

# 박벽보의 응력해석을 위한 단면상수의 자동산정

## Automatic Determination of Cross Sectional Properties For Stress Analysis of Thin-walled Beams

김 문 영<sup>1)</sup> · 최 명 수<sup>2)</sup> · 장 영<sup>3)</sup> · 김 남 일<sup>4)</sup>  
*Kim, Moon Young Choi, Myeong Su Chang, Young Kim, Nam Il*

요 약 : 박벽보의 응력해석을 위한 단면상수 값들을 자동적으로 산정하는 알고리즘을 개발한다. 사용자의 편의를 위해서 최소한의 단면정보만으로 복잡한 폐단면 및 개단면에 대하여 단면상수를 자동적으로 산정할 뿐만 아니라 보이론에 의하여 계산된 단면력에 대하여 대응하는 수직응력 또는 전단응력분포의 자동계산이 가능하다. 본 이론 및 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 기존의 논문결과와 비교하여 타당성을 입증한다.

ABSTRACT : An efficient algorithm automatically determining cross sectional properties of thin-walled beams is developed using the minimum information about geometry of the cross section. This scheme is applied to automatic calculation of normal and shear stress distribution corresponding to stress resultants as well as sectional constants for complex open and closed thin-walled sections. Numerical examples evaluating section constants and stress distributions is presented and compared with the available reference's results.

핵심용어 : 박벽보, 응력해석, 단면상수

KEYWORDS : Thin-walled beam, Stress resultants Cross sectional properties

### 1. 서론

임의 박벽단면을 가진 보 요소로 이루어진 구조물의 휨, 비틀을 고려한 유한요소이론 및 해석법은 토목, 건축, 기계, 항공 그리고 선체 구조공학의 여러 분야에서 근간을 이루고 있는 연구주제이다. 박벽부재는 주어진 외력에 대하여 최소한의 자중을 갖는 형태지만 휨과 비틀의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 실무에 있어서 많은 엔지니어들은 종종 다중박스거더교와 같은 복잡한 박벽구조물의 해석을 접하게 되며, 이때 휨상수와 더불어 비틀상수를 결정해야하는 어려움에 처하게 된다. 그리고 교차의 단면상수들은 박벽 직선과 곡선보의 좌굴 및 자유진동해석을 수행하기 위해 반드시 구해져야 하는 값들이다. 박벽보로 이루어진 구조물의 유한요소이론 및 해석법에서는 단면에 대한 휨, 전단 및 비틀상수들을 결정하는데 있어서 수계산의 복잡성을

해결하기 위하여 일반적으로 수치해석적인 방법이 적용되고 있다. 휨, 전단 및 비틀상수들은 다양한 적분과정을 포함하고 있기 때문에 개개의 박벽요소에 대한 정보를 바탕으로 수치해석적인 계산이 가능하다.

Seaburg<sup>(1)</sup>는 합성단면 및 비대칭단면에 있어서 단면상수 산정의 어려움을 지적하였으며, Yoo 와 Acra<sup>(2)</sup>는 박벽다중 폐단면의 단면상수를 자동적으로 산정하는 프로그램을 개발하였지만 사용자가 미리 단면에 대해서 많은 정보를 고려하여 입력해 주어야 하는 단점이 있었다. 그리고 최근에는 Aleksandar Prokic<sup>(3)</sup>이 그래프이론을 적용한 임의 박벽단면에 대한 단면상수를 산정하는 알고리즘을 제시하였다.

본 연구에서는 박벽보의 응력해석에 필요한 단면상수와 응력분포를 자동적으로 산정할 수 있는 알고리즘을 개발한다. 개발된 프로그램에서는 폐단면을 찾아가는 알고리즘이 있어서 사용자가 단면형상에 대한 최소한의 정보를 입력하여 자동적

1) 성균관대학교 토목환경공학과 교수

2) (주) 대우건설 토목기술1팀 과장

3) (주) 대우건설 토목기술1팀

4) 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정

본 논문에 대한 토의를 2002년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

으로 개개 박벽요소의 폐단면에 대한 정보를 인식하도록 고려한다. 그리하여 입력정보가 상당히 간략화 되었으며, 이로써 박벽보이론을 잘 모르는 실무의 엔지니어들도 쉽게 프로그램을 이용하는 것이 가능하다. 각 요소에서의 뒀함수와 전단류 산정을 위하여 매트릭스정식화를 통하여 계산할 수 있으며, 박벽폐단면에는 각 폐단면내에 부정정여력을 포함하고 있기 때문에 단면내의 전단류를 산정하기 위하여 폐단면의 수만큼 적합조건을 필요로 하게 된다. 이를 이용하여 휨, 비틀림에 대한 단면상수 및 유효전단계수를 산정한다. 구조해석을 통하여 얻어진 단면력을 입력하여 수직응력 및 전단응력을 자동산정할 수 있도록 한다. 본문에서는 프로그램의 알고리즘을 바탕으로 하여 수치해석적인 단면상수 산정방법 및 폐단면을 찾아 가는 알고리즘에 대한 내용을 제시한다. 그리고 기존논문과의 예제비교를 통하여 개발된 프로그램의 타당성을 검증한다.

