

# 개선된 고차이론을 이용한 복합재료 적층구조물의 탄성 및 점탄성적 휨, 진동해석

## Bending and Vibration Analysis of Elastic and Viscoelastic Laminated Composite Structures using an Improved Higher-order Theory

한 성 천<sup>1)</sup> · 유 용 민<sup>2)</sup> · 박 대 용<sup>3)</sup> · 장 석 윤<sup>4)</sup>  
*Han, Sung Cheon Yoo, Yong Min Park, Dae Yong Chang, Suk Yoon*

**요 약** : 복합재료 적층판의 보다 정확한 해석결과를 얻기 위해서는 종방향 전단변형, 종방향 수직 변형율/응력에 의한 효과와 두께방향 좌표에 관한 면내변위의 비선형 변화등이 고려되어야 한다. 본 연구에서는 개선된 고차이론을 이용하여 복합재료 적층구조물의 처짐 및 고유진동수를 구한다. 점탄성 해석을 위하여 Quasi-elastic 방법을 사용하였다. 단순지지된 복합재료 적층판 및 샌드위치의 해석결과들은 3차원 탄성해석결과와 다른 이론들에 의한 결과와 비교하였다. 본 연구의 해석결과가 다른 이론들보다 좀 더 정확한 결과를 나타내었다.

**ABSTRACT** : To obtain more accurate responses of laminated composite structures, the effect of transverse shear deformation, transverse normal strain/stress and a nonlinear variation of in-plane displacements with respect to the thickness coordinate need to be considered in the analysis. The improved higher-order theory is used to determine the deflections and natural frequencies of laminated composite structures. A quasi-elastic method is used for the solution of viscoelastic analysis of the laminated composite plates and sandwiches. Solutions of simply-supported laminated composite plates and sandwiches are obtained and the results are compared with those by the 3D elasticity theory and other theories. The improved theory proposed in this paper is shown to predict the deflections and natural frequencies more accurately than all other theories.

**핵심용어** : 개선된 고차이론, 유사탄성법, 종방향 수직 변형, 전단변형, 점탄성 해석

**KEYWORDS** : Improved higher-order theory, Quasi-elastic method, Transverse normal deformation, Shear deformation, Viscoelastic analysis

### 1. 서론

높은 자중-강성비 때문에 섬유 보강 복합재료는 항공산업, 교통시설 및 건설산업에 널리 사용되어지고 있다. 복합재료를 효과적으로 사용하기 위해서는 사용하중 하에서 역학적 응답의 확실한 이해와 충분한 연구가 수행되어야 한다. 구조적 거동의 충분한 이해와 변형특성에 대한 정확한 지식 그리고 다양한 하중조건하에서의 처짐, 응력분포 등에 대한 정확한 이해가 필요하다고 할 수 있다. 고전적 적층판 이론<sup>(1)~(3)</sup>은

전단변형 효과를 무시하였기 때문에 적층된 복합재료의 해석에 적절치 못한 방법이다. 일반적으로 고전적 적층판 이론에서는 처짐은 작게 계산되고 진동수와 좌굴하중은 크게 계산된다. 1차 전단변형이론<sup>(5)~(7)</sup>에서는 종방향 전단응력을 두께방향 1차 변형상태로 고려하기 때문에 비현실적인 두께방향 전단변형 및 응력의 보정을 위하여 전단보정계수가 필요하게 된다. 이러한 1차 전단변형이론의 단점을 극복하기 위해 두께방향 좌표가 포함된 변위의 Talyor 전개식의 고차항이 포함된 고차 전단변형 이론이 발전되었다. Levinson<sup>(16)</sup>과 Murthy<sup>(17)</sup>

1) 정회원, 대원과학대학 토목과 조교수, 공학박사  
2) 학생회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정  
3) 학생회원, 서울시립대학교 토목공학과 석사과정  
4) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 2002년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

는 Whitney 와 Pagano<sup>(6)</sup>의 1차 전단변형이론의 평형방정식을 이용하여 종방향 수직 압축/인장을 무시한 고차이론을 제안하였다. Reddy<sup>(9),(18)</sup>는 Levinson 과 Murthy의 이론을 발전시킨 단순화된 고차전단변형이론을 제안하였고 Kant<sup>(27)~(31)</sup>는 일반화된 Hook의 법칙을 이용하여 종방향 수직 변형율/응력의 효과와 종방향 뒤틀림이 고려된 대칭 적층판의 유한요소 지배방정식을 유도하였다. 고차전단변형이론에 의한 등방성판, 직교이방성판 그리고 적층판의 진동해석이 Reddy<sup>(21)</sup>에 의해 수행되었고 Noor<sup>(26)</sup>는 등방성, 직교이방성 및 비등방성 적층복합판의 3차원탄성해석을 수행하였다.

본 연구에서는 해석적 정확해를 구하기 위하여 기존의 유한요소 해석에 사용되었던 Kant의 고차이론을 이용하였고 점탄성 해석을 위하여 Quasi-elastic 방법을 사용하였다. 본 연구 해석결과의 타당성을 규명하기 위하여 다른 여러 이론들과의 비교, 분석을 수행하였다. 적층순서, 점탄성적 효과, 형상비 및 폭 두께비 변화의 효과에 의한 수치해석 결과들을 구하였으며 이러한 결과들은 복합재료 설계자, 이론과 실험의 상호 연관성을 연구하는 연구원 그리고 프로그램의 검증에 원하는 수치해석자들을 위해 사용될 수 있을 것이다.

## 2. 기본 이론

### 2.1 변위함수

3차원 탄성문제를 2차원 판해석에 적용하기 위하여 판의 임의점에서의 변위성분  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$ 에 두께좌표가 포함된 Taylor 전개식을 확장하여 적용하였다. 3차원 탄성해석 결과는 종방향 전단응력이 판의 두께방향으로 곡선변화 한다는 것을 보여주고 있다. 따라서 두께방향 좌표의 3차항을 포함하는 면내변위의 가정이 필요하게 되었으며 또한 종방향 수직변형이 판의 두께를 따라 비선형으로 변화하게 된다. 이러한 조건들을 만족하는 변위장은 식(1)과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) + z^2\xi_x(x, y, t) + z^3\eta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) + z^2\xi_y(x, y, t) + z^3\eta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\theta_z(x, y, t) + z^2\xi_z(x, y, t) + z^3\eta_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

$u_0, v_0$  와  $w_0$ 는 중립면의 한점  $(x, y)$ 의 면내변위와 종방향 변위를 나타내며  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 는  $y$ 축과  $x$ 축에 대한 중립면의 회전각이다.

$\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z$  그리고  $\theta_z$ 는 Taylor 전개식의 고차항이다. 식(1)은 Kant에 의해 유한요소해석에 사용되었으나

본 연구에서는 해석적 정확해를 구하기 위해 Navier 방법을 이용한 휨과 진동해석을 수행하였다. 본 연구에서는 개선된 고차이론을 이용한 해석적 수식과 해석결과들을 나타내었으며 기존의 여러 이론들에 의한 해석결과들과 비교하였다. 2차원 적층판의 기하학적 형상은 그림 1에 나타내었다. 식(1)의 변위장을 탄성론의 변형율-변위 관계식에 대입하면 식(2)를 얻을 수 있다. Kant는 식(2)에서 두께방향 변형율을 두께의 3차식까지 사용하였으나 탄성론에 의한 변형율-변위 관계식을 이용한 본 연구에서는 두께의 2차식만 사용하였다.<sup>(27)~(29)</sup>

