

박벽 C형 복합재료 보의 휨-비틀림 진동 해석

Flexural-torsional Vibration Analysis of Thin-walled C-Section Composite Beams

김 영 빈¹⁾ · 이 재 홍²⁾
Kim, Young Bin · Lee, Jae Hong

요 약 : 적층된 박벽 복합재료 보의 자유 진동에 관한 연구를 수행하였다. 박벽 C형강 복합재료의 동적 거동에 적용 가능한 일반적인 해석 모델을 개발하였다. 이 모델은 classical lamination theory를 기초로 두고 있으며, 임의의 적층 상태의 구성 즉, 대칭뿐만 아니라 비대칭의 적층 상태, 그리고 다양한 경계조건에 따른 휨과 비틀림 형상의 연계(coupling)를 설명하였다. 변위를 기반으로 한 일차원 유한 요소 모델은 박벽 복합재료 보의 고유 진동수와 그에 대응하는 진동 모드를 예측하기 위해 개발되었다. 운동방정식은 Hamilton의 원리로부터 유도되었으며, 수치적인 결과는 박벽 복합재 보에서 복합재료의 진동수와 모드 형상에 대해 적층각, 계수비, 그리고 경계조건의 영향을 얻을 수 있었다.

ABSTRACT : Free vibration of a thin-walled laminated composite beam is studied. A general analytical model applicable to the dynamic behavior of a thin-walled channel section composite is developed. This model is based on the classical lamination theory, and accounts for the coupling of flexural and torsional modes for arbitrary laminate stacking sequence configuration, i.e. unsymmetric as well as symmetric, and various boundary conditions. A displacement-based one-dimensional finite element model is developed to predict natural frequencies and corresponding vibration modes for a thin-walled composite beam. Equations of motion are derived from the Hamilton's principle. Numerical results are obtained for thin-walled composite addressing the effects of fiber angle, modulus ratio, and boundary conditions on the vibration frequencies and mode shapes of the composites.

핵심용어 : 박벽 복합재료, 고전 적층 이론, 휨-비틀림 진동

KEYWORDS : thin-walled, classical lamination theory, flexural-torsional vibration

1. 서론

FRP(fiber-reinforced plastic)는 과거 수십년간 고강성이나 고강도가 요구되는 다양한 구조물에 사용되어져 왔다. 최근들어 건설 산업에서 인발 제조 공정을 거쳐 생산된 박벽 개단면과 같은 FRP 구조체가 개발되었다.

다수의 연구자들은 H형 보 및 기둥과 같은 개단면 박벽 보의 불안정 이론에 대해 연구하였으며, 몇몇의 저서에서는 그러한 부재들의 동적 거동에 대해 다루어져 왔다. 등방성 박벽 보의 휨과 비틀림 고유 진동수에 대한 정해(closed-form)는 여러 문헌^{(1)~(3)}에서 알 수 있다. 그러나 이러한 해는 2축 대칭 형상의 단면과 양단 단순 지지된 보에 국한되어 있다.

Wekezer^{(4),(5)}는 유한요소법에 의해 다양한 박벽 H형 보의 자유 진동에 대해서 연구하였으며, 이미 뒤틀린 박벽 캔틸레버 H형 보의 비틀림 진동에 관한 분석적인 연구는 McGee 등⁽⁶⁾에 의해 수행되었다. 그들은 단면형상 비의 변화에 따른 비틀림 진동을 정해로 유도하였다. Ohga 등⁽⁷⁾은 전달 행렬법을 이용하여 박벽 부재의 고유 진동수와 모드 형상을 추정하기 위한 해석적인 과정을 설명하였고, 2차원 판 조합 모델을 이용하여 C형 단면, 박스형 단면 그리고 H형 단면을 포함한 다양한 형태의 단면을 가진 박벽 부재를 해석하였다.

위에서 언급한 모든 참고문헌은 등방성 재료로 이루어진 박벽 보의 자유 진동을 다루고 있다. 박벽 복합재 보의 일반적으로 휨과 비틀림 진동이 연계(couple) 되어 있으며, 2축

1) 세종대학교 건축공학과 박사과정

2) 정희원, 세종대학교 건축공학과/건설기술연구소 조교수

* 본 연구는 2000년도 한국과학기술부의 국가지정연구실 사업에 의하여 지원되었음. (2000-N-NL-01-C-162)

본 논문에 대한 토의를 2002년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

대칭 단면이라도 그 재료의 비등방성으로 인해 휨과 비틀림 진동이 연계되어 있다. 이러한 복합재료 보에 대한 박벽 복합재의 동적 거동을 설명하기 위해서 일부 연구가 수행되었는데 Bauld와 Tzeng⁽⁸⁾는 박벽 복합재 보의 좌굴방정식을 유도하기 위해 화이버가 대칭으로 적층된 보에 대해 Vlasov⁽⁹⁾의 박벽 보 이론을 확장 적용하였다. Song과 Librescu⁽¹⁰⁾는 적층된 박벽 복합재 보의 자유 진동 거동을 예측하기 위한 해석 모델을 제시하였다. 그들은 화이버 방향에 따른 박스형 복합재 단면 보의 고유 진동수와 모드 형상을 연구하였다.