## 2. 단면상수를 산정하기 위한 기본이론

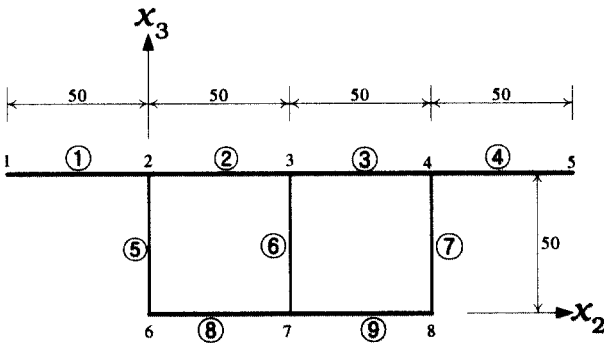


그림 1. 단면의 기하학적 정보

표 1. 입력형식

8	9
1	-50.0 50.0
2	0.0 50.0
3	50.0 50.0
4	100.0 50.0
5	150.0 50.0
6	0.0 0.0
7	50.0 0.0
8	100.0 0.0
1	1 2 1.0 1.0
2	2 3 1.0 1.0
3	3 4 1.0 1.0
4	4 5 1.0 1.0
5	2 6 0.5 1.0
6	3 7 0.5 1.0
7	4 8 0.5 1.0
8	6 7 1.0 1.0
9	7 8 1.0 1.0

본 장에서는 임의 형상을 갖는 박벽보의 단면상수를 산정하기 위한 이론적 배경과 프로그램의 알고리즘을 요약한다. 개발된 프로그램에 대한 실제적인 설명이 되기 위하여 그림 1과 같은 단면을 고려하며, 단면에 대한 입력형식은 표 1과 같다.

### 2.1 단면상수의 정의

도심축과 전단중심에서 정의된 단면상수의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$I_\phi = \int_A \phi^2 dA = \int_A (\phi_s - e_3 x_2)^2 dA = I_\phi^s + e_3^2 I_3 \quad (1a)$$

$$I_{\phi 3} = \int_A \phi x_2 dA = \int_A (\phi_s - e_3 x_2) x_2 dA = -e_3 I_3 \quad (1b)$$

$$I_{\phi 22} = \int_A \phi x_3^2 dA = \int_A (\phi_s - e_3 x_2) x_3^2 dA = I_{\phi 22}^s - e_3 I_{223} \quad (1c)$$

$$I_{\phi 23} = \int_A \phi x_2 x_3 dA = \int_A (\phi_s - e_3 x_2) x_2 x_3 dA = I_{\phi 23}^s - e_3 I_{233} \quad (1d)$$

$$I_{\phi 33} = \int_A \phi x_2^2 dA = \int_A (\phi_s - e_3 x_2) x_2^2 dA = I_{\phi 33}^s - e_3 I_{333} \quad (1e)$$

$$I_{\phi \phi 2} = \int_A \phi^2 x_3 dA = \int_A (\phi_s - e_3 x_2)^2 x_3 dA = I_{\phi \phi 2}^s + e_3^2 I_{233} - 2e_3 I_{\phi 23}^s \quad (1f)$$

여기서

$$I_2 = \int_A x_3^2 dA, I_3 = \int_A x_2^2 dA, I_{222} = \int_A x_3^3 dA \quad (2)$$

$$I_{223} = \int_A x_2 x_3^2 dA, I_{233} = \int_A x_2^2 x_3 dA, I_{333} = \int_A x_2^3 dA$$

여기서  $e_2, e_3$ 는 각각  $x_2$ 와  $x_3$ 축에 대한 도심축으로부터 전단중심까지의 거리이며,  $\phi, \phi_s$ 는 각각 도심과 전단중심축에 대한 뒀함수를 나타낸다.

그림 1에 대하여 프로그램을 통해 구해진 도심축에 대한 단면상수는 표 2와 같다.

### 2.2 St. Venant 비틀림 상수의 결정

St. Venant 비틀림상수  $J$ 는 박벽 개단면 구조의 경우에 다음과 같은 식으로 간단히 산정할 수 있다.

$$J = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 \quad (3)$$

표 2. 도심축에 대한 단면상수

단면 상수	
단면적	$A = 375.00000$
주축과 이루는 각	$radian = 0.00000$
도심의 위치	$C_2 = 50.00000$ $C_3 = 31.66667$
편심량	$E_2 = 0.00000$ $E_3 = -0.71429$
단면 2차 모멘트	$I_2 = 186458.33333$ $I_3 = 875000.00000$
	$I_{23} = 0.00000$ $I_{22} = -2277777.77778$
	$I_{233} = 0.00000$ $I_{233} = 8750000.00000$
	$I_{333} = 0.00000$
뒹함수	$I_{\phi 2} = 0.00000$ $I_{\phi 3} = 625000.00000$
	$I_{\phi \phi} = 21527777.77778$ $I_{\phi 22} = 0.00000$
	$I_{\phi 33} = 0.00000$ $I_{\phi 23} = -37152777.77778$
	$I_{\phi \phi 2} = 70601851.85185$ $I_{\phi \phi 3} = 0.00000$

표 3. 전단류상수와 비틀상수

셀번호	셀면적	$L/t$	$2 \times A_0/L/t$	$C_i$
1	2500.000	300.000	16.667	25.000
2	2500.000	300.000	16.667	25.000
비틀 상수	$J$	250033.33333		

여기서  $b_i$ :  $i$  번째 요소의 폭,  $t_i$ :  $i$  번째 요소의 두께  
 임의의 박벽 폐단면에서 각각의 셀(cell)에 작용하는 비틀 하중과 전단류는 막유사이론<sup>(4)</sup>(membrane analogy analysis)을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_i \oint_i \frac{ds}{t} - \sum_k C_k \int_{ik} \frac{ds}{t} = 2A_{oi} \quad (4)$$

그림 1과 같은 다중연속셀(multicontinuous cell)을 예로 들면, 식 (4)를 이용하여 전단류상수(shear flow constant)  $C_i$ 를 구하는 식들을 매트릭스형식으로 정리할 수 있으며, 이것을 풀면 각각의 셀에 대한  $C_i$ 값을 구하게 된다. 막유사이론을 적용하면 임의의 박벽 폐단면의 비틀상수  $J$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J = 2 \sum_{i=1}^n C_i A_i \quad (5)$$

그림 1의 주어진 단면에 대한 전단류상수  $C_i$ 와 비틀상수  $J$ 는 표 3과 같다.