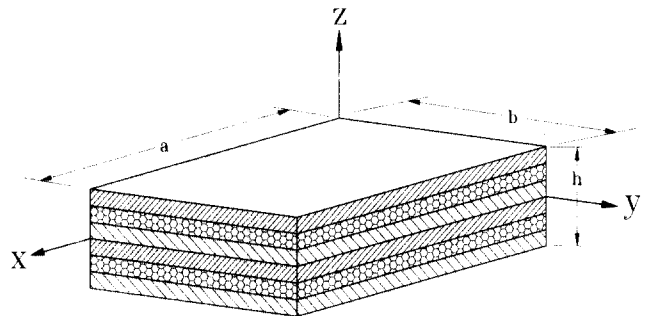


그림 1. 적층판의 기하학적 형상 및 좌표계

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{x0}^{(1)} + z k_x^{(1)} + z^2 \epsilon_{x0}^{(2)} + z^3 k_x^{(2)}, \\ \epsilon_y &= \epsilon_{y0}^{(1)} + z k_y^{(1)} + z^2 \epsilon_{y0}^{(2)} + z^3 k_y^{(2)}, \\ \epsilon_z &= \epsilon_{z0}^{(1)} + z k_z^{(1)} + z^2 \epsilon_{z0}^{(2)}, \\ \gamma_{xy} &= \epsilon_{xy0}^{(1)} + z k_{xy}^{(1)} + z^2 \epsilon_{xy0}^{(2)} + z^3 k_{xy}^{(2)}, \\ \gamma_{yz} &= \phi_y^{(1)} + z k_{yz}^{(1)} + z^2 \phi_y^{(2)} + z^3 k_{yz}^{(2)}, \\ \gamma_{xz} &= \phi_x^{(1)} + z k_{xz}^{(1)} + z^2 \phi_x^{(2)} + z^3 k_{xz}^{(2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} (\epsilon_{x0}^{(1)}, \epsilon_{y0}^{(1)}, \epsilon_{xy0}^{(1)}) &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right), \\ (\epsilon_{x0}^{(2)}, \epsilon_{y0}^{(2)}, \epsilon_{xy0}^{(2)}) &= \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial x}, \frac{\partial \xi_y}{\partial y}, \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right), \\ (\epsilon_{z0}^{(1)}, \epsilon_{z0}^{(2)}) &= (\theta_z, 3\eta_z), \\ (k_x^{(1)}, k_y^{(1)}, k_z^{(1)}, k_{xy}^{(1)}) &= \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, 2\xi_z, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \\ (k_x^{(2)}, k_y^{(2)}, k_{xy}^{(2)}) &= \left( \frac{\partial \eta_x}{\partial x}, \frac{\partial \eta_y}{\partial y}, \frac{\partial \eta_x}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y}{\partial x} \right), \\ (k_{xz}^{(1)}, k_{yz}^{(1)}) &= \left( 2\xi_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, 2\xi_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right), \\ (k_{xz}^{(2)}, k_{yz}^{(2)}) &= \left( \frac{\partial \eta_x}{\partial x}, \frac{\partial \eta_y}{\partial y} \right), \\ (\phi_x^{(1)}, \phi_x^{(2)}) &= \left( \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, 3\eta_x + \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right), \\ (\phi_y^{(1)}, \phi_y^{(2)}) &= \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, 3\eta_y + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

### 2.2 적합 조건식

적층판의 각 층은 3차원 응력형태로 가정되기 때문에 국부 좌표계에서의 L번째 층에서의 적합조건식은 식(3)과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^L = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^L \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^L \quad (3)$$

여기서  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13})$ 는 국부좌표계에서의 응력이고  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13})$ 는 국부좌표계에서의 변형율이다.  $C_{ij}$ 's는 탄성상수 또는 국부좌표계에서의 L 번째 층의 강성행렬의 요소들이다. 전체좌표계에 대한 적합조건식은 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.<sup>(38)</sup>

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^L = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix}^L \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^L \quad (4)$$

여기서  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ 는 전체좌표계에서의 응력이고  $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ 는 전체좌표계에서의 변형율이다.  $Q_{ij}$ 's는 변형된 탄성상수 또는 전체좌표계에서의 강성행렬의 요소들이다. [C] 와 [Q]의 요소들은 참고문헌(12)에 나타나 있다.

### 2.3 평형 방정식

Hamilton 이론을 적용하면 평형방정식은 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.<sup>(31)</sup>

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (U + V)] dt = 0 \quad (5)$$

여기서  $U$ 는 변형에 의한 변형에너지,  $V$ 는 외력에 의한 포텐셜 에너지,  $K$ 는 운동역학적 에너지이다. 식(5)를 응력, 변형율과 수직하중을 이용하여 표현하면 식(6)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_0^t \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right. \\ & \left. + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz - \int_A q \delta w dA \right] dt \\ & + \frac{\delta}{2} \int_0^t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \rho [(\dot{u}_o)^2 + (\dot{v}_o)^2 + (\dot{w}_o)^2] dA dz dt \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $q$ 는 판의 상면에 작용하는 수직하중이고  $\rho$ 는 재료의 비중이다. 식(1), 식(2)와 식(4)를 식(6)에 대입하고 부분적분하여 정리하면 식(7)을 얻을 수 있다.<sup>(27)~(29)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_o + I_2 \ddot{\theta}_x + I_3 \dot{\xi}_x + I_4 \ddot{\eta}_x, \\ \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial x} &= I_1 \ddot{v}_o + I_2 \ddot{\theta}_y + I_3 \dot{\xi}_y + I_4 \ddot{\eta}_y, \\ \frac{\partial Q_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{(1)}}{\partial y} + q &= I_1 \ddot{w}_o + I_2 \ddot{\theta}_z + I_3 \dot{\xi}_z + I_4 \ddot{\eta}_z, \\ \frac{\partial M_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial y} - Q_x^{(1)} &= I_2 \ddot{u}_o + I_3 \dot{\theta}_x + I_4 \dot{\xi}_x + I_5 \ddot{\eta}_x, \\ \frac{\partial M_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial x} - Q_y^{(1)} &= I_2 \ddot{v}_o + I_3 \dot{\theta}_y + I_4 \dot{\xi}_y + I_5 \ddot{\eta}_y, \\ \frac{\partial S_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial S_y^{(1)}}{\partial y} - N_x^{(1)} + \frac{h}{2}(q) &= I_2 \ddot{w}_o + I_3 \dot{\theta}_z + I_4 \dot{\xi}_z + I_5 \ddot{\eta}_z, \\ \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(2)}}{\partial y} - 2S_x^{(1)} &= I_3 \ddot{u}_o + I_4 \dot{\theta}_x + I_5 \dot{\xi}_x + I_6 \ddot{\eta}_x, \\ \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^{(2)}}{\partial x} - 2S_y^{(1)} &= I_3 \ddot{v}_o + I_4 \dot{\theta}_y + I_5 \dot{\xi}_y + I_6 \ddot{\eta}_y, \\ \frac{\partial Q_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{(2)}}{\partial y} - 2M_z^{(1)} + \frac{h^2}{4}(q) &= I_3 \ddot{w}_o + I_4 \dot{\theta}_z + I_5 \dot{\xi}_z + I_6 \ddot{\eta}_z, \\ \frac{\partial M_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(2)}}{\partial y} - 3Q_x^{(2)} &= I_4 \ddot{u}_o + I_5 \dot{\theta}_x + I_6 \dot{\xi}_x + I_7 \ddot{\eta}_x, \\ \frac{\partial M_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{(2)}}{\partial x} - 3Q_y^{(2)} &= I_4 \ddot{v}_o + I_5 \dot{\theta}_y + I_6 \dot{\xi}_y + I_7 \ddot{\eta}_y, \\ \frac{\partial S_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S_y^{(2)}}{\partial y} - 3N_z^{(2)} + \frac{h^3}{8}(q) &= I_4 \ddot{w}_o + I_5 \dot{\theta}_z + I_6 \dot{\xi}_z + I_7 \ddot{\eta}_z, \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 합응력은 식(8)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x^{(1)} & M_x^{(2)} \\ M_y^{(1)} & M_y^{(2)} \\ M_z^{(1)} & 0 \\ M_{xy}^{(1)} & M_{xy}^{(2)} \end{bmatrix} &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} [z \ z^3] dz \\ \begin{bmatrix} Q_x^{(1)} & Q_x^{(2)} \\ Q_y^{(1)} & Q_y^{(2)} \end{bmatrix} &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} [1 \ z^2] dz \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} N_x^{(1)} & N_x^{(2)} \\ N_y^{(1)} & N_y^{(2)} \\ N_z^{(1)} & N_z^{(2)} \\ N_{xy}^{(1)} & N_{xy}^{(2)} \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^M \int_{Z_L}^{Z_{L+1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} [1 \ z^2] dz$$

$$\begin{bmatrix} S_x^{(1)} & S_x^{(2)} \\ S_y^{(1)} & S_y^{(2)} \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^M \int_{Z_L}^{Z_{L+1}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} [z \ z^3] dz \quad (8)$$

그리고 식(7)의  $I$  는 식(9)와 같이 정의된다.