본 연구에서는 Lee와 Kim⁽¹¹⁾에 의해 개발된 해석 모델을 일축대칭 단면을 지닌 박벽 복합재 보의 동적 거동에까지 확대하였다. 본 모델은 임의의 적층 상태의 구성 즉, 대칭뿐만 아니라 비대칭의 적층 상태, 그리고 다양한 경계조건에 따른 휨과 비틀림 형상의 연계를 설명하였다. 박벽 복합재 보의 고유 진동수와 그에 대응하는 진동 모드를 예측하기 위해 일차원 유한 요소 모델이 개발되었다. 운동방정식은 해밀턴의 원리(Hamilton's Principle)로부터 유도되었으며, 수치 해석 결과로부터 박벽 복합재 보의 진동수와 모드 형상에 대한 적층각, 계수비, 그리고 경계조건의 영향을 얻을 수 있었다.

2. 변위장 및 변형률

본 연구의 이론전개에서는 그림 1에서 보는 바와 같이 3종류의 좌표계가 사용되고 있으며, 이 좌표들은 서로 연관되어 있다. 첫째, 기둥의 단면이 x 축과 y 축으로 이루어져 있으며 z 축이 기둥의 길이 방향인 직교 카테시안 좌표계(orthogonal Cartesian coordinate system), 즉 (x, y, z) 이다. 둘째 좌표계는 평판의 국부좌표(local plate coordinate)로서, (n, s, z) 로 구성되어 있는 외형좌표계(contour coordinates)이다. 여기서 n 축은 평판요소로부터 직각방향이며, s 축은 단면의 등고선 상을 따라 형성되는 좌표이다. 셋째 좌표계는 원점 O로부터 일정거리 떨어진 임의의 점에서의 접선방향 좌표이다. 또한 P 점은 비틀림 중심을 나타낸다. 본 연구에서는 아래와 같은 기본가정이 사용되었다.

- 1) 박벽의 외형은 자신의 면에 대해 변형하지 않는다.
- 2) 중립면에 발생하는 전단변형률 $\bar{\gamma}_{xz}$ 은 모든 요소에 있어 0이다.
- 3) 고전판이론의 Kirchhoff-Love 가정은 전 단면에 유효하다.

기본가정 1에 의하면 등고 좌표계상의 임의의 점 A에서 중

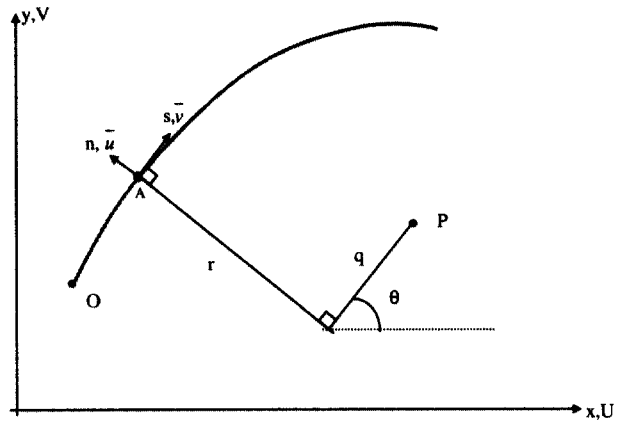


그림 1. 보와 박벽요소의 좌표계

립면에 발생하는 변위장 u, v 는 P 점에서의 x, y 방향의 변위장 U, V 와 P 점에 대한 회전각 ϕ 에 관해 식 (1a)와 식(1b)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{v}(s, z) = U(z) \cos \theta(s) + V(z) \sin \theta(s) + \phi(z)r(s) \quad (1a)$$

$$\bar{u}(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \phi(z)q(s) \quad (1b)$$

윗 식은 전체 외형에 대해 유효하며, z 방향의 변위 w 는 기본가정 2로부터 아래와 같이 유도된다.

$$\bar{w}(s, z) = W(z) - U'(z)x(s) - V'(z)y(s) - \phi'(z)\omega(s) \quad (2)$$

윗 식에서 z 방향에 대한 편미분을 ($'$)로 나타내었으며, W 는 기둥의 z 방향에 대한 평균 변위를 나타낸다. 또한 ω 는 뒤틀림함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\omega(s) = \int r(s) ds \quad (3)$$

단면상의 임의의 점에서의 변위성분 u, v, w 는 기본가정 3에 의해 중립면의 변위에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(s, z, n) = \bar{u}(s, z) \quad (4a)$$

$$v(s, z, n) = \bar{v}(s, z) - n \frac{\partial \bar{u}(s, z)}{\partial s} \quad (4b)$$

$$w(s, z, n) = \bar{w}(s, z) - n \frac{\partial \bar{u}(s, z)}{\partial z} \quad (4c)$$

위의 변위장과 기본가정 2에 근거한 변형률은 아래와 같다.

$$\epsilon_s = \bar{\epsilon}_s + n \bar{x}_s \quad (5a)$$

$$\epsilon_z = \bar{\epsilon}_z + n \bar{x}_z \quad (5b)$$

$$\gamma_{sz} = n \bar{x}_{sz} \quad (5c)$$

여기서,

$$\bar{\epsilon}_s = \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \quad (6a)$$

$$\bar{\epsilon}_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (6b)$$

$$\bar{x}_s = -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} \quad (6c)$$

$$\bar{x}_z = -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (6d)$$

$$\bar{x}_{sz} = -2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s \partial z} \quad (6e)$$

