대한기계학회논문집 B권, 제26권 제7호, pp. 1005~1013, 2002

얇은 정사각형 용기 내의 스핀-업 유동에 관한 수치해석적 연구

박 재 현* · 서 용 권†

(2001년 12월 22일 접수, 2002년 5월 4일 심사완료)

A Numerical Study on Spin-up Flows in a Shallow Quadrangular Container

Jae-Hyun Park and Yong Kweon Suh

Key Words: Spin-up(스핀-업), Shallow Quadrangular Container(얇은 정사각형 용기), Numerical Analysis(수치해석)

Abstract

Spin-up is a transient flow phenomenon occurring in a container when it starts to rotate from rest or its rotational speed increases from a low to high value. However, most studies on this subject have been for two-dimensional approximation. In this study, spin-up flows in a shallow rectangular container are analysed by using three-dimensional computation. We compared our results with those obtained by others using basically two-dimensional computation. Effect of two parameters, Reynolds number and liquid depth on the flow evolution is studied. We found that 2-D result is not accurate enough, and the vertical velocity distribution should be assumed of a fourth-order polynomial function for a better comparison.

1. 서 론

유체기계, 원심분리기, 액정표시장치(TFT-LCD) 제조 등의 산업분야와 지구물리학, 천체물리학, 기상학 등에서 중요한 현상으로 다루어지는 스핀-업(spin-up)이란 유체를 담고 있는 용기가 정지 혹은 강체 회전(solid-body rotation) 상태에서 갑자기 회전속도가 증가하는 것을 의미한다.

지금까지 스핀-업에 관한 연구들은 대부분 축대칭 형상에 관한 것이다. 대표적 비축대칭 형상인 사각형 용기 내의 스핀-업 유동에 관한 연구로서, van Heijst 등[1]은 실험을 통하여 직사각형 용기에 생성되는 셀의 개수가 종횡비와 극히 작은 섭동(또는 교란)에 의해 바뀌어 질 수 있다는 것을 보여주었다. 또한 van Heijst 등[2]은 직사각형 용기 바닥에 경사를 주고 이에 따른 자유표면에서의 보텍스(vortex)의 거동과 결합(merging)을 연구한 바 있다. 그리고 서[3]와 Suh[4]는 직사각형 용기의 종횡비(aspect ratio)에 따른 용기 내의 셀 형성 메커니즘을 수치해석적으로 연구하였다. Henderson 등[5]은 직사각형의 종횡비와 레이놀즈 수를 파라미터로 하여 용기 좌우 모서리에서 발생한 반시계 방향(cyclonic) 보텍스 간의 결합 여부를 조사하였으며, 최와 서[6], 최 등[7]과 Suh & Choi[8]는 에크만 분출모델(Ekman pumping models)을 사용하여 수심과 레이놀즈 수의 변화에 따른 자유표면에서의 보텍스 거동과 결합을 연구하였고, 임광옥과 권태종[9]은 얇은 정

* 동아대학교 대학원 기계공학과

† 책임저자, 회원, 동아대학교 기계산업시스템공학부
E-mail : yksuh@mail.donga.ac.kr
TEL : (051)200-7648 FAX : (051)200-7656

사각형 용기 내의 유동을 포물형 Poiseuille 유동으로 가정하여 2차원식으로 수치해석하였다.

본 연구는 회전하는 얇은 평판 사이의 스핀-업 유동에 대해 임광옥과 권태종[8]이 사용한 포물형 Poiseuille 유동모델의 타당성을 검증하기 위해 PC-cluster형 병렬컴퓨터를 이용하여 3차원 DNS(Direct Numerical Simulation)로 수치해석하였으며, 보다 나은 유동모델의 개발을 위한 기초데이터의 확보에 목적을 두고 있다.

2. 이 론

2.1 모델 및 좌표계

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 정사각형 모양의 용기와 좌표계를 나타낸다. 여기서 x^*, y^*, z^*는 유차원 좌표계를, L과 H는 용기의 한변의 길이와 수직높이를 나타낸다.

동점성 계수 ν인 유체가 담긴 정사각형 용기가 중앙지점 즉, $x^*=L/2$, $y^*=L/2$ 인 지점을 축으로 정지상태에서 Ω로 회전할 때, 용기 내에 형성되는 스핀-업 유동을 연구대상으로 하였다. 차후 실험과의 비교를 위해 용기는 초기에 $\Omega(1-\cos\omega^* t^*)/2$의 각속도로 최종각속도 Ω에 도달하는 것으로 하였다. 여기서, t^*는 유차원 시간, ω^*는 용기가 정지상태에서 최종 각속도(Ω)로 이전되는 동안의 변화를 나타내는 각속도로서 유차원이고, 용기의 회전 각속도 변화는 실제로 π/ω^*의 시간만에 종료된다.