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (9)$$

식(8)은 식(4)와 식(2)를 이용하여 전체 변형을 관계식인 식(10), 식(11)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_x^{(1)} \\ N_y^{(1)} \\ N_x^{(2)} \\ N_y^{(2)} \\ N_z^{(1)} \\ N_z^{(2)} \\ M_x^{(1)} \\ M_y^{(1)} \\ M_x^{(2)} \\ M_y^{(2)} \\ M_z^{(1)} \\ N_{xy}^{(1)} \\ N_{xy}^{(2)} \\ M_{xy}^{(1)} \\ M_{xy}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^1]_{11 \times 11} & [A^2]_{11 \times 4} \\ \text{sym.} & [A^3]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xo}^{(1)} \\ \epsilon_{yo}^{(1)} \\ \epsilon_{xo}^{(2)} \\ \epsilon_{yo}^{(2)} \\ \epsilon_{zo}^{(1)} \\ \epsilon_{zo}^{(2)} \\ k_x^{(1)} \\ k_y^{(1)} \\ k_x^{(2)} \\ k_y^{(2)} \\ k_z^{(1)} \\ \epsilon_{xyo}^{(1)} \\ \epsilon_{xyo}^{(2)} \\ k_{xy}^{(1)} \\ k_{xy}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x^{(1)} \\ Q_x^{(2)} \\ S_x^{(1)} \\ S_x^{(2)} \\ Q_y^{(1)} \\ Q_y^{(2)} \\ S_y^{(1)} \\ S_y^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D^1]_{4 \times 4} & [D^2]_{4 \times 4} \\ \text{sym.} & [D^3]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x^{(1)} \\ \phi_x^{(2)} \\ k_{xz}^{(1)} \\ k_{xz}^{(2)} \\ \phi_y^{(1)} \\ \phi_y^{(2)} \\ k_{yz}^{(1)} \\ k_{yz}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서  $[A]$ ,  $[D]$ 는 판의 강성행렬이다.

### 3. 해석적 방법

본 연구에서는 식(7)을 이용하여 복합재료 적층판 및 샌드

위치의 정확해를 구할 것이다. 경계조건은 단순지지이며 식 (12),식(13)과 같이 가정한다.

경계  $x = 0$ ,  $x = a$

$$v_o = 0, w_o = 0, \theta_y = 0, \theta_z = 0,$$

$$M_x^{(1)} = 0, \xi_y = 0, \xi_z = 0, \eta_y = 0, \quad (12)$$

$$\eta_z = 0, M_x^{(2)} = 0, N_x^{(1)} = 0, N_x^{(2)} = 0$$

경계  $y = 0$ ,  $y = b$

$$u_o = 0, w_o = 0, \theta_x = 0, \theta_z = 0,$$

$$M_y^{(1)} = 0, \xi_x = 0, \xi_z = 0, \eta_x = 0, \quad (13)$$

$$\eta_z = 0, M_y^{(2)} = 0, N_y^{(1)} = 0, N_y^{(2)} = 0$$

Navier의 해석방법을 따라 식(12),식(13)의 경계조건을 만족하는 변위함수를 식(14)와 같이 가정한다.

$$u_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{o,mn} \Psi_1 \Psi_4,$$

$$v_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{o,mn} \Psi_2 \Psi_4,$$

$$w_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{o,mn} \Psi_3 \Psi_4,$$

$$\theta_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{x,mn} \Psi_1 \Psi_4,$$

$$\theta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{y,mn} \Psi_2 \Psi_4,$$

$$\theta_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{z,mn} \Psi_3 \Psi_4,$$

$$\xi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{x,mn} \Psi_1 \Psi_4,$$

$$\xi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{y,mn} \Psi_2 \Psi_4,$$

$$\xi_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{z,mn} \Psi_3 \Psi_4,$$

$$\eta_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{x,mn} \Psi_1 \Psi_4,$$

$$\eta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{y,mn} \Psi_2 \Psi_4, \quad (14)$$

$$\eta_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{z,mn} \Psi_3 \Psi_4,$$

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \Psi_3$$

여기서  $\Psi_1 = \cos \alpha x \sin \beta y$ ,  $\Psi_2 = \sin \alpha x \cos \beta y$ ,  
 $\Psi_3 = \sin \alpha x \sin \beta y$ ,  $\Psi_4 = e^{-i\omega t}$ ,  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$ ,  
 $\omega$  는 고유진동수이며  $q$  는 수직하중이다.

식(10-11),식(14)를 식(7)에 대입하면 식(15)와 같은 동적평형방정식을 얻을 수 있다.

$$([K] - \lambda[M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (15)$$

여기서  $\lambda = \omega^2$ ,  $[K]$ ,  $[M]$ 은 강성 및 질량행렬 그리고  $\{\Delta\} = \{u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z\}^T$ 이다. 식(15)에서 시간의 항을 무시하고 수직하중을 고려하면 식(16)과 같은 정적평형방정식을 얻을 수 있다.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (16)$$

여기서  $\{F\}$ 는 하중벡터 이다.

#### 4. 탄성 해석

##### 4.1 힘 해석

본 연구의 해석결과에 대한 타당성을 규명하기 위하여 Sin 하중을 받는 경우 Pagano 3차원 처짐해석 및 여러 이론들의 결과와 비교하여 표 1, 표 2에 나타내었다. 본 연구의 결과가 Reddy의 고차전단변형이론과 Whitney의 1차전단변형이론을 고려한 경우의 처짐값들 보다 Pagano의 3차원 해석값에 좀 더 근접되는 것을 알 수 있었다. 복합재료 적층판의 물성치는 식(17)과 같다.

표 1. 무차원 처짐( $w = w_0 E_2 t^3 10^2 / q_0 a^4$ ) (0/90/0)  
 $h_1 = h_3 = h/4, h_2 = h/2$

a/t	Pagano	본 연구	Reddy	Whitney
10	0.737	0.718	0.715	0.663
20	0.513	0.507	0.506	0.491
100	0.435	0.434	0.434	0.434

표 2. 무차원 처짐( $w = w_0 E_2 t^3 10^2 / q_0 a^4$ ) (0/90/0)  
 $h_1 = h_2 = h_3, b = 3a$

a/t	Pagano	본 연구	Reddy	Whitney
10	0.919	0.867	0.862	0.803
20	0.610	0.595	0.594	0.594
100	0.503	0.507	0.507	0.506

표 3. 무차원 처짐( $w = w_0 E_2 t^3 10^2 / q_0 a^4$ ) (0/90/0)  
 $h_1 = h_2 = h_3$

a/t	Reddy	Whitney	본 연구
2	3.0706	3.0081	3.0868
4	2.5791	2.5350	2.5906
10	1.9173	1.9049	1.9205
20	1.7509	1.7478	1.7517
50	1.7310	1.7289	1.7314
100	1.6977	1.6976	1.6976

$$E_1 = 25, E_2 = 1, G_{12} = G_{13} = 0.5, G_{23} = 0.2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, b = a \quad (17)$$

표 1에서 (0/90/0)은 적층판의 위층부터 파이버의 보강방향이 0도, 90도, 0도로 배열되었다는 것을 의미한다.