그 외 변형률은 모두 0이 된다. 식(6a)와 식(6c)에서 $\bar{\epsilon}_s$ 와 \bar{x}_s 는 가정에 의해 0 이된다. 또한, $\bar{\epsilon}_z, \bar{x}_z, \bar{x}_{sz}$ 는 각각 단면의 중심면의 축 변형률과 판의 2축 휨을 나타낸다. 위의 판 변형률은 기둥의 변형률에 대해 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\epsilon}_z = \epsilon_z' + x x_y + y x_x + w x_w \quad (7a)$$

$$\bar{x}_z = x_y \sin \theta - x_x \cos \theta - x_w q \quad (7b)$$

$$\bar{x}_{sz} = x_{sz} \quad (7c)$$

여기서,

$$\epsilon_z' = W' \quad (8a)$$

$$x_x = -V'' \quad (8b)$$

$$x_y = -U'' \quad (8c)$$

$$x_w = -\Phi'' \quad (8d)$$

$$x_{sz} = 2\Phi' \quad (8e)$$

따라서 최종적인 변형률은 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon_z = \epsilon_z' + (x + n \sin \theta) x_y + (y - n \cos \theta) x_x + (w - nq) x_w \quad (9a)$$

$$\gamma_{sz} = n x_{sz} \quad (9b)$$

3. 변분의 원리

외력이 작용하지 않는 구조체의 전체 포텐셜 에너지(total potential energy)는 다음과 같다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_z \epsilon_z + \sigma_{zs} \gamma_{zs}) dv \quad (10)$$

전체 포텐셜 에너지의 변분값은 식(10)에 식(9)을 대입, 정리하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_v \{ \sigma_z [\delta \epsilon_z' + (x + n \sin \theta) \delta x_y + (y - n \cos \theta) \delta x_x + (w - nq) \delta x_w + \sigma_{zs} n \delta x_{sz}] dv \\ &= \int_0^l \{ N_z \delta \epsilon_z' + M_y \delta k_y + M_x \delta k_x + M_w \delta k_w + M_t \delta k_{sz} \} dz \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 N_z, M_x, M_y 와 M_w 는 도심에 대해 각각 축력, x와 y 방향의 휨 모멘트, 뒤틀림 모멘트로서 단면의 단면적 A에 관하여 적분함으로써 정의된다.

$$N_z = \int_A \sigma_z dsdn \quad (12a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z (x + n \sin \theta) dsdn \quad (12b)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z (y - n \cos \theta) dsdn \quad (12c)$$

$$M_w = \int_A \sigma_z (w - nq) dsdn \quad (12d)$$

$$M_t = \int_A \sigma_{zs} n dsdn \quad (12e)$$

구조체의 운동 에너지(kinetic energy)는 다음과 같이 보의 밀도 ρ 와 변위에 관해 나타난다.

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_v \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dv \quad (13)$$

운동 에너지의 변분값은 식(13)에 가정된 변위장 식(1), (2), (4)를 대입하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \Gamma &= \int_v \rho \{ U \delta \dot{U} + V \delta \dot{V} + W \delta \dot{W} + (q^2 + r^2 - 2rn + n^2) \dot{\Phi} \delta \dot{\Phi} \\ &\quad + (\dot{\Phi} \delta \dot{U} + \dot{U} \delta \dot{\Phi}) [n \cos \theta - (y - y_p)] + (\dot{\Phi} \delta \dot{V} + \dot{V} \delta \dot{\Phi}) [n \cos \theta + (x - x_p)] \} dv \end{aligned} \quad (14)$$

위 식에서 그림 1에서 보는 바와 같이 아래와 같은 기하학적 관계가 성립한다.

$$x - x_p = q \cos \theta + r \sin \theta \quad (15a)$$

$$y - y_p = q \sin \theta - r \cos \theta \quad (15b)$$

운동 방정식을 유도하기 위해서는 해밀턴 원리를 사용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Gamma - \Pi) dt = 0 \quad (16)$$

식(16)에 식(11)과 식(14)를 대입하여, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \{ m_o \dot{W} \delta W \\ & + [m_o \dot{U} + (m_c + m_o y_p) \dot{\Phi}] \delta U \\ & + [m_o \dot{V} + (m_s - m_o x_p) \dot{\Phi}] \delta V \\ & + [(m_c + m_o y_p) \dot{U} + (m_s - m_o x_p) \dot{V} \\ & + (m_p + m_2 - 2m_w) \dot{\Phi}] \delta \Phi \\ & - N_z \delta W + M_y \delta U' \\ & + M_x \delta V' + M_w \delta \Phi' \\ & - 2 M_t \delta \Phi' \} dz dt \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)에서 $m_o, m_c, m_s, m_w, m_p, m_2$ 는 관성 계수로서 각각 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$m_o = I_o \int_s ds \quad (18a)$$

$$m_c = I_1 \int_s \cos \theta ds \quad (18b)$$

$$m_s = I_1 \int_s \sin \theta ds \quad (18c)$$

$$m_w = I_1 \int_s r ds \quad (18d)$$

$$m_p = I_o \int_s (q^2 + r^2) ds \quad (18e)$$

$$m_2 = I_2 \int_s ds \quad (18f)$$

여기서,

$$(I_o, I_1, I_2) = \int_n \rho (1, n, n^2) dn \quad (19)$$

4. 구성 방정식

적층판의 k 번째 층의 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_{sz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

여기서 \bar{Q}_{ij} 는 축소된 변형강성(transformed reduced stiffness)이다.⁽¹³⁾ 수직(normal) 응력 σ_x 는 연계 강성 \bar{Q}_{16} 에 의해서 전단 변형률 γ_{sz} 로 일반화할 수 있다. 식(12a)에 식(20)과 식(9)를 대입하여 정리하면 축력 N_z 는 일반화된 변형률 ($\epsilon_z^o, x_y, x_x, x_w, x_{sz}$)에 대해 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_z = & \int_A \{ \bar{Q}_{11} [\epsilon_z + (x + n \sin \theta) k_y \\ & + (y - n \cos \theta) k_x + (w - nq) k_w \\ & + \bar{Q}_{16} n k_{sz}] \} \end{aligned} \quad (21)$$

마찬가지로 그 외의 모멘트들(M_y, M_x, M_w, M_t)도 일반화된 변형률에 관한 식으로 표현할 수 있다. 따라서 적층된 박벽 복합재료의 구성 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ M_w \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} \\ & & & E_{44} & E_{45} \\ & & & & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ k_y \\ k_x \\ k_w \\ k_{sz} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

sym.