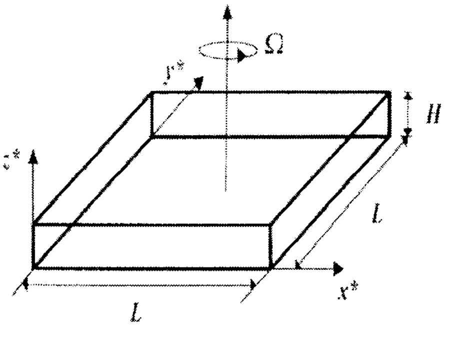


Fig. 1 Schematic diagram of the closed shallow quadrangular container

2.2 지배방정식

속도를 $L\Omega$ 로, 시간을 $1/\Omega$로, 그리고 길이를 L로 무차원화한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-2(1+f)v= -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+y\frac{df}{dt} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+2(1+f)u= -\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-x\frac{df}{dt} \tag{1b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}= -\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{1c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2}$$

여기서 t는 무차원 시간, x, y, z는 용기와 같이 회전하는 무차원 좌표계를 나타낸다. 식 (1a)와 식 (1b)의 좌변 다섯 번째 항은 코리올리스력을, 우변의 마지막 항은 회전속도 변화에 따른 관성력을 나타낸다. 한편, 원심력과 중력은 보존력에 해당하므로 압력에 포함시켜서 수치해석하였다. 그리고 f는 용기의 순간각속도와 최종각속도의 차이를 무차원화한 것이며 다음과 같이 정의된다.

$$f=\begin{cases}-\frac{1}{2}(1+\cos\omega t) & \text{for} \quad 0\le t\le \pi/\omega \\ 0 & \text{for} \quad t\ge \pi/\omega\end{cases} \tag{3}$$

식 (1a), (1b), (1c), (3) 및 기하학적 관계에서 사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$Re=\frac{L^2\Omega}{\nu},\quad \omega=\frac{\omega^*}{\Omega},\quad h=\frac{H}{L} \tag{4}$$

Re는 레이놀즈 수, ω는 초기의 회전속도 변화와 관련된 무차원 각속도이다. 본 연구에서는 ω가 매우 큰 값을 가지며 용기는 정지상태에서

아주 짧은 시간동안에 최종 각속도에 도달한다. h는 수직종횡비이다.

본 연구는 밀폐된 정사각형 용기내에 유체가 가득한 상태를 대상으로 하였으므로 속도경계조건은 점착(no-slip)조건과 비침투(impermeable)조건을, 압력경계조건은 Neumann 조건을 사용하였다.

해석결과는 z-방향의 와도(vorticity)성분 ζ와 수평면에서의 유체 divergence($\nabla \vec{u}_h$), 공간평균 운동에너지($E(t)$)를 사용하여 분석하였으며, 이들은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5}$$

$$\nabla \vec{u}_h = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \tag{6}$$

$$E(t) = \frac{1}{A}\int (u^2 + v^2)dA \tag{7}$$

여기서 A는 유동장의 무차원 수평단면적으로서 1 이다.

3. 수치해석

3.1 격자계 구성과 차분법

Table 1 은 본 연구에서 사용한 수직종횡비(h), 레이놀즈 수(Re)와 수치해석 시에 사용한 격자계를 나타낸다. 동일한 h와 Re 에 대해 z-방향으로 서로 다른 격자계를 사용함으로써 격자수 변화에 따른 해의 변화여부를 조사하였다.

지배방정식의 공간미분은 중심차분법으로 차분화하였고, 시간미분은 오일러(Euler)법으로 차분화하였으며, 무차원 시간 증분은 0.001로 두었다. 압력방정식은 D-ILU법의 전처리에 의한 PCGM (pre-conditioned conjugate gradient method)을 사용하여 풀었다.

Table 1 Number of grids used in each parameter set

h	Re	$I \times J \times K$
0.04	20850	202×202×12, 202×202×52
0.02	45000	202×202×12, 202×202×32,

3.2 병렬처리

3차원 수치해석 알고리즘을 자체 제작한 32개 노우드의 병렬컴퓨터 "Jupiter" 로 계산하였다.

