

# 유동 시스템의 형상 최적 설계를 위한 성장-변형률법의 적용

맹주성<sup>†</sup> · 한석영\* · 이상환\* · 김종필\*\*

(2001년 9월 10일 접수, 2002년 4월 20일 심사완료)

## Application of the Growth-Strain Method for Shape Optimal Design of a Flow System

Joo-Sung Maeng, Seog-Young Han, Sang-Hwan Lee and Jong-Pill Kim

**Key Words :** Growth-Strain Method(성장-변형률법), Shape Optimal Design(형상최적설계), Dissipation Energy(소산에너지), Optimal Shape(최적형상), Distributed Parameter(분포매개변수)

### Abstract

Shape optimization of a flow system is done to obtain the required effects, in the engineering fields. Most of these designs are accomplished by empirical or numerical analysis. In empirical analysis, it is difficult to obtain an optimal shape in the feasible design region. And, in numerical method, it usually needs much calculation expenses for shape optimization, because of design sensitivity analysis. In this study, we used the growth-strain method having only one distributed parameter such as a design variable. It optimizes a shape by making a distributed parameter such as dissipation energy uniform in a flow system, and then applied to two-flow systems. In order to overcome the stability occurred in numerical analysis performed by Azegami, the equation of volumic strain has been modified. Also, the shapes were compared with the known optimal shapes for the flow systems. Consequently, we confirm that the modified growth-strain method is very efficient and practical in shape optimization of the flow systems.

### 1. 서론

유동 시스템 형상의 최적 설계 방법으로는 실험을 바탕으로 하는 실험적인 방법과 수학적으로 목적 함수를 설정, 수치해석을 하는 방법이 있는데, 후자의 경우는 Glowinski 와 Pirineau<sup>(1)</sup>가 제안한 Adjoint 기법이 있으며, Cabuk and Modi<sup>(2)</sup>와 임 과 최<sup>(3)</sup>가 이것을 층류 평판 확대관의 최적 형상을 구하는데 사용하였다.

그러나 이 기법은 형상 변화시 설계 인자인 Adjoint 변수들을 정의해야 하고, 유동의 지배방정식 외에 형상 지배방정식을 설정, 유동 특성에 맞게 설계 인자의 경계 조건을 주어야 하는 어려움

이 있다.

최근에 Azegami 는 소산에너지 밀도와 같은 한 개의 매개변수를 균일하게 분포시켜 형상 최적화를 수행하는 성장-변형률법을 제안하였고, 2 차원 점진 확대관 형상에 대하여 고찰<sup>(4,5)</sup>하였다. 그러나 형상 변화에 따른 매개변수의 소산에너지 분포가 불안정함을 보이고 있어 그의 결과가 최적 형상이라고 판단하기에는 부족함이 있다.

본 논문에서는 Azegami 의 수치해석시 발생된 불안정성을 해소하기 위하여 수정된 체적 변형률을 제시하였고 동일 형상에 대하여 고찰을 하였다. 뿐만 아니라 비점성 유동장인 포텐셜 유동에 대한 관로 형상 설계와 점성 유동장인 2 차원 층류 평판 확대관의 형상 설계에 분포매개변수를 다양하게 설정하여 적용하였다. 이렇게 구해진 최적 형상과 기존의 다른 기법에 의한 최적 형상을 비교함으로써, 유동 시스템의 형상 최적화에 성장-변형률법이 효율적이며, 실용적으로 적용될 수 있음을 확인하였다.

\* 회원, 한양대학교 기계공학부

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : jsmaeng@e-mail.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0439 FAX : (02)2298-4634

\*\* 한양대학교 대학원 기계공학부

2. 성장-변형률법

성장-변형률법은 분포 매개변수가 지점마다 균일화 하도록 체적(또는 면적)변형을 발생시킴으로써 형상을 개선해 나가는 방법이다. 따라서 최적 기준(optimal criteria)이 분포 매개변수의 균일 조건에 의해 부여되는 경우에는 모두 적용이 가능하다. 예를 들면 von Mises 응력에 근거하여 강도를 최대화 시키는 경우, 변형에너지 밀도의 최대값을 최소화하는 것, 즉 체적 유한 하에서는 변형에너지 밀도의 분포를 균일화 하는 것이 최적 기준이 된다. 이 경우에는 분포 매개변수로 변형에너지 밀도를 설정한 성장-변형률법이 적용<sup>(7)</sup>된다.