### 2.3 뒹함수 및 전단중심

뒹함수(warping function)를 수치적으로 산정하는 방법은 다음과 같다. 먼저 개단면인 경우 기준점(도심 또는 전단중심)에 대한 뒹함수는  $w_j = w_i + \rho_{ij} L_{ij}$  와 같이 나타낼 수 있고, 요소에 대한 뒹함수를 구하기 위해 매트릭스형식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{12} L_{12} \\ -\rho_{12} L_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{12} \\ k_{12} \end{pmatrix} \quad (6)$$

개개의 요소를 모아서 모든 요소에 대하여 정리한 뒤, 매트릭스를 풀면 각 노드에서의 단위 뒹함수를 구할 수 있다. 여기서 단위 뒹함수는 요소의 시작점과 끝점에 대하여 선형적으로 변화하기 때문에 선형분포형의 수치해석적 적분을 수행함으로써 정확한 값을 얻을 수 있다.

다음으로 폐단면의 경우에 뒹함수는 수치해석적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_j = w_i + \rho_{ij} L_{ij} - \frac{2A_o}{C_{oi}} C_{ij} \quad (7)$$

여기서

$$C_{oi} = \oint_i \frac{ds}{t} \quad (8a)$$

$$C_{ij} = \int_0^s \frac{ds}{t} \quad (8b)$$

폐단면에 대한 각 노드의 뒹함수를 구하는 방법은 개단면의 경우와 동일하다. 위에서  $\rho$  와  $\rho_o$ 는 각각 도심 및 전단중심에서 요소에 내린 연직거리가 된다. 벡터해석이론을 적용하여  $\rho$  나  $\rho_o$ 를 구하면, 점  $i$ 와  $j$ 를 통과하는 직선에 기준점(도심 또는 전단중심)으로부터 내린 최단거리를 구하는 식이 된다.

$$\rho_{ij} = \frac{(x_j - x_i)y - (y_j - y_i)x + x_i y_j - x_j y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (9)$$

여기서 요소의  $i, j$  방향이 기준점에 대하여 반시계 방향인 경우에 계산의 합리성을 추구하기 위해  $\rho$  와  $\rho_o$ 의 값을 양(positive)으로 잡아서 일관성 있는 계산을 수행한다.

도심과 전단중심에서 각각 정의되는 정규화된 뒹함수(normalized warping function)  $\phi_c, \phi_s$ 은 다음식으로

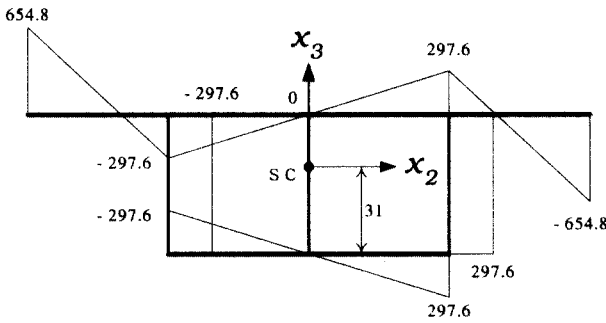


그림 2. 정규화된 뒀함수의 분포와 전단중심

표 4. 전단중심에 대한 뒀상수

$I_{\phi 2}$	0.00000
$I_{\phi 3}$	0.00000
$I_{\phi 6}$	21081349.20635
$I_{\phi 22}$	0.00000
$I_{\phi 33}$	0.00000
$I_{\phi 23}$	-43402777.77778
$I_{\phi \phi 2}$	128141534.39153
$I_{\phi \phi 3}$	0.00000

산정되며, 이것으로 뒀상수를 구할 수 있다.

$$\phi_c = \frac{1}{A} \oint w_c t ds - w_c \quad (10a)$$

$$\phi_s = \frac{1}{A} \oint w_o t ds - w_o \quad (10b)$$

도심-주축에 대하여 전단중심 좌표( $e_2, e_3$ )를 계산하면 다음과 같다.

$$e_2 = \frac{I_{23} I_{\phi 2}^c - I_3 I_{\phi 3}^c}{I_{23}^2 - I_2 I_3} \quad (11a)$$

$$e_3 = \frac{I_2 I_{\phi 2}^c - I_{23} I_{\phi 3}^c}{I_{23}^2 - I_2 I_3} \quad (11b)$$

그림 1에 대한 정규화된 뒀함수의 분포와 전단중심의 위치는 그림 2와 같고, 전단중심에 대한 뒀상수는 표 4와 같다.

## 2.4 휨전단류를 구하는 알고리즘

전단응력에는 비틀림중에 의한 전단응력과 더불어 휨모멘트에 의한 연직응력의 변화로 발생하는 전단응력이 있다. 잘 알려진 바와 같이 전단력  $F_3$ 만 고려했을 때 휨전단류는 다음과 같다.