Fig. 2 는 병렬컴퓨터의 각 PE(processing element)의 계산 담당구역을 나타낸 것이다. 전체 계산영역을 x-방향으로 8개, y-방향으로 2개, z-방향으로 2개의 작은 영역으로 분할하여 각 PE가 해당 영역을 계산하도록 하였으며, 영역과 영역사이의 경계부분에서는 각 PE간의 네트워크를 통한 데이터 전송이 이루어진다. 이렇게 함으로써 각 PE는 거의 동일한 부하로 계산을 수행하게 된다.

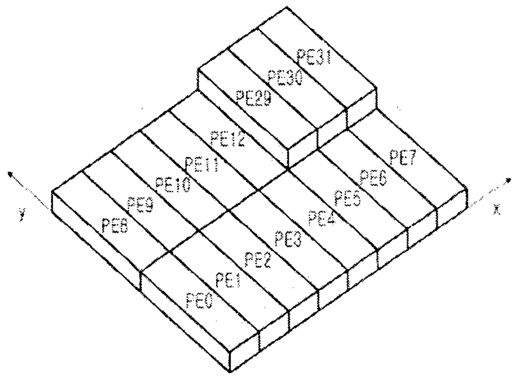


Fig. 2 Schematic of the domain decomposition

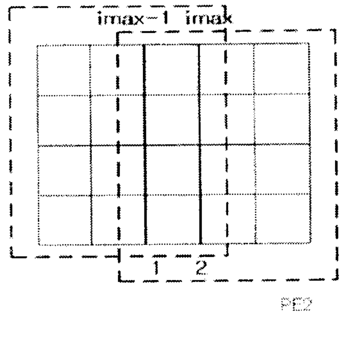
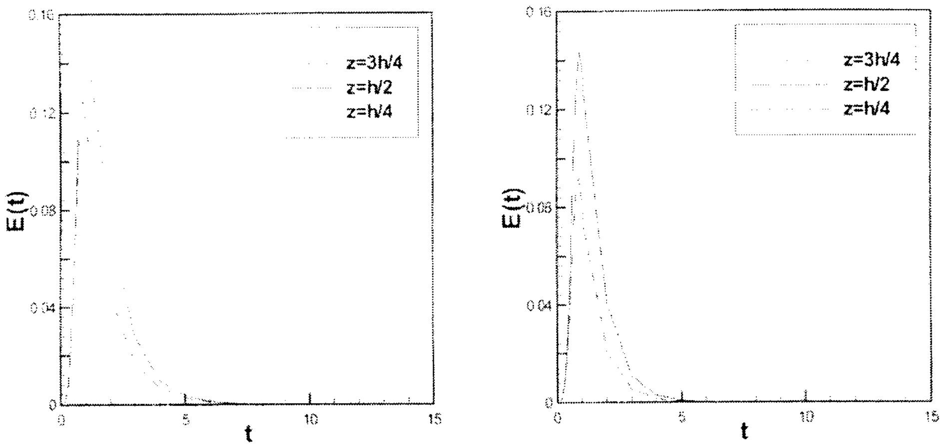
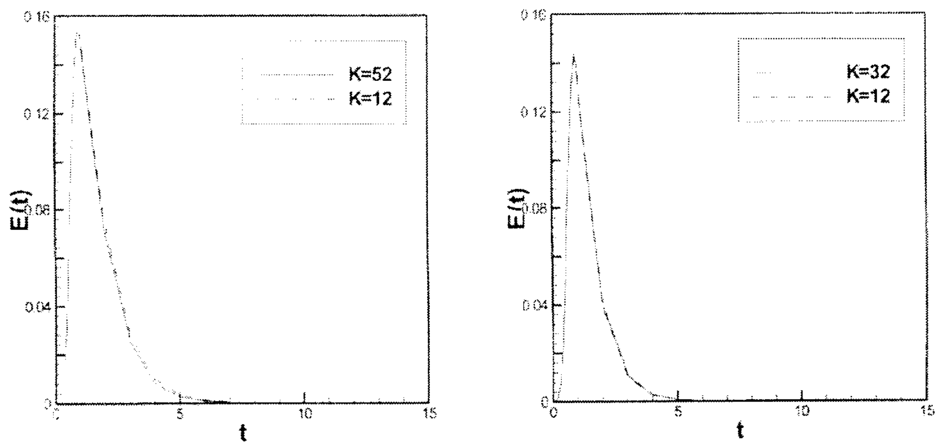