여기서 E_{ij} 는 박벽 복합재 보의 강성을 나타내며 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$E_{11} = \int_s A_{11} ds \quad (23a)$$

$$E_{12} = \int_s (A_{11} x + B_{11} \sin \theta) ds \quad (23b)$$

$$E_{13} = \int_s (A_{11} y - B_{11} \cos \theta) ds \quad (23c)$$

$$E_{14} = \int_s (A_{11} w - B_{11} q) ds \quad (23d)$$

$$E_{15} = \int_s B_{16} ds \quad (23e)$$

$$\begin{aligned} E_{22} = & \int_s (A_{11} x^2 + 2B_{11} x \sin \theta \\ & + D_{11} \sin^2 \theta) ds \end{aligned} \quad (23f)$$

$$E_{23} = \int_s (A_{11}xy + B_{11}(y\sin\theta - x\cos\theta) - D_{11}\sin\theta\cos\theta) ds \quad (23g)$$

$$E_{24} = \int_s (A_{11}xw + B_{11}(w\sin\theta - qx) - D_{11}q\sin\theta) ds \quad (23h)$$

$$E_{25} = \int_s (B_{16}x + D_{16}\sin\theta) ds \quad (23i)$$

$$E_{33} = \int_s (A_{11}y^2 - 2B_{11}y\cos\theta + D_{11}\cos^2\theta) ds \quad (23j)$$

$$E_{34} = \int_s (A_{11}yw - B_{11}(w\cos\theta + qy) + D_{11}q\cos\theta) ds \quad (23k)$$

$$E_{35} = \int_s (B_{16}y - D_{16}\cos\theta) ds \quad (23l)$$

$$E_{44} = \int_s (A_{11}w^2 - 2B_{11}wq + D_{11}q^2) ds \quad (23m)$$

$$E_{45} = \int_s (B_{16}w - D_{16}q) ds \quad (23n)$$

$$E_{55} = \int_s D_{66} ds \quad (23o)$$

$$E_{33} = [A_{11}^a y_a^2 - 2B_{11}^a y_a + D_{11}^a] b_a + \frac{1}{12} A_{11}^3 b_3^3 \quad (25j)$$

$$E_{34} = 0 \quad (25k)$$

$$E_{35} = B_{16}^a b_a y_a - D_{16}^a b_a \quad (25l)$$

$$E_{44} = A_{11}^a b_a y_a^2 [(x_a - x_p - b_a)^2 + \frac{b_a^2}{12}] - 2B_{11}^a b_a y_a [(x_a - x_p)(x_a - x_p - b_a) - \frac{b_a^2}{12}] + D_{11}^a b_a [(x_a - x_p)^2 + \frac{b_a^2}{12}] \quad (25m)$$

$$E_{45} = B_{16}^a b_a y_a (x_a - x_p - b_a) - D_{16}^a b_a (x_a - x_p) \quad (25n)$$

$$E_{55} = D_{66}^{(k)} b_k \quad (25o)$$

위 식에서 반복된 지수는 합계를 나타내는데 지수 κ 는 1에서 3까지, a 는 1에서 2까지 변화한다.

위 식들에서 A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} 은 각각 축방향, 연계와 휨강성 행렬을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int \bar{Q}_{ij}(1, n, n^2) dn \quad (24)$$

적층 강성 E_{ij} 는 복합재 보의 단면에 의존하며, 일축 대칭 단면에 대해 다음과 같이 구체적으로 표현된다.

$$E_{11} = A_{11}^k b_k \quad (25a)$$

$$E_{12} = 0 \quad (25b)$$

$$E_{13} = A_{11}^a b_a y_a - B_{11}^a b_a \quad (25c)$$

$$E_{14} = A_{11}^a b_a y_a (x_a - x_p - b_a) - B_{11}^a b_a (x_a - x_p) \quad (25d)$$

$$E_{15} = B_{16}^k b_k \quad (25e)$$

$$E_{22} = A_{11}^a \frac{b_a^3}{12} + A_{11}^k b_k x_k^2 + (B_{11}^3 x_3 + D_{11}^3) b_3 \quad (25f)$$

$$E_{23} = A_{11}^a b_a x_a y_a - B_{11}^a b_a x_a \quad (25g)$$

$$E_{24} = A_{11}^a b_a y_a [x_a (x_a - x_p - b_a) - \frac{b_a^2}{12}] - B_{11}^a b_a [x_a (x_a - x_p) + \frac{b_a^2}{12}] \quad (25h)$$

$$E_{25} = B_{16}^k b_k x_k + D_{16}^3 b_3 \quad (25i)$$

그림 2. 박벽 복합재의 형상

그림 2에서 보여주는 것과 같이 상부와 하부 플랜지(1,2)와 웨브(3)를 나타내고 있다.