표 3에는 등분포 하중을 받는 경우에 대한 중앙점의 처짐값을 비교하였다. 등분포 하중을 받는 경우에도 본 연구의 해석결과에 비해 다른 이론의 해석결과는 작은 처짐을 나타내었다.

복합재료 적층판과 코어로 구성되어 있는 샌드위치 판의 처짐을 구하기 위해 Face와 Core의 재료물성치를 식(18)과 같이 가정하였다.

● Face Sheets(Graphite-Epoxy T300 /934)

$$E_1 = 1.31 \times 10^5 \text{ N/mm}^2, E_2 = 1.034 \times 10^4 \text{ N/mm}^2, E_2 = E_3, G_{12} = 6.895 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, G_{13} = 6.205 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, G_{13} = G_{23}, \nu_{12} = 0.22, \nu_{13} = 0.22, \nu_{23} = 0.49$$

● Core properties(Isotropic)

$$E_1 = E_2 = E_3 = 2G = 6.89 \text{ N/mm}^2, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.445 \text{ N/mm}^2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0 \quad (18)$$

표 4. 무차원 처짐( $w = w_0 (E_2)_f t^3 10^2 / q_0 a^4$ ) (0/90/core/0/90),  $a/b = 1$

a/h	본 연구( $t_c/t_f = 10$ )
10	28.849
20	9.337
100	3.035

$t_c/t_f$	본 연구( $a/h = 10$ )
10	28.849
20	102.166
100	204.667

표 5. 무차원 처짐( $w = w_0 (E_2)_f t^3 10^2 / q_0 a^4$ ) (0/90/core/0/90)

a/b	본 연구( $t_c/t_f = 10, a/h = 10$ )
0.5	46.644
1.0	28.849
2.0	10.238
2.5	6.669
3.0	4.578

샌드위치 판의 폭 두께비의 변화, 코아대 페이스의 두께비 변화, 형상비의 변화에 따른 중앙점의 처짐값을 구하여 표 4, 5에 나타내었다.

4.2 진동 해석

복합재료 적층판의 진동수를 구하여 다른 여러 가지 해석 결과들과 비교하여 표 6, 7에 나타내었다. 표 6의 적층수에서 아래첨자는 (0/90)의 반복갯수를 의미하며 3D Elasticity는

혼합 유한차분법을 이용한 결과이다.<sup>(10),(23)</sup> 진동 해석에 사용한 재료의 물성치는 식(19)와 같이 가정하였다.

$$E_1/E_2 = open, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, \rho = 1 Nsec^2/mm^4. \tag{19}$$

샌드위치 판의 경우는 식(18), 식(19)의 물성치를 사용하였으며 여러 가지 해석결과와 비교하여 그림 2, 3, 4에 나타

표 6. 무차원 진동수 ( $\bar{\omega} = (\omega b^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$ ),  $a/h = 5$

적층수	해석방법	$E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
(0/90) <sub>1</sub>	3D Elasticity	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	본 연구	6.2335	6.9741	7.7140	8.2775	8.7271
	Reddy	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	Senthilnathan	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	Whitney	6.1490	6.9156	7.6922	8.3112	8.8255
(0/90) <sub>2</sub>	3D Elasticity	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6798
	본 연구	6.5145	8.1482	9.4675	10.2732	10.8220
	Reddy	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	Senthilnathan	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	Whitney	6.4402	8.1963	9.6729	10.6095	11.2635
(0/90) <sub>3</sub>	3D Elasticity	6.61	8.4143	9.8398	10.6958	11.2728
	본 연구	6.5715	8.3862	9.8351	10.7118	11.3055
	Reddy	6.5552	8.4041	9.9175	10.8542	11.5007
	Senthilnathan	6.5552	8.4041	9.9176	10.8542	11.5007
	Whitney	6.4916	8.3883	9.9266	10.8723	11.5189
(0/90) <sub>5</sub>	3D Elasticity	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	본 연구	6.6019	8.5163	10.0438	10.9698	11.5992
	Reddy	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	Senthilnath	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	Whitney	6.5185	8.4842	10.0483	10.9959	11.6374

표 7. 무차원 진동수 ( $\bar{\omega} = (\omega b^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$ ),  $E_1/E_2 = 40$

적층형태와 적층수	해석방법	a/h					
		2	4	10	20	50	100
(0/90)	본 연구	5.0917	7.9081	10.4318	11.0662	11.2667	11.2987
	Reddy	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	Senthilnathan	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	Whitney	5.2085	8.0889	10.4610	11.0639	11.2558	11.2842
(0/90/90/0)	본 연구	5.4033	9.2807	15.1047	17.6470	18.6719	18.8366
	Reddy	5.5065	9.3235	15.1073	17.6457	18.6718	18.8356
	Senthilnathan	6.0017	10.2032	15.9405	17.9938	18.7381	18.8526
	Whitney	5.4998	9.3949	15.1426	17.6596	18.6742	18.8362