Fig. 3 Illustration of data transfer between two neighboring nodes



(a) Re=20850, h=0.04 (b) Re=45000, h=0.02

Fig. 4 Spatially averaged kinetic energy at $z=3h/4$, $h/2$, $h/4$



(a) Re=20850, h=0.04 (b) Re=45000, h=0.02

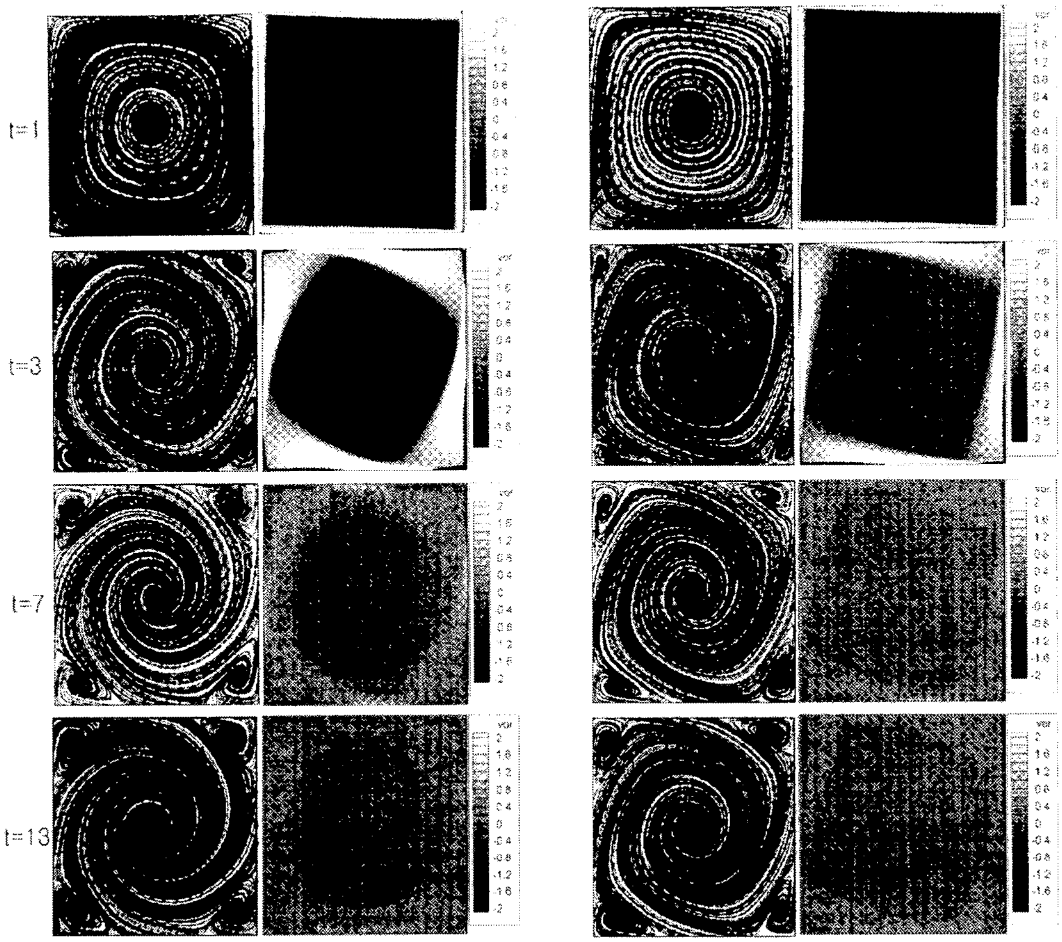
Fig. 5 Dependence of the spatially averaged kinetic energy ay $z=h/2$ on the number of grids, ***K***

Fig. 3 은 데이터 전송의 방법을 x-방향을 예로서 나타낸 것이다. PE1이 계산한 $i=imax$-1의 데이터를 PE2의 i=1로 전송하며 동시에 PE2에서 계산한 i=2의 데이터를 PE1의 $i=imax$의 데이터로 전송한다.

