에 의한 포스트텐션된 슬래브 교량의 해석의 결과가 거의 일치함을 알 수 있었다.

5. 결론

본 논문에서는 포스트텐션된 슬래브 교량을 복합적층판의 이론에 의해 처짐과 모멘트를 구하고, 보 이론에 의하여 처짐과 모멘트를 구하여 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 본 논문에서 제시한 축방향 압축력과 단부모멘트, 등분포 수직하중을 받는 포스트텐션된 슬래브 교량에 대한 복합적층판 이론을 응용한 해석방법을 제시하였다.
- (2) 특별직교이방성 판 이론의 해석 결과와 보 이론에 의한 해석 결과를 비교해 본 결과, 본 연구에서 제시하고 있는 해석 방법에 대한 정확성을 입증할 수 있었다.
- (3) 축방향 하중의 증가에 따른 처짐과 모멘트 값의 차이가 매우 적으므로 본 해석방법의 타당성과 실용성을 입증할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 서울산업대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다.

참고 문헌

1. Kim, D.H., "Simple Method of Analysis for Preliminary Design of Certain Composite

- Laminated Primary Structures for Civil Construction II", Journal of Materials Processing Technology, 55, Elsevier, London, 1993.
2. Han, B.K. and Kim, D.H., "The Effect of Neglecting the Longitudinal Moment Terms in Analyzing $(90, 0, 90)_r$ Type Laminates with Increasing Aspect Ratio", Journal of KSSC, Vol 13, No. 1, pp.53-60, 2001.
 3. Han, B.K. and Kim D.H., "Analysis of steel Bridges by means of Specially Orthotropic Plate Theory", Journal of KSSC, Vol 13, No. 1, pp. 61-69, 2001.
 4. Kim, D.H., Han, B.K., Lee, J.H., Hong, C.W., "Simple Methods of Vibration Analysis of Three Span Continuous Reinforced Concrete Bridge with Elastic Intermediate Supports", Proceeding of the Advances in Structural Engineering and Mechanics, Seoul, Vol. 2, pp. 1279 - 1284, 1999
 5. Han, B.K. and Kim, J.W. "Analysis of Flexural Vibration of Rhombic Plates with Combinations Clamped and Free Boundary Conditions Including the Effect of Corner Stress Singularities" Journal of the Earthquake Engineering Society of Korea, Vol 3, No.1, pp. 9-20, 1999
 6. Kim, D.H., "Composite Structure for Civil and Architectural Engineering", E & FN SPON, 1st edition 1995.
 7. Kim, D.H., Won, C. M. and Lee, J.H. "Analysis of Post-tensioned Bridge by Specially Orthotropic Laminate Theory(I) - Reinforced Concrete Slab Bridge" Proceeding of the Korea Society of Composite Materials, pp. 135-139, 2001.
 8. Kim, D.H., "The Effect of Neglecting the Longitudinal Moment Term on the Natural Frequency of Laminated Plates with Increasing Aspect Ratio", Proceeding of the Korea Society of Civil Engineering (1), pp. 59-62, 1998.
 9. Stephen P. Timoshenko, and S. Woinowsky-krieger, Theory of Plates and Shells, Second Edition, McGraw Hill Book Co, 1989.
 10. Ashton, J.E., "Anisotropic Plate Analysis Boundary Condition", J. of Composite Materials. pp. 162-171, April, 1970.
 11. Whitney, J.M. and Leissa, A.W., "Analysis of a Simply Supported Laminated Anisotropic Rectangular Plate", Journal of AIAA, Vol. 8, No. 1 pp. 28-33, 1970.
 12. Pagano, N.J. "Exact Solution for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates", Journal of Composites Materials, Vol. 4, No. 1, pp. 20-34, Jan, 1970.

(접수일자 : 2001년 10월 23일)