표 5. 휨전단류를 구하는 알고리즘을 위해 정의된 배열

알고리즘을 위해 정의된 배열	
NOD_NCF	각 절점에 연결된 부재의 수
NOD_CF	각 절점에 연결된 부재의 번호
FRM_QF	각 부재의 시작절점, 중앙점, 끝절점에서의 휨전단류값
QNODE	각 절점에서의 휨전단류값
QFLOW	휨전단류를 계산하기 위한 x좌표값, y좌표값, warping 상수값

$$q_o = \tau t = -\frac{F_3}{I_2} Q_2 \quad (12)$$

식 (12)는 개단면의 경우에만 유용하다. 박벽폐단면의 경우에는 자유단이 없어 내적 부정정구조가 되기 때문에 전단류를 결정하기 위한 적분을 수행할 수 없게 된다. 그래서 식 (12)를 사용하기 위하여 셀을 이루는 직선요소들중 하나에 가상의 절단점(fictitious cutting point)을 두어 정정구조화시키고, 적합조건을 만족하도록 각 셀에 부정정여력을 계산하여 식 (12)로부터 계산된 정정전단류에 더해줌으로 평형조건을 만족시킨다.

전단력  $F_2$ 에 의한 단면의 전단류는 위와 동일 과정에 의해 이루어진다.

프로그램내에서 휨전단류를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

- 1) 각 절점에서의 휨전단류값 및 모든 절점과 부재의 연결 상태를 초기화한다.
  - QNODE, NOD\_NCF, NOD\_CF의 초기화
- 2) 각 절점과 부재의 연결상태를 찾는다.
  - NOD\_NCF, NOD\_CF의 재구성
- 3) 모든 셀에 대해서 가상의 절단점을 만든다.
  - 계산된 셀의 갯수에 대한 LOOP(I-loop)안에서 부재의 번호를 증가시키며(J-loop), J부재가 I셀에 포함되는 경우에 해당 절점 및 부재수를 음수로 만들어 절단점을 기억시킴으로써 셀 개수만큼의 가상의 절단점이 만들어진다.
- 4) 모든부재에 대해서 전단류를 계산한다.(I-loop)
  - ① 가상의 절단점이 있는 요소의 경우
    - 만약 부재의 방향성을 고려하여 시작절점의 연결부재수가 음수이고 끝절점이 다른부재와 연결되어있으면, 즉 I번째 부재의 시작절점이 가상의 절단점이면, 그 절점에 연결된 부재들중 부재번호가 (-)I와 일치하는 연결부재에

대하여 NOD\_NCF의 부호를 양수로 바꾸어주고, Subroutine DelFlow를 이용하여 I번째 부재의 시작 절점에서 끝절점으로의 휨전단류를 계산한다. 그리고 시작절점이 가상의 절단점이므로 휨전단류값을 0이 되도록 보정해준다.

② 부재의 방향이 시작절점→끝절점인 경우  
 만약 부재의 방향성을 고려하여 시작절점의 NOD\_NCF가 1이고, 끝절점의 NOD\_NCF가 0이 아니면, 즉 시작절점이 자유단이거나 이미 휨전단류가 계산된 절점이면, 그 절점의 연결부재들 중 부재번호가 I와 일치하는 연결부재에 대해서 Subroutine DelFlow를 이용하여 I번째 부재의 시작절점에서 끝절점으로의 휨전단류를 계산한다.

③ 부재의 방향이 끝절점→시작절점인 경우  
 만약 끝절점의 NOD\_NCF가 1이고, 시작절점의 NOD\_NCF가 0이 아니면, 즉 끝절점이 자유단이거나 이미 휨전단류가 계산된 절점이면, 끝절점의 연결부재들 중 부재번호가 I와 일치하는 연결부재에 대해서 Subroutine DelFlow를 이용하여 I번째 부재의 시작 절점에서 끝절점으로의 휨전단류를 계산하고 부재의 방향과 반대방향으로 계산된 값을 보정하여준다.

\* Subroutine DelFlow : 해당부재와 절점들의 휨전단류값을 계산하고, 그 부재의 시작절점과 끝절점의 연결부재수를 1씩 감소시키며, I부재에 해당하는 부재번호를 0으로 세팅한다. 모든 부재를 계산하고 나면 연결부재수는 0이 된다.

5) 만약 모든 절점에대해 연결부재수가 0이면, 즉 모든 절점에 대한 휨전단류값을 계산하였다면 폐단면에 대한 적합조건을 만족하도록 하는 매트릭스형식을 구성하여 매트릭스 Solver를 통해 각 셀에 대한 휨전단류값을 보정해줌으로써 휨전단류를 구할 수 있다.

단, 여기서 전단류는 이차분포를 하기 때문에 요소의 시작점과 끝점에 대해서 포물선분포형의 수치해석적 적분을 수행하여 부재 양단의 값과 중앙값으로 이차분포를 근사한다.

유효전단계수  $f_2, f_3, C_r$  은 위와 같은 과정에서 계산된 휨전단류를 이용하여 구할 수 있다.