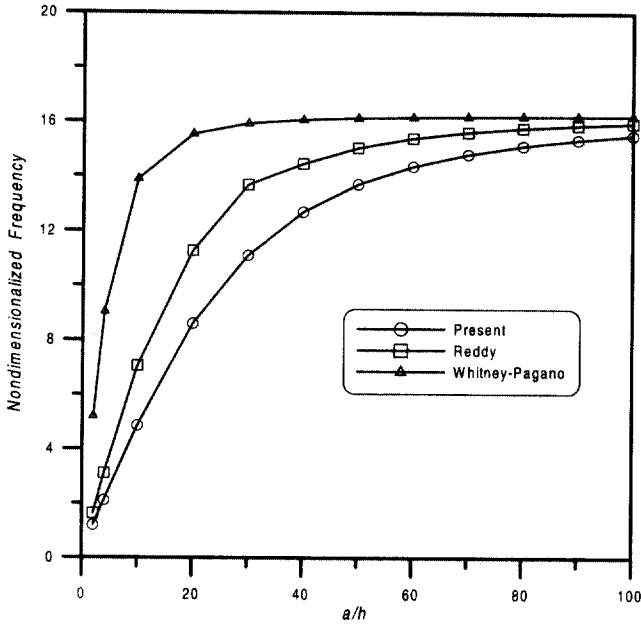


그림 2. 폭-두께비 변화에 따른 무차원 진동수

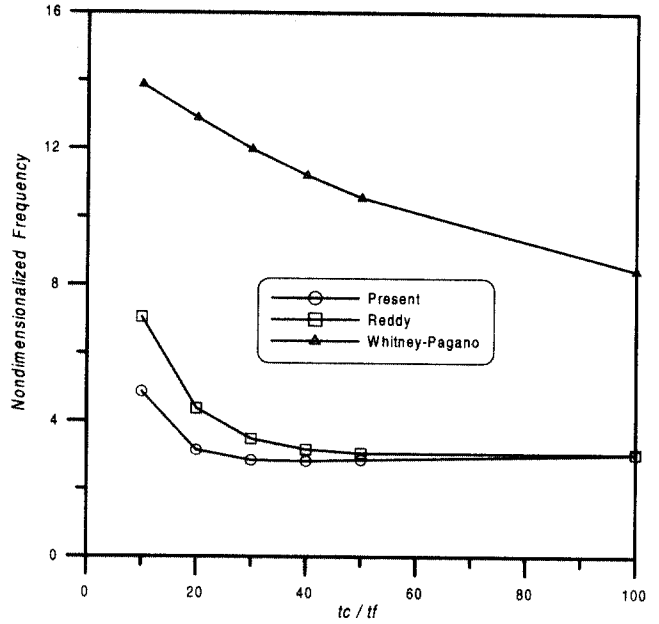


그림 3. 코아-페이스 두께비 변화에 따른 무차원 진동수

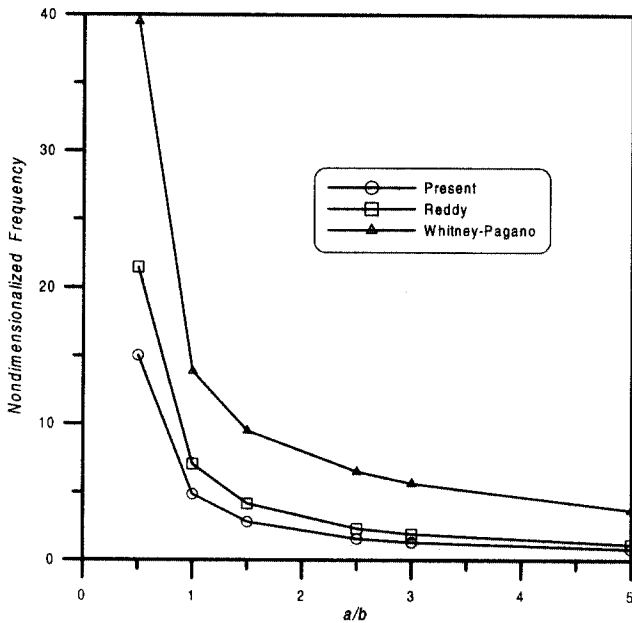


그림 4. 형상비 변화에 따른 무차원 진동수

진 것처럼 미세 재료역학적 모델링법을 사용하여 식(20)과 같이 결정하였다.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_f V_f + E_m V_m \\
 E_2 &= \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} \\
 G_{12} &= \frac{G_f G_m}{V_m G_f + V_f G_m} \\
 \nu_{12} &= V_f \nu_f + V_m \nu_m
 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $E, G, V$  는 탄성계수, 전단탄성계수, 체적 비이며 첨자  $f, m$  은 화이버, 수지를 나타낸다. 복합재료 적층판의 화이버는 탄성적 거동을 보이는데 반하여 복합재료 적층판의 수지는 점탄성적 거동을 보이며 수지의 크리프 컴플라이언스는 식(21)과 같은 Findley의 파워 함수로 가정하였다.

$$S(t) = S_0 + a' t^\gamma \quad (21)$$

여기서 상수  $S_0, a', \gamma$  는 표 8에 주어졌다.

영의 계수 형태가 더욱 편리한 이유로 식(21)을 탄성-점탄성 일치원리를 이용하여 변환시키면 식(21)의 라플라스 변환 계수함수  $E_m(s)$ 는 식(22)와 같다.<sup>(33)</sup>

$$E_m(s) = \frac{1}{[a' \Gamma(1+\gamma) s^{-\gamma} / S_0] + 1} \cdot \frac{1}{s S_0} \quad (22)$$

내었다.

샌드위치 판인 경우 폭-두께비, 코아-페이스 두께비와 형상비 변화에 따라 진동수의 해석결과에 큰 차이를 나타내었다. 종방향 수직 변형율을 고려한 고차이론의 적용으로 상대적으로 강성이 약한 코아의 변형이 반영된 것이라고 판단된다.

## 5. 점탄성 해석

복합재료 적층판의 점탄성 물성치는 참고문헌(32)에 주어

표 8. 복합재료의 물성치

$E_{fl}$	$1.66 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
$E_{ft}$	$1.38 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$
$\nu_f$	0.3
$G_f$	$2.75 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$
$E_m$	$4.60 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
$\nu_m$	0.3
$S_0$	$1/E_m$
$a'$	$4.22 \times 10^{-4} (\text{N/mm}^2)^{-1}$
$\gamma$	0.2
$V_f$	0.62

$E_m(s)$ 의 라플라스 역변환은 식(23)과 같다.

$$E_m(t) = \frac{1}{S_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_1}{\Gamma(k\gamma + 1)} \quad (23)$$

여기서  $\Gamma_1 = (-1)^k t^{k\gamma} [a' \Gamma(1 + \gamma) / S_0]^{k\gamma}$  이다. 식 (23)은  $t > \frac{1}{2} [S_0 / a' \Gamma(1 + \gamma)]^{1/\gamma}$  일때 발산하게 되므로 참고문헌[4]의 유사-탄성법을 사용하여  $t$ 가 클 경우의  $E_m(t)$ 를 구하였다. 유사-탄성법에 의한  $E_m(t)$ 와 정확한 라플라스 역변환의 결과를 비교하여 그림 5에 나타내었다.

점탄성 해석은 유사-탄성법에 의한 시간에 따른 함수인 강성  $A_{ij}^1(t), A_{ij}^2(t), A_{ij}^3(t), D_{ij}^1(t), D_{ij}^2(t)$ 와  $D_{ij}^3(t)$ 를 구하여 평형방정식 식(7)에 대입하여 수행하였다.

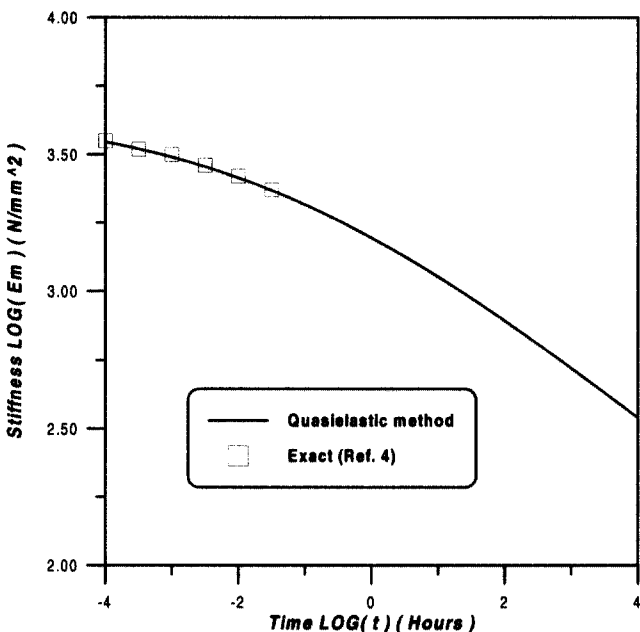


그림 5. 정확한 라플라스 역변환과 유사-탄성법의 비교

### 5.1 휨 해석

복합재료 적층판의 점탄성 해석을 위한 재료의 성질은 표 1의 값들과 나머지 재료의 물성치는 식(24)로 가정하였다.

$$\begin{aligned} G_{13} &= G_{12}, \quad G_{23} / G_{12} = 0.9, \\ a &= b = 10 \text{ mm}, \quad h = 1 \text{ mm}, \\ q &= 10 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

0/90 으로 적층된 복합재료 적층판이 대칭으로 적층된 경우와 역대칭으로 적층된 경우의 처짐해석결과를 그림 6에 나타내었다. 그림 6은 역대칭 적층판의 경우 점탄성 해석결과가 약 14% 증가되고 대칭 적층판의 경우 약 7.5% 증가하였다. 적층판의 형상비가 1이고 폭-두께비가 10인 본 연구의 경우 역대칭으로 배열된 경우가 점탄성에 의한 영향이 상대적으로 큼을 알 수 있다.

시간의 경과에 따른 중앙선의 처짐값의 변화를 나타낸 그림 7에서 점탄성 효과는 100시간이 경과한 후에는 영향이 매우 작음을 알 수 있었다.