4. 결과 및 검토

4.1 x- y 평면상의 유동

Fig. 4는 수평단면상의 공간평균 운동에너지 ($E(t)$)를 나타낸 것이다. 수평면의 유동은 $z=h/2$ 면을 기준으로 상하 대칭을 이루기 때문에 공간평균 운동에너지도 대칭을 이룬다. 따라서 그림에서, $z=3h/4$의 결과(파선)와 $z=h/4$의 결과(일점쇄선)는 완전히 일치한다. 스핀-업 유동은 초기의 발달과정을 지나 피크를



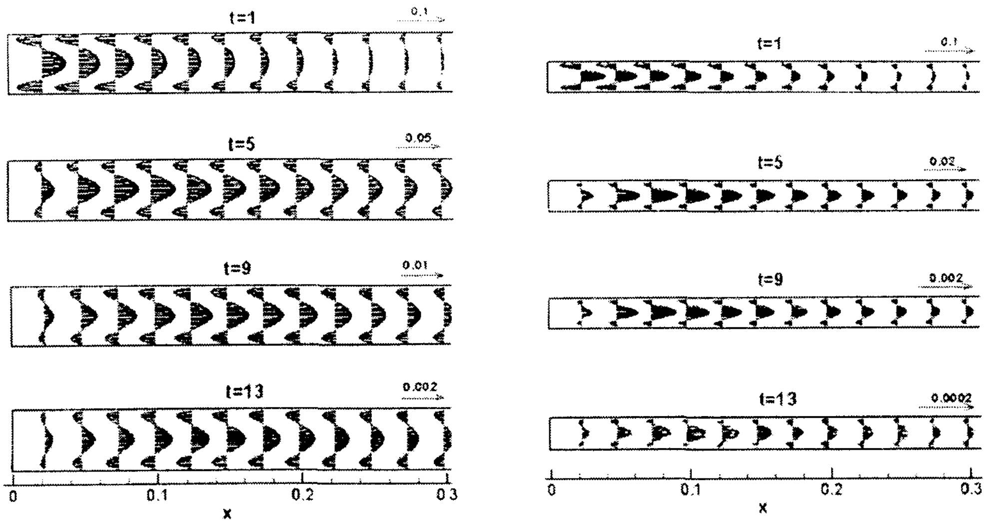
(a) h=0.04, Re=20850 (b) h=0.02, Re=45000

Fig. 6 Streamline and vorticity plots on the x-y plane at $z=h/2$ for two parameter sets

보인 뒤 급격히 약해지며 $t=7$ 이후에는 유동이 거의 정지상태임을 알 수 있다. 임광옥과 권태중[8]이 포물형 Poiseuille 유동모델을 사용하여 Re=20850, h=0.04에 대해 구한 유동장내 최대와도는 $t=40$이후에 유동이 거의 정지상태가 된다는 것을 알 수 있다. 이는 본 계산결과가 더 큰 감쇠효과를 보임을 뜻하며 주어진 parameter 조건에서의 얇은 용기 내의 유동이 포물형 Poiseuille 유동에 기초한 2차원 모델만으로는 특성을 파악할 수 없는 3차원 유동임을 의미한다.

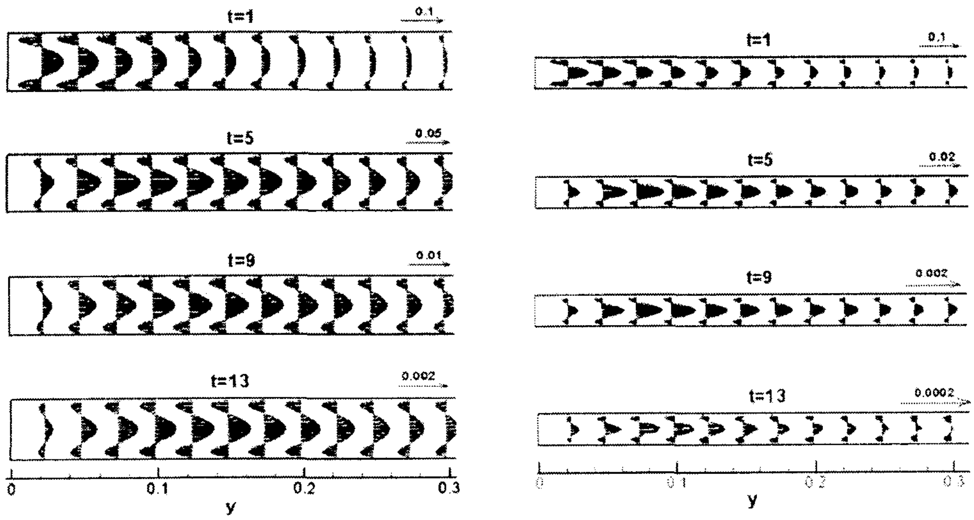
Fig. 5는 동일한 파라미터 조건에 대해서 수직방향의 격자수를 달리했을 때의 수평 중앙단면의 공간평균 운동에너지이다. 이 결과는 수직방향의 격자수를 12로 하여도 안정적인 수치해를 얻을 수 있다는 것을 나타낸다.