마찬가지로 일축 대칭 단면에 대한 관성 계수는 다음과 같이 구체적으로 주어진다.

$$m_o = I_o^k b_k \quad (26a)$$

$$m_p = I_o^a b_a [(x_a - x_p)^2 + y_a^2 + \frac{b_a^2}{12}] + I_o^3 b_3 [(x_3 - x_p)^2 + \frac{b_3^2}{12}] \quad (26b)$$

$$m_c = I_1^a b_a \quad (26c)$$

$$m_s = I_1^3 b_3 \quad (26d)$$

$$m_w = I_1^a b_a y_a + I_1^b b_b (x_3 - x_p) \quad (26e)$$

$$m_2 = I_2^k b_k \quad (26f)$$

5. 운동 방정식

본 연구의 운동 방정식은 계수 δ_u , δ_v , δ_w 와 δ_ϕ 를 조합하여 이것에 대해 부분 적분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$N_z = m_o \ddot{W} \quad (27a)$$

$$M'_y = m_o \ddot{U} + (m_c + m_o y_p) \ddot{\phi} \quad (27b)$$

$$M'_x = m_o \ddot{V} + (m_s - m_o x_p) \ddot{\phi} \quad (27c)$$

$$M'_w + 2 M'_t = (m_c + m_o y_p) \ddot{U} + (m_s - m_o x_p) \ddot{V} + (m_p + m_2 - 2 m_w) \ddot{\phi} \quad (27d)$$

또한 경계 조건은 아래와 같이 주어진다.

$$\delta W : N_z \quad (28a)$$

$$\delta U : M'_y \quad (28b)$$

$$\delta U : M'_x \quad (28c)$$

$$\delta V : M'_x \quad (28d)$$

$$\delta V : M'_x \quad (28e)$$

$$\delta \phi : M'_w + 2 M'_t \quad (28f)$$

$$\delta \phi : M'_w \quad (28g)$$

위 식은 적층된 박벽 C형 단면 복합재의 휨-비틀림 진동에 대한 일반적인 형식이며, 종속 변수 u , v , w 와 ϕ 는 완전 연계됨을 알 수 있다. 웨브의 적층 형태가 대칭이면 $E_{12} = E_{34} = 0$ 이고, 박벽 복합재의 적층 형태가 z축에 대해 대칭이면 $E_{13} = E_{15} = E_{24} = 0$ 이다. 또한, 웨브와 플랜지 모두 균형(balanced)으로 적층($\pm\theta$) 되어 있다면, $A^k_{i6} = D^k_{i6} = 0$ 이고, $E_{25} = E_{35} = E_{45} = 0$ 이다. 따라서, 식 (27a)은 비연계된 미분 방정식 형태로 아래와 같이 단순화할 수 있다.

$$(EA)_{com} W' = m_o \ddot{W} \quad (29a)$$

$$-(EI_y)_{com} U^{iv} = m_o \ddot{U} \quad (29b)$$

$$-(EI_x)_{com} V^{iv} = m_o (\ddot{V} - x_p \ddot{\phi}) \quad (29c)$$

$$-(EI_w)_{com} \phi^{iv} + (GJ)_{com} \phi'' = -m_o x_p \ddot{V} + (m_p + m_2) \ddot{\phi} \quad (29d)$$

위 식에서 $(EA)_{com}$ 은 복합재 보의 축강성, $(EI_x)_{com}$ 와 $(EI_y)_{com}$ 은 x와 y 방향에 대한 휨강성, $(EI_w)_{com}$ 와 $(GJ)_{com}$ 은 뒤틀림 강성과 비틀림 강성을 각각 나타내며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(EA)_{com} = E_{11} \quad (30a)$$

$$(EI_y)_{com} = E_{22} \quad (30b)$$

$$(EI_x)_{com} = E_{33} \quad (30c)$$

$$(EI_w)_{com} = E_{44} \quad (30d)$$

$$(GJ)_{com} = 4E_{55} \quad (30e)$$

이에 대한 고유 진동수는 단순지지 경계 조건에 대해 다음과 같은 정해로 주어진다.⁽¹⁾

$$w_{zn} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{(EA)_{com}}{m_o}} \quad (31a)$$

$$w_{xn} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{(EI_y)_{com}}{m_o}} \quad (31b)$$

$$w_{ca_n} = \sqrt{\frac{(w_{yn}^2 + w_{on}^2) - \sqrt{(w_{yn}^2 - w_{on}^2)^2 + 4\lambda w_{yn}^2 w_{on}^2}}{2(1-\lambda)}} \quad (31c)$$

$$w_{cb_n} = \sqrt{\frac{(w_{yn}^2 + w_{on}^2) + \sqrt{(w_{yn}^2 - w_{on}^2)^2 + 4\lambda w_{yn}^2 w_{on}^2}}{2(1-\lambda)}} \quad (31d)$$

여기서 w_{zn} 과 w_{xn} 은 x 방향의 축 진동수와 휨 진동수이며, w_{ca_n} 와 w_{cb_n} 은 휨-비틀림 연계 진동수이다. 식(31)에서 w_{yn} , w_{on} 와 λ 는 아래와 같이 주어진다.

$$w_{yn} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{(EI_x)_{com}}{m_o}} \quad (32a)$$

$$w_{on} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{1}{(m_2 + m_p)} \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} (EI_w)_{com} + (GJ)_{com} \right)} \quad (32b)$$

$$\lambda = \frac{x_p^2 m_o}{(m_2 + m_p)} \quad (32c)$$

6. 유한 요소 모델

앞 절에 개발된 운동 방정식으로 유한 요소법에 의해 모델화할 수 있다. 일반화된 변위는 일차원 라그랑지안(Lagrange) 보간 함수 ψ_j 의 선형 조합과 절점 j 와 연관된 허미트(Hermite) 3차 보간 함수 ϕ_j 로 각 요소로 표현할 수 있다.