그림 8은 적층수가 6층 이상이 되면 커플링 효과가 감소되어 처짐 감소비율이 급격히 줄어드는 것을 보여주며 그림 9는 폭-두께비가 증가하면 점탄성의 효과가 증가하는 것을 보여준다.

샌드위치 판의 점탄성 처짐 해석을 위하여 식(18)에서 가정한 코어의 물성치를 사용한다.

그림 10과 그림 11에는 샌드위치 판의 점탄성적 처짐을

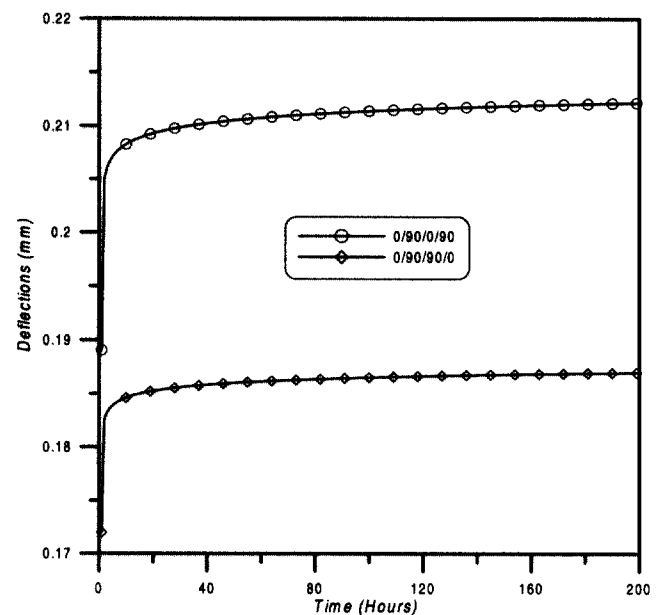


그림 6. 대칭 및 역대칭 크로스플라이 적층판의 점탄성적 처짐해석



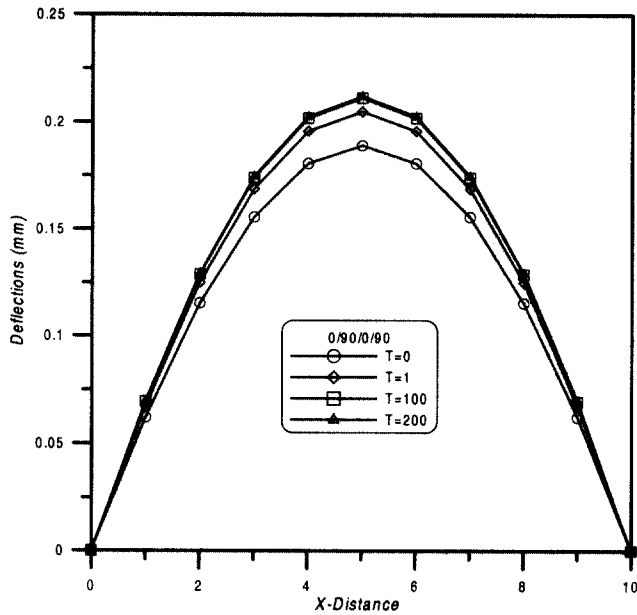


그림 7. 0/90/0/90로 적층된 크로스플라이 적층판의 시간경과에 따른 점탄성적 처짐해석

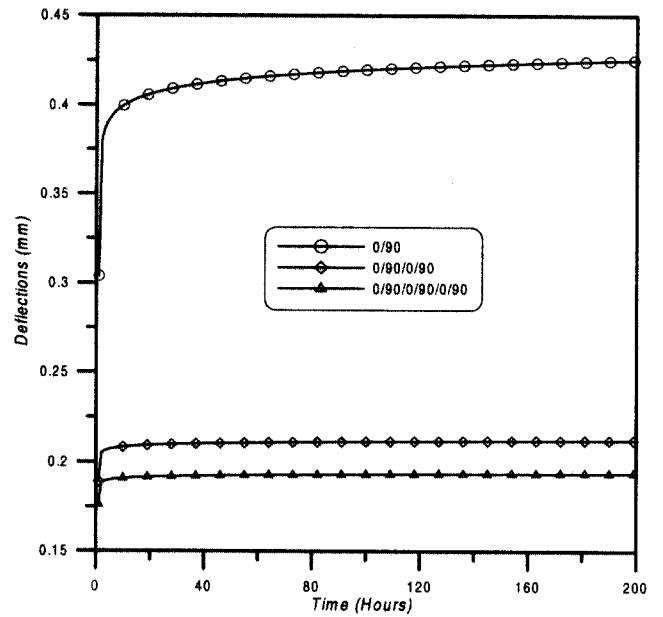


그림 8. 역대칭 크로스플라이 적층판의 층수변화에 따른 처짐해석

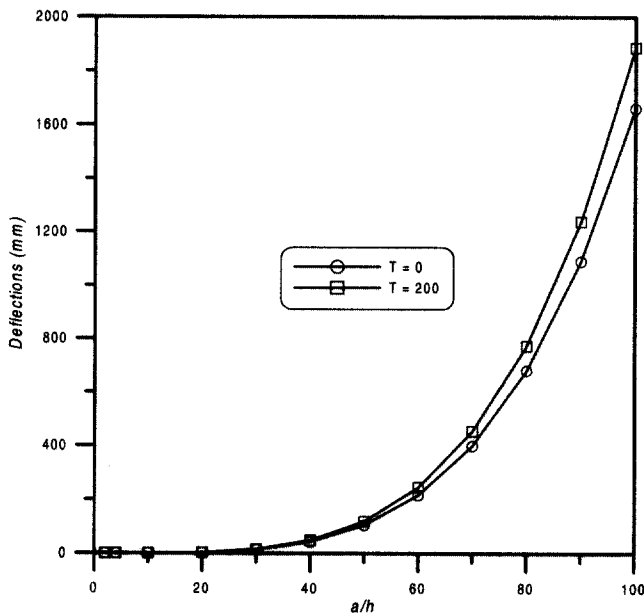


그림 9. 역대칭 크로스 플라이 적층판의 폭 두께비(a/h)변화에 따른 점탄성적 처짐해석

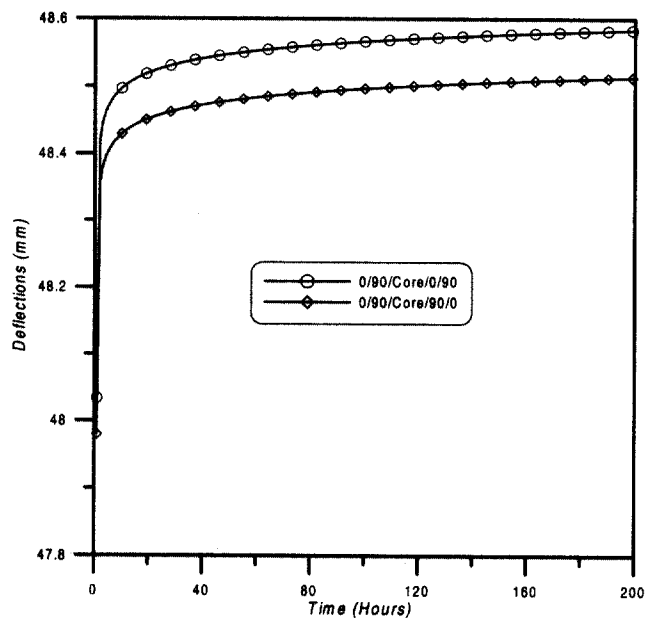


그림 10. 대칭 및 역대칭 페이스를 갖는 샌드위치 판의 점탄성적 처짐 해석  $t_c/t_f = 10$ ,  $a/h = 10$

나타내었다. 샌드위치 판의 경우에 점탄성의 효과가 상대적으로 작음을 알 수 있었다.