Fig. 6은 두 가지 파라미터 세트에 대한 수평단면상의 유선과 와도를 $z=h/2$ 에서 나타낸 것이다. 용기가 회전함에 따라서 먼저 용기의 중앙에 주 보텍스가 나타난다. 이어서 네 모서리 부분에서 코너 보텍스가 생성되지만 시간이 지남에 따라서 더 이상 발달하지 못하고 전체유동은 강체운동(solid body rotation)으로 접어든다. 특히 h가 작은 경우(Fig. 6(b))는 큰 경우(Fig. 6(a))에 비해 유동의 감쇠효과가 두드러지며, 이는 공간평균 운동에너지(Fig. 4)에서도 확인된다. 그리고



(a) h=0.04, Re=20850 (b) h=0.02, Re=45000

Fig. 7 Velocity vector plots on x- z plane at $y=1/2$ for two parameter sets



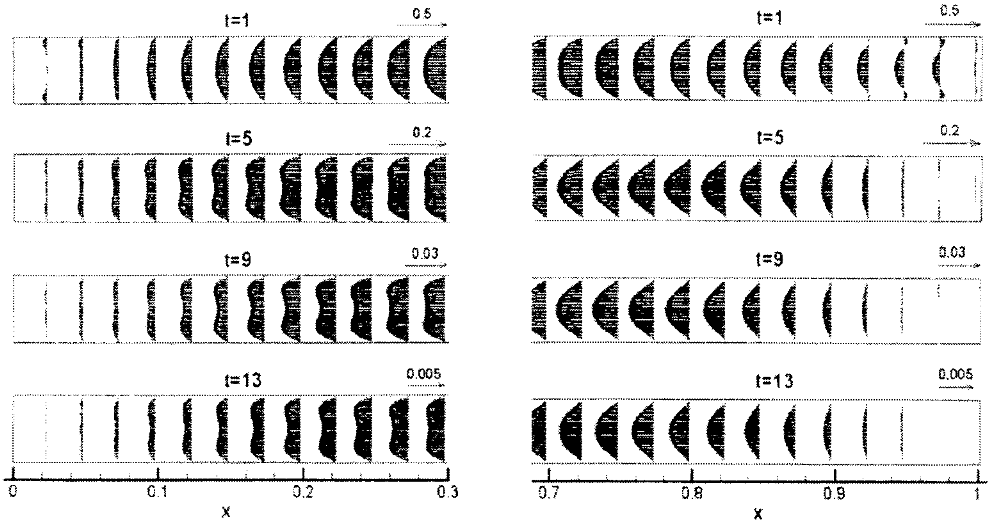
(a) h=0.04, Re=20850 (b) h=0.02, Re=45000

Fig. 8 Velocity vector plots on y- z plane at $x=1/2$ for two parameter sets

h=0.04, Re=20850의 경우에 비해서 h=0.02, Re =45000의 경우는 모서리의 코너 보텍스(corner votex)가 상대적으로 미약하다. 일반적으로 h가 작을수록 그리고 Re가 작을수록 감쇠효과는 두드러질 것으로 예측할 수 있다. 수심은 전자의 경우가 더 크고(2배), 레이놀즈 수는 후자의 경우가 더 크다(2.16배)는 점을 감안하면 감쇠효과는 레이놀즈 수보다는 수심에 더 큰 영향을 받는다.