며 절점의 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \sum_{j=1}^n w_j \Psi_j \quad (33a)$$

$$U = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (33b)$$

$$V = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j \quad (33c)$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \psi_j \quad (33d)$$

위 식을 식(17)에 대입하면, 전형적인 요소의 유한 요소 모델은 표준 고유치 문제로 표현될 수 있다.

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (34)$$

여기서 $[K]$ 는 요소 강성 매트릭스(stiffness matrix)이다.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ sym. & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (35)$$

그리고, $[M]$ 은 요소 질량 매트릭스(mass matrix)이다.

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ & & M_{33} & M_{34} \\ sym. & & & M_{44} \end{bmatrix} \quad (36)$$

구체적인 $[K]$ 와 $[M]$ 의 형식은 다음과 같이 주어진다.

$$K_{ij}^{11} = \int_0^l E_{11} \Psi_i \Psi_j dz \quad (37a)$$

$$K_{ij}^{12} = - \int_0^l E_{12} \Psi_i \psi_j'' dz \quad (37b)$$

$$K_{ij}^{13} = - \int_0^l E_{13} \Psi_i \psi_j'' dz \quad (37c)$$

$$K_{ij}^{14} = \int_0^l (2E_{15} \Psi_i \psi_j' - E_{14} \Psi_i \psi_j'') dz \quad (37d)$$

$$K_{ij}^{22} = \int_0^l E_{22} \phi_i'' \phi_j'' dz \quad (37e)$$

$$K_{ij}^{23} = \int_0^l E_{23} \phi_i'' \phi_j'' dz \quad (37f)$$

$$K_{ij}^{24} = \int_0^l (E_{24} \phi_i'' \phi_j'' - 2E_{25} \phi_i'' \phi_j') dz \quad (37g)$$

$$K_{ij}^{33} = \int_0^l E_{33} \phi_i'' \phi_j'' dz \quad (37h)$$

$$K_{ij}^{34} = \int_0^l (E_{34} \phi_i'' \phi_j'' - 2E_{35} \phi_i'' \phi_j') dz \quad (37i)$$

$$K_{ij}^{44} = \int_0^l (E_{44} \phi_i'' \phi_j'' - 2E_{45} (\phi_i' \phi_j'' + \phi_i'' \phi_j') + 4E_{55} \phi_i' \phi_j') dz \quad (37j)$$

$$M_{ij}^{11} = M_{ij}^{22} = M_{ij}^{33} = \int_0^l m_o \Psi_i \Psi_j dz \quad (38a)$$

$$M_{ij}^{34} = - \int_0^l m_o x_p \phi_i \phi_j dz \quad (38b)$$

$$M_{ij}^{44} = \int_0^l (m_p + m_2) \phi_i \phi_j dz \quad (38c)$$

그 외의 다른 성분들은 0이다.

식(34)에서 $\{\Delta\}$ 는 고유치에서 절점의 변위에 부합되는 고유 벡터(eigenvector)이고, ω 는 고유 진동수이다.

$$\{\Delta\} = \{W \ U \ V \ \Phi\}^T \quad (39)$$

7. 수치해석 예제

길이 $l = 8m$ 와 C형 단면을 지닌 박벽 복합재 보의 예제는 적층각, 계수비, 두께에 대한 높이의 비와 고유 진동수에 대한 경계 조건, 모드 형상의 영향을 조사하기 위해 고려된 예제이다. C형강 단면의 형상은 그림 3과 같고, 재료의 물성치는 아래와 같이 사용하였다.

$$E_1/E_2 = 40, \quad G_{12}/E_2 = 0.6, \quad \nu_{12} = 0.25$$

그림 3. C형 단면의 박벽 복합 보

여기서 아래 첨자 1과 2는 각각 화이어 방향과 화이어 방향의 직각 방향을 나타낸다. 편의상, 무차원 고유 진동수를 다음과 같이 사용한다.

$$\bar{w} = \frac{wl^2}{b_3} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (40)$$

유한 요소 모델은 8개의 요소로 나뉜다. 수렴 테스트로부터 유한 요소 매쉬는 충분히 정확한 결과를 볼 수 있다.

첫 번째 예제는 상부와 하부 플랜지가 2개의 적층으로 이루어진 앵글-플라이($\theta/-\theta$)로, 웨브는 한 방향으로만 적층된 것으로 가정하였다. 추가로, 보의 적층 형태는 x 축에 대해 대칭이다. 연계 강성 E_{12} , E_{13} , E_{15} , E_{24} 와 E_{25} 은 이전 장에서 보여 주었듯이 0이다. 그러나, E_{35} 와 E_{45} 은 각 플랜지의 비대칭적인 적층 형태로 인해 사라지지는 않는다. 유한 요소 해석과 직교성 정해(orthotropic closed-form solutions)로 얻은 4개의 저주파 무차원 고유 진동수에서는 식(31)로부터 E_{35} 와 E_{45} 의 연계 효과는 무시된다. 각 모드에 대한 무차원 고유 진동수는 표 1과 같이 주어진다. 적층각이 한 방향으로만 되어 있을 때 유한 요소 해석에 따른 4개 저주파의 고유 진동수는 각각 x 방향에서의 첫 번째 휨 모드

와 직교성 정해에 의한 연계된 휨-비틀림 모드와 정확하게 일치한다. 그러나, 적층각이 변할 때, 이 순서는 표 1에서 보여 주듯이 서로 변하고 유한 요소 해석과 직교성 정해에 의해서 근소하게 일치하지 않는 것을 볼 수 있다. 이것은 연계 강성 E_{35} 와 E_{45} 이 직교성 정해에서 무시되었기 때문이다.