$$f_3 = \frac{A}{I_2^2} \int \frac{Q_2^2}{t} ds \quad (13a)$$

$$f_2 = \frac{A}{I_3^2} \int \frac{Q_3^2}{t} ds \quad (13b)$$

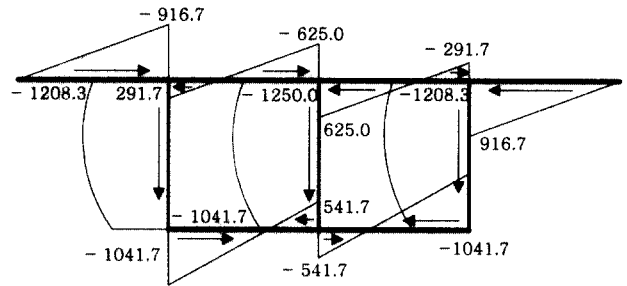


그림 3.  $Q_2$

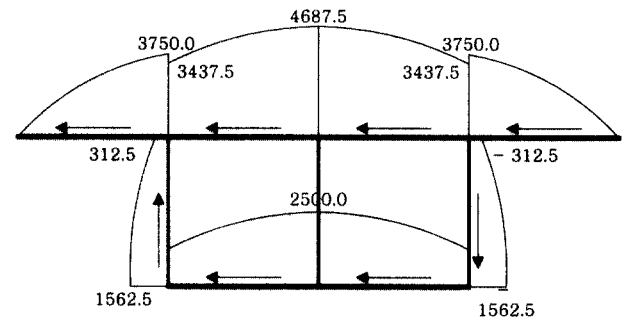


그림 4.  $Q_3$

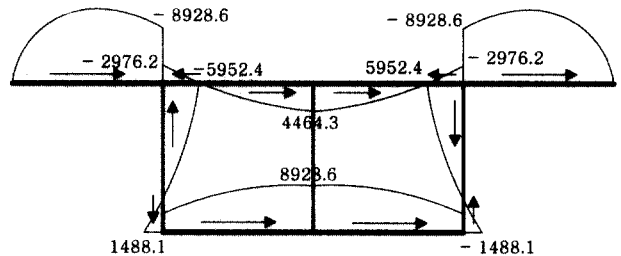


그림 5.  $Q_r$

표 6. 유효전단계수

$f_2$	1.55740
$f_3$	5.71611
$C_r$	8.74580

$$C_r = \frac{I}{I_\phi^2} \int \frac{Q_r^2}{t} ds \quad (13c)$$

그림 1에 대한 전단류의 분포는 그림 3, 그림 4 그리고 그림 5이며, 유효전단계수는 표 6과 같다.

임의 하중이 작용할 때 작용하중에 대한 박벽부재단면의 단면력이 얻어지면, 단면에 작용하는 수직응력 및 전단응력을 구할 수 있다.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_2}{I_2} x_3 + \frac{M_3}{I_3} x_2 + \frac{M_\phi}{I_\phi} \phi^s \quad (14a)$$

$$\tau t = -\frac{V_3}{I_2} Q_2 - \frac{V_2}{I_3} Q_3 - \frac{M_R}{I_\phi} Q_r \quad (14b)$$

### 3. 폐단면을 찾는 알고리즘 (Subroutine FindLoops)

폐단면을 찾는 알고리즘은 찾아가는 방향에 따라서 그림 6과 같이 4가지로 구분될 수 있다.

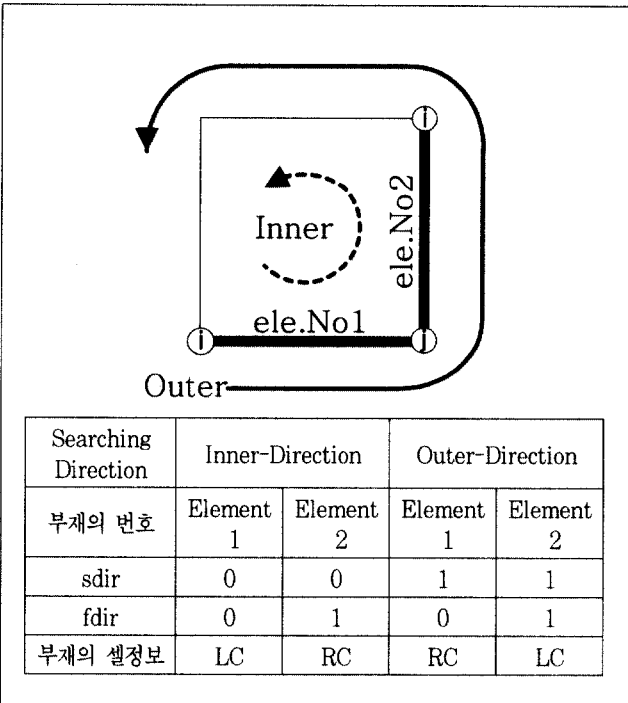


그림 6. 폐단면을 찾아가는 알고리즘  
(Searching-Direction : 4 case )

여기서

sdir : 임의 박벽단면 둘레로 폐단면을 찾아가는 방향

sdir=0 내부로 찾아가는 경우

sdir=1 외부로 찾아가는 경우

fdir : 찾는 방향을 고려한 요소의  $i, j$  방향

fdir=0 만일 sdir과 동일한 방향이라면 LC

fdir=1 만일 sdir과 반대방향이라면 RC

프로그램내에서 폐단면을 찾아가는 알고리즘은 다음과 같다.

- 1) 모든 부재의 왼쪽셀과 오른쪽 셀에 대한 정보를 초기화한다.  
- NumLoop, FRM\_LC, FRM\_RC의 초기화
- 2) 모든 요소에 대해서 내부방향(sdir=0)으로 그리고 외부방향(sdir=1)으로 폐단면을 찾아가는다.
- ① 출발부재와 절점, 다음절점 그리고 요소의 방향을 설정하고, NUMANG와 방향성을 고려한 SUMANG을 초기화한다. 대상요소에 대해서는 sdir과 fdir을 고려하여

표 7. 폐단면을 찾는 알고리즘을 위해 정의된 배열

알고리즘을 위해 정의된 배열	
NumLoop	찾아진 순서대로 주어지는 셀번호
FRM_LC	부재의 왼쪽셀에 대한 정보
FRM_RC	부재의 오른쪽셀에 대한 정보
NUMANG	대상구조의 꼭지점의 갯수
SUMANG	부재사잇각의 합

FRM\_LC와 FRM\_RC를 결정한다.