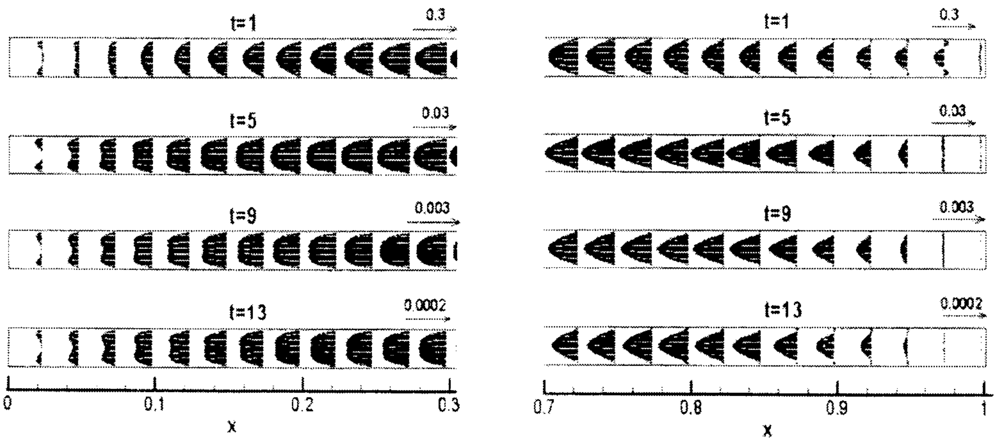
4.2 x- z, y- z 평면상의 유동

Fig. 7은 $y=1/2$의 수직단면(x- z 단면)의 속



(a) x=0~0.3 (b) x=0.7~1

Fig. 9 Velocity vector plots on x-z plane at $y=1/4$ for h=0.04, Re=20850



(a) x=0~0.3 (b) x=0.7~1

Fig. 10 Velocity vector plots on x-z plane at $y=1/4$ for h=0.02, Re=45000

도벡터를 시간의 변화에 따라서 나타낸 것이다. 이 단면에서의 속도벡터는 주유동(primary flow)이 아닌 거의 2차 유동(secondary flow)이며 주유동은 나타낸 면에 거의 수직이다. $z=h/2$의 중앙에서는 용기의 중심축 방향으로 그리고 $z=0$, h의 벽면 근처에서는 반대로 가장자리 방향으로 유체가 이동하는 순환유동의 양상을 보인다. Fig. 8은 $x=1/2$의 수직단면(y-z 단면)의 속도벡터를 나타낸 것이다. 이 그림에서도 $z=h/2$의 중앙에서는 용기의 중심축 방향으로 그리고 $z=0$, h의 벽면 근처에서는 반대로 가장자리 방향으로 유체가 이동하는 순환유동의 양상을 보인다.

Fig. 7과 Fig. 8의 결과를 통해 얇은 사각단면의 2차 유동의 속도벡터는 z에 대해 포물형태보다는 4차 함수의 형태라는 것을 알 수 있다. 이

는 점착조건에 의해 평판 근처의 유체입자는 평판과 같이 회전함으로써 원심력에 의해 회전 중심축에서 바깥 벽면 쪽으로 이동하고 그 자리를 $z=h/2$ 근처의 유체가 이동하면서 전체적으로 순환유동의 양상을 보이기 때문이다. 더욱 중요한 사실은 이러한 유동형태가 시간이 지나도 지속된다는 것이다.

Fig. 9와 10은 $y=1/4$의 수직단면에서의 속도 벡터들을 보인 것이다. 회전축 $x=1/2$에 가까울수록 그리고 얇은 수심일수록 속도분포는 2차 함수에 가까워진다. 이는 주류의 속도분포로서 2차 함수를 가정하는 것은 얇은 수심에 국한되어야 함을 의미한다.

4.3 수평면에서의 유체 divergence($\nabla \vec{u}_h$)

Fig. 11 은 h=0.04, Re=45000의 $z=h/2$ 와 $h/4$ 인 수평면에서의 유체 divergence($\nabla \vec{u}_h$)를 나타낸 것이다. 식 (6)에 의해 $\nabla \vec{u}_h<0$ 인 영역에서는 w가 z에 따라 증가하여 수평단면에서 보면 유체뭉치는 수렴하며 $\nabla \vec{u}_h>0$ 인 영역에서는 반대로 w가 z에 따라 감소하여 유체뭉치는 발산한다. Fig. 11(a)에서는, $z=h/2$ 의 중심단면에서 주 보텍스 영역에서는 수렴하고 모서리에서 발행한 코너 보텍스 영역에서는 반대의 현상이 발생하며 시간에 지남에 따라서 그 강도가 줄어듦을 알 수 있다. 이 결과는 Fig. 6(a)와 일치한다. 이러한 중심단면과 평판사이의 활발한 물질교환은 전체적으로 유동을 감쇠시키는 효과로 작용한다.