연계 효과를 연구하기 위해 상부 플랜지가 2개의 적층으로 이루어진 앵글-플라이(θ/θ)인 반면 하부 플랜지와 웨브는 한 방향으로만 적층된 것으로 고려했다. 이 경우, 박벽 복합재 보는 x 축에 대해 비대칭이다. 적층각이 변할 때, 유한 요소 해석과 직교성 정해에 의한 결과가 표 2에서 볼 수 있듯이 더 이상 일치하지 않는 것을 알 수 있으며, 이 경우는 연계 강성 효과가 더 이상 무시될 정도로 작지 않다는 것을 의미한다. 적층각이 한 방향으로만 되어 있을 경우와 상·하부 플랜지의 적층각이 30° 일 경우, 상부 플랜지만 적층각이 30° 일 경우의 1차에서 4 차까지의 진동수에 대한 모드 형상을 그림 4, 5와 6으로 나타내었다. 적층각이 한 방향으로만 되어 있는 보일 때, 진동 모드 3은 y 축에 대해 비대칭 형상으로 인해 이중 연계(y 방향에서의 휨 모드와 비틀림 모드)를 나타내고 있다. 또한, 상·하부 플랜지의 적층각이 30° 로 되어 있는 보(그림 5) 역시 이중 연계가 발생되나, 연계 강성 E_{35} 와 E_{45} 로 인한 추가적인 재료적 연계 형상에 의해 모드 형상이

표 1. 상·하부 플랜지의 적층각 변화에 따른 무차원 고유 진동수

적층각	유한요소법(FEM)				직교성 정해(closed-form)			
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_{x_1}	w_{ca_1}	w_{cb_1}	w_{ca_2}
0	9.1980	10.1013	32.0759	32.4928	10.1011	9.1979	32.0754	32.4852
15	9.6385	9.9968	29.2209	33.9439	9.6384	11.3330	30.4457	34.5009
30	8.2790	11.6153	24.6778	33.1240	8.2789	14.3522	26.2672	38.0324
45	6.1494	12.9227	19.8184	24.6035	6.1493	15.1082	21.3934	39.1012
60	3.7623	13.1732	15.0528	15.9201	3.7622	13.8879	16.8492	34.4212
75	2.3019	9.2099	10.5860	13.3914	2.3019	10.7203	13.3997	23.0225
90	2.0970	6.4561	8.3900	13.2443	2.0970	6.4560	13.2441	14.9332

표 2. 상부 플랜지의 적층각 변화에 따른 무차원 고유 진동수

적층각	유한요소법(FEM)				직교성 정해(closed-form)			
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_{x_1}	w_{ca_1}	w_{cb_1}	w_{ca_2}
0	9.1980	10.1013	32.0759	32.4928	10.1011	9.1979	32.0754	32.4852
15	9.5818	9.8935	30.6628	33.0856	9.8758	10.3347	31.2638	33.5052
30	9.0498	10.5261	28.3476	35.3563	9.2871	12.2010	29.1952	35.3055
45	7.8753	11.0850	25.9749	28.1710	8.5890	12.9389	26.7173	35.6546
60	6.6263	11.0094	21.0535	24.3378	8.0985	11.9987	24.6684	33.4528
75	5.5654	10.0150	14.5489	22.9962	7.9268	9.7543	23.5649	29.7831
90	4.7627	9.1209	11.7884	22.1164	7.9097	8.3034	23.2819	27.8505