- ② 다음 대상요소를 찾기위해서 찾아가는 방향성을 고려하여 현재대상요소와 연결된 부재들과의 사잇각을 구한다. 단 연결된 부재의 수가 1인 경우, 즉 자유단인 경우에는 SUMANG에 360을 더하고, 1이 아닌 경우에는 반대편 절점을 다음 대상점으로 한다. 여기서 부재의 사잇각은 벡터의 내적, 외적공식과 폐단면을 찾아가는 방향성을 고려하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos \theta \quad (15a)$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A||B| \sin \theta \quad (15b)$$

폐단면을 찾아가는 방향성을 고려하여 부재와 부재의 사잇각을 계산하는 방법은 다음과 같다 (그림 7 참조).

- ③ 이렇게 구해진 폐단면내의 임의 절점에 연결된 부재들의 사잇각들중 가장 작은 값을 갖는 부재를 방향성을 고려한 다음 대상요소로 결정한다. 그리고 SUMANG에는 계산된 부재사잇각이 더해지며 NUMANG도 하나 증가시킨다.
- ④ 다음 대상요소의 방향성을 결정하기 위해 ①의 과정이 반복된다. 만일 다음 대상 절점이 처음 출발절점과 같게되면 하나의 폐단면을 찾게된다. 이때 개단면의 경우도 시작절점에서 방향성을 고려하여 폐단면을 찾아가면 에러가 없을 경우 반드시 출발점에 다시 도착하기 때문에 폐단면에 대한 조건을 하나 더 부여해야만 한다.
- ⑤ 일련의 반복과정을 통해 각 절점에서 계산된 부재들의 사잇각들의 합을 고려하여 폐단면을 결정한다. 우리는 이미 중등수학에서 다음과 같은 내용을 알고 있다.

$$n\text{각형의 내각의 합} : 180 \times (n-2) \quad (16a)$$

$$n\text{각형의 외각의 합} : 180 \times (n+2) \quad (16b)$$

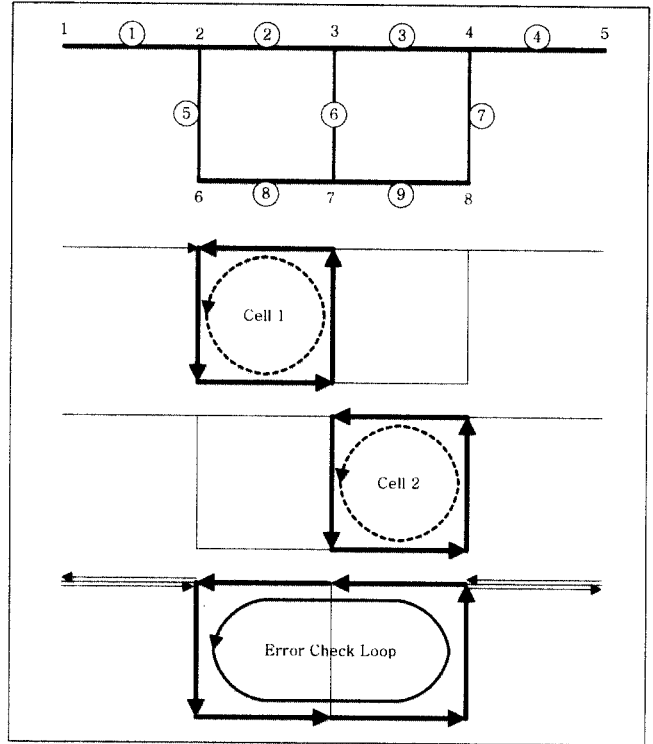


그림 8. 폐단면을 찾는 알고리즘의 예제

의 방향(fdir)과 찾아가는 방향(sdir)을 고려하여 개개 부재의 FRM\_LC 와 FRM\_RC를 결정한다. 즉 Searching Direction의 4가지경우에서 LC 와 RC를 결정하여 주어진 셀번호를 부재의 FRM\_LC와 FRM\_RC에 입력한다.

⑦ 이렇게 내부방향(sdir=0)으로 폐단면을 찾아서 부재의 셀정보를 결정한 후, 외부방향(sdir=1)으로 폐단면을 찾아가며 셀정보가 결정되지 않은 부재를 해결한다. 이때 찾아가는 방향성을 고려한 다음 대상부재의 결정은 절점에 연결된 부재들의 사잇각들중 작은 값이 아닌 큰 값을 고려하여 결정한다. 이렇게하여 외각의 합(SUMANG)을 NUMANG+2로 나누었을 때 위에서와 마찬가지로 몫이 180으로 나누어 떨어지면 폐단면을 찾는 일련의 과정에서 에러가 없었음을 알 수 있게되며, 남은 부재에 대한 셀정보도 결정지을 수 있게된다.

⑧ 내부로(sdir=0)로 그리고 외부로(sdir=1) 폐단면을 찾으며 부재의 셀정보를 결정한 뒤, 셀정보가 결정되지 못한 남은 부재에 대해서는 셀이없는 것으로하여 부재의 셀정보에 0을 입력한다. 만일 개단면이라면 모든 셀정보가 0이 될 것이다.

그림 1에 대하여 폐단면을 찾아가는 예를 보이면 다음과 같다 (그림 8 참조).