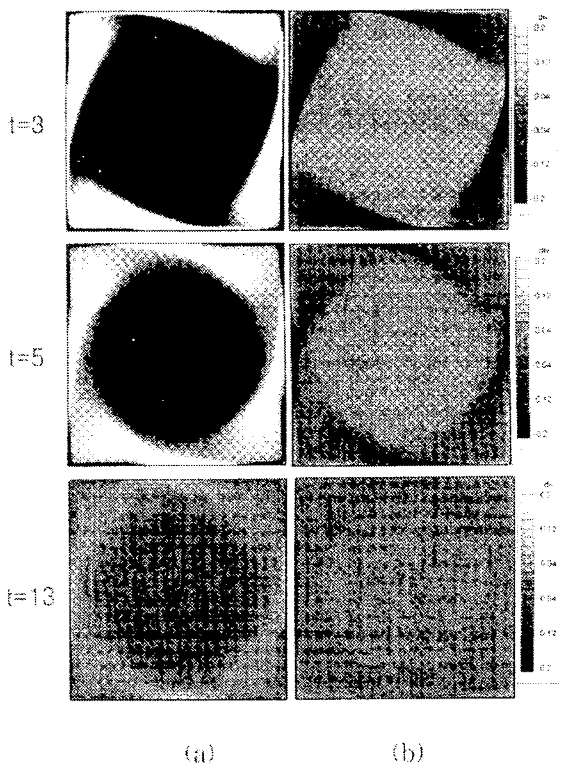


Fig. 11 Contour plots of $\nabla \vec{u}_h$ on the x-y plane at (a) $y=1/2$ and (b) $y=1/4$ for h=0.04, Re=20850

얇은 정사각용기 내의 유동을 포물형 Poiseuille 유동을 사용하여 해석한 준 3차원 모델의 경우,[9] 속도벡터의 수직방향 분포를 2차 함수의 형태로 가정함으로써 원심력에 의해 발생한 회전유동이 만들어내는 $z=h/2$ 의 단면과 평판 사이에서 발생하는 물질교환에 의한 감쇠효과를 고려할 수 없기 때문에 보텍스의 성장과 발달이 활발하고 지속시간이 길다. 따라서 기본적으로 3차원 유동인 평판사이의 얇은 층 내의 스핀-업 유동을 2차원 방정식으로 해석하되, 속도벡터의 수직방향 분포를 4차 함수 형태로 가정하여 Ekman 분출효과를 모델링 함으로써 보다 정확한 해석과 계산의 효율성을 기할 수 있을 것으로 판단된다.

5. 결 론

얇은 사각용기 내의 스핀-업 유동에 대한 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 수직종횡비가 큰 매우 얇은 용기의 경우, 용기 내에 형성된 보텍스는 발달하지 못하고 시간이 지남에 따라 빠르게 감쇠된다.

(2) 수평 중심면과 용기의 벽면사이에는 물질전달이 활발하며 이에 따른 감쇠효과가 보텍스의 성장과 지속을 막는다.

(3) 수직종횡비가 큰 정사각형 용기 내의 회전유동에 대해, 속도벡터의 수직방향 분포를 포물

형 Poiseuille 유동으로 가정하면 수평 중심면과 용기의 벽면사이에는 물질전달에 의한 감쇠효과를 고려할 수 없으며, 보다 현실적인 해를 얻기 위해서는 이것을 4차 함수의 형태로 가정해야 한다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2000-00290) 지원으로 수행되었음.

참고문헌

(1) van Heijst, G.J.F. Davies, P.A. and Davi G., 1990, "Spin-up in a Rectangular Contai *Phys. Fluids*, A2, pp.150~191.

(2) van Heijst, G.J.F. Maas, L.R.M, and Will C.W.M., 1994, "The Spin-up of Fluid in Rectangular Container with a Sloping Bottom" *Fluid Mech.*, Vol. 265, pp. 125~159.

(3) Suh, Y.K., 1993, "Two-Dimensional Spin-up a Rectangle"" *Trans. KSME* (B), Vol. 17, No. pp. 1805~1812.

(4) Suh, Y.K., 1994, "Numerical Study Two-Dimensional Spin-up in a Rectangle"" *Ph Fluids*, Vol. 6, pp. 2333~2344.

(5) Henderson, D.M. Lopez, J.M. and Stewa D.L., 1996, "Vortex Evolution in N Axisymmetric Impulsive Spin-up from Rest," *Fluid Mech.*, Vol. 324, pp. 109~134.

(6) Choi, Y.H. and Suh, Y.K., 1999, "Geostro Flows in a Container with a Vertical Pl *Trans. KCORE*, Vol. 13, No. 4, pp.124~131.

(7) Choi, Y.H., Park, J.K. and Suh, Y.K., 2001 Study on the Spin-up Flow in a Rectangu Container by Using Ekman Pumping Models, *Trans. KSME* (B), Vol. 25, No. 5, pp. 680~687

(8) Suh, Y. K. and Choi, Y. H. 2002, "Study the Spin-up of Fluid in a Rectangular Cont Using Ekman Pumping Models," *J. Fluid Mech.* Vol. 458, pp. 103~132

(9) Lim, K.O. and Kweon, T.J., 2001, "The St for an Impulsive Spin-up Flow in a Shal Rectangular Container," *Trans. KSME* (B), 25, No. 3, pp. 339~346.