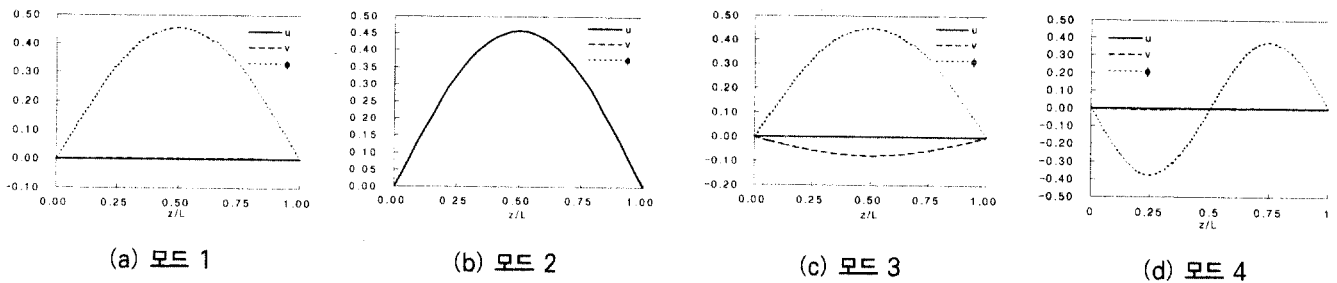


그림 4. 복합재의 적층각 일방향에 따른 모드 형상

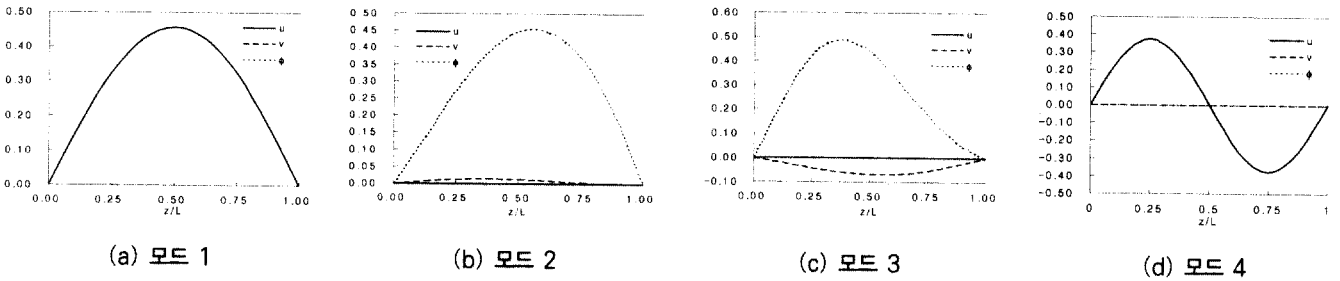


그림 5. 복합재의 상·하부 플랜지의 적층각 30° 에 따른 모드 형상

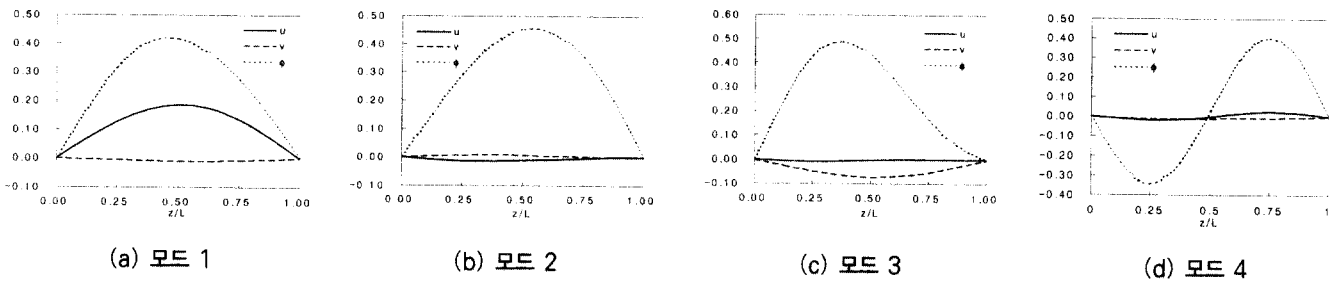


그림 6. 복합재의 상부 플랜지의 적층각 30° 에 따른 모드 형상

비대칭으로 나타난다. 상부 플랜지만 적층각이 30° 로 되어 있는 보인 경우(그림 6), 모드 형상이 3중 연계 진동(x와 y 방향에 대한 휨 모드와 비틀림 모드)임을 알 수 있다. 사실상, 연계 강성 E_{25} 는 사라지지만 그 외의 연계 강성은 전체적인 비대칭 형태로 인해 사라지지 않는다. 즉, 직교성 정해는 비대칭 적층된 보에 있어서 상당한 오차를 보이며, 3중 연계된 휨-비틀림 진동은 오히려 단일 대칭 단면으로 고려해야 한다.

8. 결론

본 연구의 분석 모델은 C형 단면을 가진 적층된 복합재 보의 휨-비틀림 진동해석에 대해 연구 개발되었으며, 경계 조건, 적층 방향을 포함한 다양한 형태에 대해 진동 모드 형상 뿐만 아니라 정확한 고유 진동수를 예측 가능하였다. 본 이론을 수식화하기 위해서 일차원 변위를 기반으로 한 유한 요소법을 사용하였다. 휨-비틀림 모드가 포함된 가능한 모든 진동 모드와 완전 연계된 휨-비틀림 모드를 해석하였다. 제시된

모델은 적층된 박벽 복합재 보의 자유 진동 문제를 해석하는데 있어 적절하고 효율적임을 알 수 있다.

참고 문헌

1. Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W., 1974, Vibration problems in engineering, 4th edition, John Wiley and Sons, N. Y.
2. Weaver, W. and Johnston, P. R., 1987, Structural dynamics by finite elements, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
3. Roberts, T. M., 1987, "Natural frequencies of thin-walled bars of open cross section", Journal of Structural Engineering, Vol.113, No.10, pp. 1584-1593.
4. Wekezer, J. W., 1989, "Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections", Journal of Structural Engineering, Vol.115, No.12, pp.2965-2978.

5. Wekezer, J. W., 1987, "Free vibrational of thin-walled bars with open cross sections", *Journal of Structural Engineering*, Vol.113, No.10, pp. 1441-1453.
6. McGee, O. G., Owings, M. I. and Harris, J. W., 1993, "Torsional vibration of pretwisted thin-walled cantilevered I-beams", *Computers and Structures*, Vol.47, No.1, pp.47-56.
7. Ohga, M., Takao, H and Hara, T., 1995, "Natural frequencies and mode shapes of thin-walled members", *Computers and Structures*, Vol.55, No.6, pp.971-978.
8. Bauld, N. R. and Tzeng, L. S., 1984, "A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross section", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.20, No.3, pp. 277-297.
9. Vlasov, V. Z., 1961, *Thin-walled elastic beams*, 2nd edition, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, Israel.
10. Song, O. and Librescu, L., 1993, "Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.167, No.1, pp.129-147.
11. Lee, J. and Kim, S., 2001, "Flexural-torsional buckling of thin walled I-section composites", *Computers and Structures*, Vol.79, No.10, pp. 987-995.
12. Gjelsvik, A., 1981 *The theory of thin-walled bars*, John Wiley and Sons Inc., New York.
13. Jones, R. M., 1975, *Mechanics of Composite Materials*, Hemisphere Publishing Corporation.

(접수일자 : 2001년 10월 11일)