## 5.2 진동 해석

점탄성 진동해석에서 재료의 물성치는 표 8과 식(24)를 사용하였다.

0/90 으로 적층된 복합재료 적층판이 대칭으로 적층된 경우와 역대칭으로 적층된 경우의 진동해석결과를 그림 12에

나타내었다. 그림 12은 역대칭 적층판의 경우 점탄성 해석결과가 약 5% 감소되고 대칭 적층판의 경우 약 4% 감소하였다. 적층판의 형상비가 1이고 폭 두께비가 10인 본 연구의 경우 역대칭으로 배열된 경우가 점탄성에 의한 영향이 상대적으로 큼을 알 수 있다.

그림 13에서 처짐해석과 마찬가지로 커플링 효과의 감소로 인해 적층수가 6층이상이면 진동수 감소의 폭이 급격히 감소한다.

샌드위치 판의 진동해석에는 표 4와 식(18),식(19)의

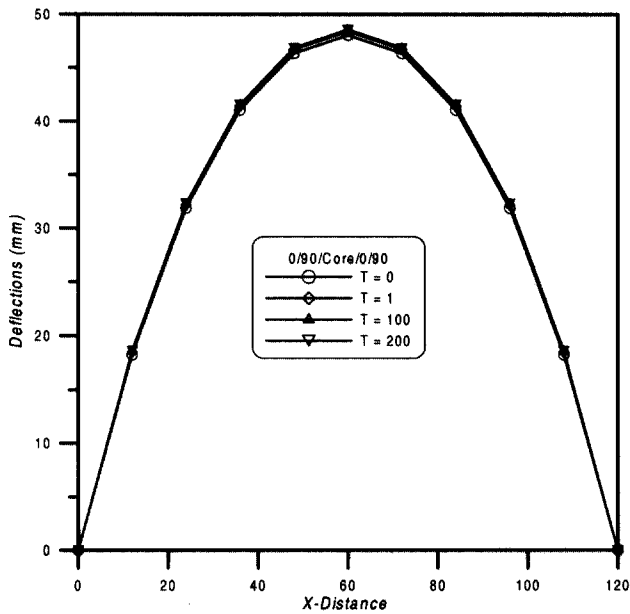


그림 11. 0/90/core/0/90로 적층된 샌드위치 판의 시간경과에 따른 점탄성적 처짐해석

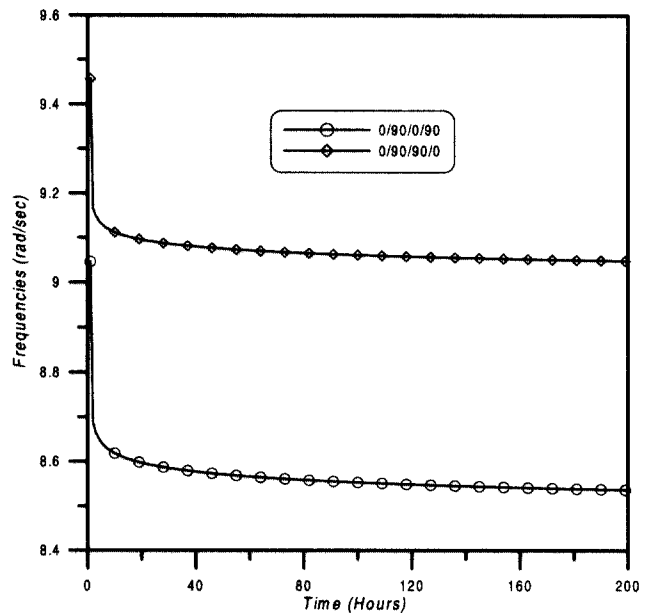


그림 12. 대칭 및 역대칭 크로스플라이 적층판의 점탄성적 진동 해석

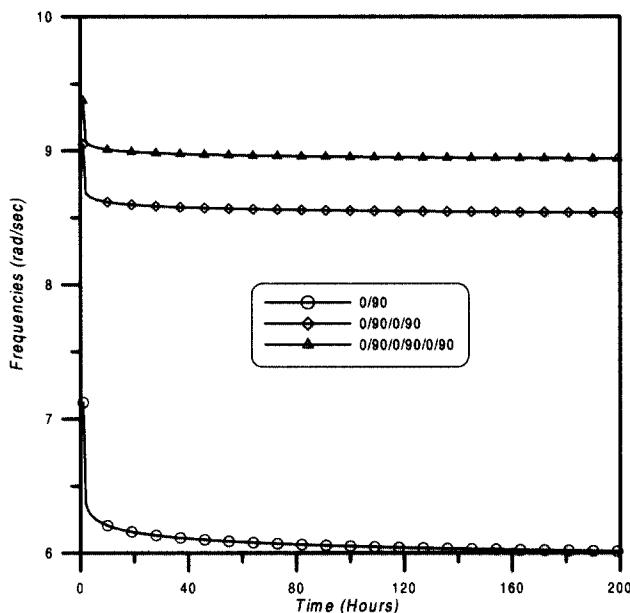


그림 13. 역대칭 크로스플라이 적층판의 층수변화에 따른 점탄성적 진동 해석

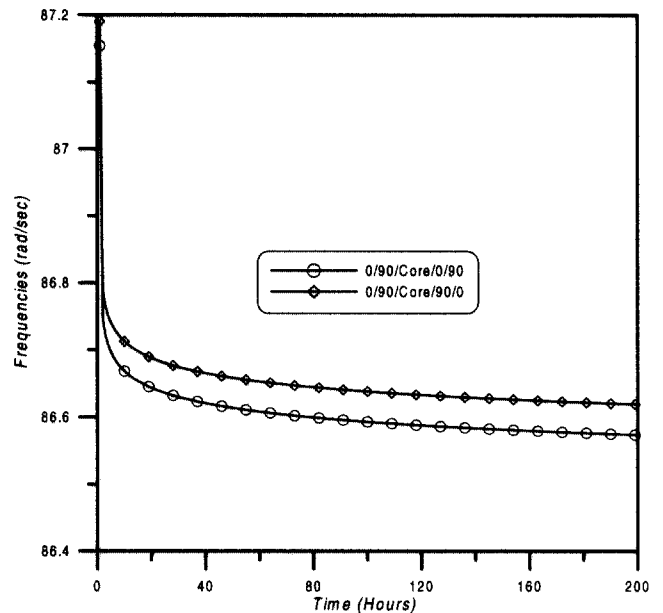


그림 14. 대칭, 역대칭 샌드위치 적층판의 점탄성적 진동 해석  
 $t_c/t_f = 10$ ,  $a/h = 10$

물성치를 사용하였다.

그림 14와 그림 15에 샌드위치 판의 점탄성적 진동수의 시간에 따른 변화와 형상비 변화에 따른 변화를 나타내었다. 고유 진동수의 경우에도 상대적으로 샌드위치 판의 경우에는 점탄성의 영향이 작음을 알 수 있었다.

## 6. 결 론

기존의 고차전단변형이론에서 고려하지 않았던 종방향 수

직 변형율을 고려한 변위장을 사용하여 복합재료 적층판 및 샌드위치의 탄성과 점탄성 휨, 진동해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

종방향 수직 변형을 고려한 본 연구의 탄성해석 결과는 기존의 고차전단변형이론, 1차전단변형이론에 의한 결과보다 3차원 탄성해석의 결과와 비교하였을 때 오차가 적게 발생하였다.

종방향 수직 변형이 고려되는 경우 상대적으로 코어의 강성이 작은 샌드위치 판의 경우가 종방향 수직 변형이 고려되지 않은 기존의 고차전단변형이론과 많은 차이가 발생하였다.