그림 7a. 부재의 사잇각을 계산하는 방법 (inner direction)

그림 7b. 부재의 사잇각을 계산하는 방법 (outer direction)

먼저 내각의 합조건을 이용하여 폐단면의 유무를 결정하고, 부재사잇각 계산중의 에러와 폐단면을 찾는 일련의 과정중의 에러처리를 위해서 n각형의 외각의 합조건을 사용한다. n각형의 내각의 합조건을 이용하기 위해 sdir이 0인 경우, 즉 모든 요소에 대해 내부로 폐단면을 찾아가는 경우, 시작절점에서 출발하여 다시 출발한 시작절점으로 돌아왔을 때 내각의 합(SUMANG)을 NUMANG-2로 나누어 몫이 180으로 나누어 떨어지면 찾고자하는 폐단면이 존재함을 나타내는 것이고, 그렇지 않은 경우에는 개단면이 되는 것이다.

⑥ 다음 폐단면을 찾기 위해서 이전에 찾은 폐단면의 시작절점의 바로 전 절점을 새로운 시작절점으로 하여서 위와 같은 과정을 반복한다. 이때 결정된 폐단면은 찾아진 순서에 의해서 번호가 주어지며, 이 셀정보와 부재

표 8. 본 연구 및 Yoo 와 Acra의 비대칭단면의 입력형식

Present Input Data		Yoo 와 Acra	
9	10	11	10 2 0 0 3 1
1	0 0	1	0 0
2	36 0	2	36 0
3	72 0	3	36 -60
4	108 0	4	36 0
5	144 0	5	72 0
6	72 -30	6	72 0
7	108 -30	7	72 -30
8	36 -60	8	108 0
9	144 -60	9	108 -30
1	1 2 1 1	10	144 0
2	2 3 1 1	11	144 -60
3	3 4 1 1	1	1 2 1 0 0 0 0
4	4 5 1 1	2	4 5 1 0 1 0 0
5	3 6 .5 1	3	5 8 1 0 1 0 2
6	6 8 .5 1	4	8 10 1 0 1 0 0
7	7 4 .5 1	5	6 7 .5 2 1 1 0
8	2 8 .75 1	6	8 9 .5 1 2 0 0
9	8 9 1 1	7	7 9 .5 2 1 0 0
10	9 5 .75 1	8	2 3 .75 1 0 0 0
		9	10 11 .75 0 1 0 0
		10	3 11 1 1 0 0 0

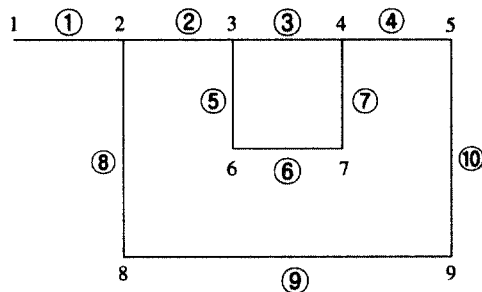


그림 9. 비대칭단면의 형상

이렇게 자동화 과정을 거쳐 얻어진 개개요소의 FRM\_LC, FRM\_RC는 임의의 박벽단면에 대한 비틀상수와 뒹상수 그리고 전단류를 계산하기 위해서 사용된다.

#### 4. 단면상수 산정 알고리즘의 검증을 위한 예제

프로그램 검증을 위한 예제는 다양하지만 여기에서는 그림 9와 같이 셀 안에 또 다른 셀이 있는 비대칭 단면의 경우에 대하여 Yoo 와 Acra<sup>(2)</sup>의 논문에 제시된 예제와 비교하였다. 표 8은 그림 9에 대한 본 방법 및 Yoo 와 Acra의 입력형식을 보여주고 있다. 표에서도 볼 수 있듯이 Yoo 와 Acra는 폐 단면을 네 개의 셀, 즉 NCELL1- NCELL4 으로 분할하여 계산하였으며 결과적으로 본 방법에 의한 입력형식이 Yoo 와 Acra의 입력형식에 비하여 상당히 간략화된 것을 알 수 있

표 9. 정규화된 뒹함수  $\phi_i$

절점	Present solution	Yoo 와 Acra
1	708	708
2	-357	-357
3	-195	-195
4	114	114
5	276	276
6	123	123
7	-157	-157
8	205	205
9	-191	-191

표 10. 휨전단류  $Q_3$

요 소	Present solution			Yoo 와 Acra		
	Near end	Far end	Mid point	Near end	Far end	Mid point
1	0	-2,470	-1,400	0	-2,470	-1,400
2	-2,380	-3,570	-3,140	-2,380	-3,570	-3,140
3	-3,060	-2,970	-3,170	-3,060	-2,970	-3,170
4	-3,220	-1,850	-2,700	-3,220	-1,850	-2,700
5	-518	-713	625	-518	-713	-625
6	-713	584	-728	-713	584	-728
7	246	-584	406	246	-584	406
8	94	-2,170	-1,190	94	-2,170	-1,190
9	-2,170	867	-2,960	-2,170	867	-2,960
10	-1,850	-867	-549	-1,850	-867	-549

다. 표 9에서는 해석결과 정규화된 뒹함수와 휨전단류의 값을 Yoo 와 Acra의 결과와 함께 제시하였으며, 본 방법에 의한 결과와 Yoo 와 Acra의 결과가 일치함을 알 수 있다. 또한 뒹함수, 뒹 정적모멘트 및  $x_2$  및  $x_3$  방향의 전단류분포를 그림 10에 도시하였다.

#### 5. 결론

복잡한 형상의 박벽단면을 가진 구조물에 대한 단면상수의 결정은 수계산으로는 너무나 많은 수고를 필요로 한다. 그러나 다행히도 박벽단면에 대한 휨, 전단 및 비틀상수들은 다양한 적분과정을 포함하고 있기 때문에 개개의 박벽요소에 대한 정보를 바탕으로 수치해석적인 계산이 가능하다. 폐단면의 비틀상수와 뒹상수를 구하기 위해서는 개개의 요소에 대한 뒹함수 및 전단류를 먼저 구해야한다. 임의의 박벽단면에 대한 뒹함수 및 전단류는 개개의 요소에 대해 수치해석적인 전개를 통하여 매트릭스정식화를 할 수 있었다. 그리고 이런 매트릭스식은 Band-Matrix Solver로써 계산하여 각 요소의 뒹함수와 전단류를 결정하도록 하였다. 박벽폐단면의 경우에는



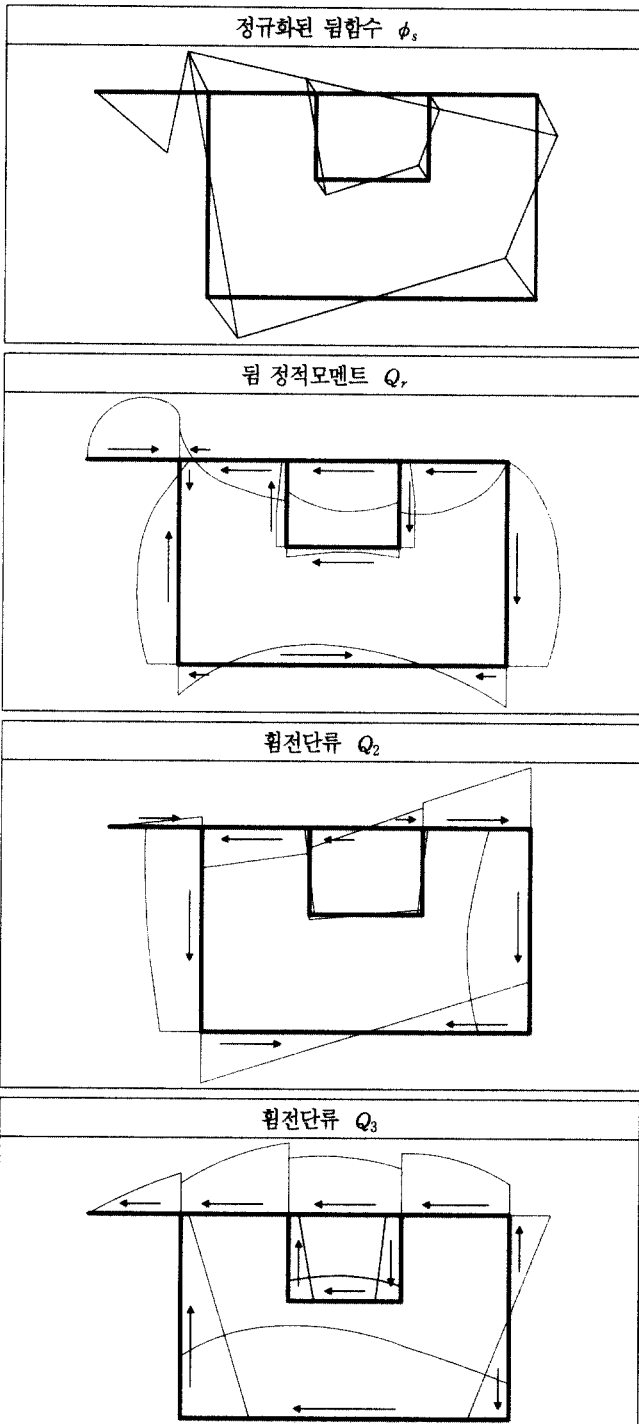


그림 10. 프로그램 결과에 의한 뒀함수, 뒀 정적모멘트 및 휨전단류 분포

자유단이 없기 때문에 전단류를 결정하기 위한 수치적분을 수행할 수 없게 된다. 그래서 수치적분을 수행할 수 있도록 하기 위하여 찾아가는 방향의 첫 번째 요소에 가상의 절단점 (fictitious cutting point)을 두어 전단에 대하여 정정구조물로 만든 뒤 수치해석적인 전개를 통하여 정정전단류를 구하였다. 마찬가지로 다중셀인 경우에도 개개의 셀에서 셀을 찾아가는 방향의 첫 번째 요소들에 가상의 절단점을 하나씩 두어 정정구조물로 만든 뒤 수치해석적인 방법을 적용한다. 이렇게 가상의 절단점을 두면 절단면에서 전단류의 연속성을 얻지 못하게 되므로 적합조건을 만족하도록 각 셀에 부정정여력을 계산하여 정정전단류에 더해줌으로써 평형조건을 만족하는 휨에 대한 전단류를 구할 수 있다. 서로 다른 재료들로 구성된 합성단면에서의 단면상수들은 탄성계수비에 의하여 수정된 두께를 가진 균질단면으로 고려 될 수 있으며, 사용자의 편의를 위해서 단면형상에 대한 입력정보만으로 단면상수를 산정할 수 있도록 자동화하였다.

### 참고 문헌

1. P. A. Seaburg, 1981 Civ. Engng. ASCE 51(1), 52-56. The ABCs(and Q) of cold-formed steel design.
2. C. H. Yoo and S. V. Acra, 1986 Computer and Structures 22,53-61. Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section.
3. A. Prokic, 2000 Computer and Structures 74, 705-715. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section.
4. S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, 1970 Theory of Elasticity, McGraw-Hill International Editions, New York.

(접수일자 : 2001년 6월 5일)