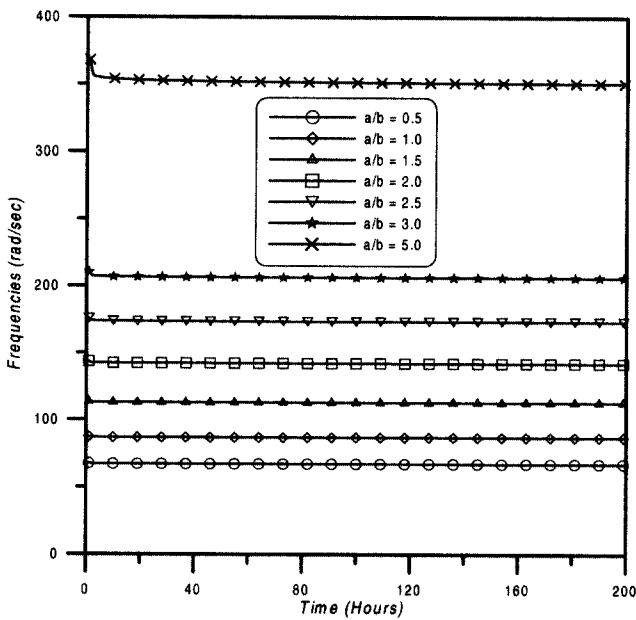


그림 15. 형상비 변화에 따른 점탄성적 진동 해석

점탄성 효과는 복합적층판의 수치에서만 고려되므로 코아 대 페이스의 두께비가 큰 샌드위치에서는 복합적층판이 페이스에만 존재하게 되므로 순수한 복합적층판의 경우보다 영향이 적었다.

점탄성의 영향은 복합적층판 및 샌드위치의 두가지 경우에 모두 최초의 1시간에 약 90%의 성능저하가 발생함을 알 수 있었다.

복합재료로 사용되는 고분자 재질은 점탄성적 거동을 보이므로 물성치가 시간에 따라 변화되어 예기치 못한 성능저하 등을 정확히 평가할 필요가 있으며 보다 엄밀한 해석을 위해서는 종방향 수직 변형을 고려한 고차이론을 사용해야 함을 알 수 있었다.

### 참고 문헌

1. Reissner E, Stavsky Y.(1961), "Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates" ASME J Appl Mech Vol.28, pp 402-408.
2. Reissner E.(1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates." ASME J Appl Mech, Vol. 12(2), pp 69-77.
3. Mindlin R. D.(1951), "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates." ASME J Appl Mech Vol. 18, pp 31-38.
4. Schapery, R. A.(1974), *Viscoelastic Behavior and Analysis of Composite Materials*, in Vol. 2 of

- Composite Materials, edited by Broutman, L. J. and Krock, R. H. Academic Press, New York:115 -119.
5. Whitney J. M.(1969), "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. J Compos Mater Vol. 3, pp 534-547.
6. Whitney J. M, Pagano N. J(1970). "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates." ASME J Appl Mech Vol. 37(4), pp 1031-1036.
7. Sun C. T, Whitney J. M.(1973), "Theories for the dynamic response of laminated plates." AIAA J Vol. 11, pp 178-183.
8. Bert C. W, Chen T. L. C.(1978), "Effect of shear deformation on vibration of anti symmetric angle ply laminated rectangular plates." Int J Solids Struct Vol. 14, pp 465-473.
9. Reddy J. N.(1979), "Free vibration of anti symmetric angle ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method." J Sound Vibration Vol. 4, pp 565-576.
10. Noor A. K, Burton W. S.(1989), "Stress and free vibration analysis of multilayer composite plates." Compos Struct Vol. 11, pp 183-204.
11. Hildebrand F. B, Reissner E.(1949), "Thomas GB. Note on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells." NACA TN-1833.
12. Nelson R. B, Lorch D. R.(1974), "A refined theory for laminated orthotropic plates." ASME Appl Mech Vol. 41, pp 177-183.
13. Librescu L.(1975), *Elastostatics and kinematics of anisotropic and heterogeneous shell type structures*. The Netherlands: Noordhoff.
14. Lo K. H, Christensen R. M, Wu E. M.(1977), "A higher order theory of plate deformation, Part 1: Homogeneous plates." ASME J Appl Mech Vol. 44(4), pp 663-668.
15. Lo K. H, Christensen R. M, Wu E. M.(1977), "A higher order theory of plate deformation, Part 2: Laminated plates." ASME J Appl Mech Vol. 44(4), pp 669-676.
16. Levinson M.(1980), "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates." Mech Res Commun Vol. 7, pp 343.
17. Murthy M. V. V.(1981), "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates." NASA Technical Paper-1903.

18. Reddy J. N.(1984), "A simple higher order theory for laminated composite plates. ASME J Appl Mech Vol. 51, pp 745-752.
19. Senthilnathan N. R, Lim K. H, Lee K. H, Chow S. T.(1987), "Buckling of shear deformable plates." AIAA J Vol. 25(9), pp 1268-1271.
20. Manjunatha.(1988), Refined theories with  $C^0$  finite elements for free vibration and transient dynamics of anisotropic composite and sandwich plates. Ph.D. thesis. Indian Institute of Technology Bombay, Powai, India.
21. Reddy J. N, Phan N. D.(1985), "Stability and vibration of isotropic and laminated plates according to higher order shear deformation theory." J Sound Vibration Vol. 98, pp 157-170.
22. Putcha N. S, Reddy J. N.(1986), "Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory." J Sound Vibration Vol. 104, pp 285-300.
23. Noor A. K, Burton W. S.(1989), "Assessment of shear deformation theories for multi-layered composite plates. Appl Mech Rev Vol. 42(1), pp 1-13.
24. Srinivas S, Joga C. V, Rao A. K.(1970), "An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. J Sound Vibration Vol. 12, pp 187-199.
25. Sriniva S, Rao A. K.(1970), "Bending vibration and buckling of simply supported thick orthotropic plates and laminates. Int J Solids Struct Vol. 6, pp 1463-1481.
26. Noor A. K.(1973), "Free vibration of multilayered composite plates." AIAA J Vol. 11, pp 1038-1039.
27. Mallikarjuna. Kant T.(1989), "Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher order theory with finite element technique." Int J Numer Meth Eng Vol. 28, pp 1875-1889.
28. Kant T, Mallikarjuna.(1989), "A higher order theory for free vibration of unsymmetrically laminated composite and sandwich plates-finite element evaluations." Comput Struct Vol. 32(11), pp 25-32.
29. Kant T, Mallikarjuna.(1989), "Vibration of unsymmetrically laminated plates analysis by using a higher order theory with a  $C^0$  finite element formulation." J Sound Vibration Vol. 134, pp 1-16.
30. Kant T, Gupta A.(1988), "A finite element model for a higher order shear deformable beam theory." J Sound Vibration Vol. 125, pp 193-202.
31. Marur S. R, Kant T.(1996), "Free vibration analysis of fibre reinforced composite beams using higher order theories and finite element modelling." J Sound Vibration Vol. 194, pp 337-351.
32. Jones, R. M.(1975), *Mechanics of Composite Materials*.:McGRAW-HILL.
33. Kim, C. K. and Hong, C. S. (1988) "Viscoelastic Sandwich Plates with Crossply Faces", J. of Structural Engineering, ASCE, Vol. 114, No. 1, pp. 150-164.
34. Timoshenko S. P, Woinowsky-Krieger S.(1959), *Theory of plates and shells*. New York: Mc-Graw Hill.
35. Szilard R.(1974), *Theory and analysis of plates (Classical and numerical methods)*. New Jersey: Prentice-Hall.
36. Ambartsumyan S. A.(1970), *Theory of anisotropic plates*. Westport Connecticut: Technomic Publishing Company.
37. Reddy J. N.(1984), *Energy and variational methods in applied mechanics*. New York: Wiley.
38. Reddy J. N.(1996), *Mechanics of laminated composite plates, theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press: 1996.

(접수일자 : 2001년 9월 19일)