점성유체의 정상 유동장의 경우는 단위체적당 점성에 의해 손실되는 소산에너지 밀도에 주목하여, 이것을 제어체적마다 최소화 하는 것, 즉 체적 유한 하에서는 그것을 균일화 하는 것이 최적기준이 된다. 따라서 이 경우에는 분포 매개변수로 소산에너지 밀도를 설정한 성장-변형률법이 적용된다. 이 방법은 형상 변화에 따른 방정식을 만들지 않기 때문에 해법이 매우 간단할 뿐만 아니라 매개 변수를 다양하게 선택할 수 있다는 장점을 가지고 있다.

2.1 최적화 과정

계산 과정은 유동 해석 단계와 성장 해석 단계를 반복적으로 거치면서 최적화가 이루어진다. 유동 해석 단계는 유동 조건하에서 분포매개변수의 분포를 구하는 것이고, 성장 해석 단계는 분포매개변수의 함수로 주어지는 체적 변형률에 의하여 형상 변화가 일어나도록 하는 것이다.

즉, Fig. 1에서 보는 바와 같이 초기 형상에 대하여 유동 해석과 성장 해석 단계를 거치며, 목적으로 하는 분포매개변수가 균일하게 분포되지 않으면 형상을 변화 시켜 다시 유동 해석 단계로 가는 반복적인 최적화 과정을 수행한다.

여기서 체적 변형률은 식 (1)과 같이 주어진다.

$$\epsilon_{ij}^B = \frac{d-\bar{d}}{d} \delta_{ij} h \tag{1}$$

식 (1)의  $\bar{d}$  는 분포매개변수의 평균값 또는 최소값,  $\delta_{ij}$  는 크로네커의 델타이다. 또한  $h$  는 성장 비로 1보다 작은 값을 사용한다.

형상 변화의 원리는 응력-변형률의 에너지 관계식인 식 (2)의 총 변형에너지를 식 (3)을 이용하여 최소화시키는 것이다.

$$U^G(u_i^G) = \frac{1}{2} \int_{V^0} (\epsilon_{ij}^G - \epsilon_{ij}^B) D_{ijkl} \times (\epsilon_{kl}^G - \epsilon_{kl}^B) dV^0 \tag{2}$$

$$\delta U^G(u_i^G) = 0 \tag{3}$$

식 (2)에서  $i,j,k,l$  은 본 논문에서 유동 시스템이 2 차원이므로  $i,j,k,l=1,2$  이며,  $D_{ijkl}$  은 강성 텐서이다. 성장 해석 단계는 유한 요소법으로 차별화하여 수행하였다.식 (2)의 성장변형률  $\epsilon_{ij}^G$  는 식 (4)와 같고, 식(3)은 식 (5)~(7)을 이용하여 계산된다. 또한 형상 변화를 위하여 식 (7)에서 구한 성장변위벡터  $u_i^G$  를 식 (8)과 같이 구절점의 좌표 벡터에 더하여 신절점의 위치 즉 변형된 형상을 구한다.

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} (u_{i,j}^G + u_{j,i}^G) = [B] \{u^G\} \tag{4}$$

$$[k] \{u^G\} = \{f\} \tag{5}$$

$$[k] = \int_{V^0} [B]^T [D] [B] dV^0 \tag{6}$$

$$\{f\} = \int_{V^0} [B]^T [D] \{\epsilon^B\} dV^0 \tag{7}$$

$$\{X_{new}\} = \{X_{old}\} + \{u^G\} \tag{8}$$

또한 식(4)~(8)에 사용된  $[B], [k], \{f\}$  는 각각 유한 요소해석시 사용되는 변형률-변위행렬, 강성행렬, 등가 점질력 벡터이고  $X_{new}$  를 이용하여 스

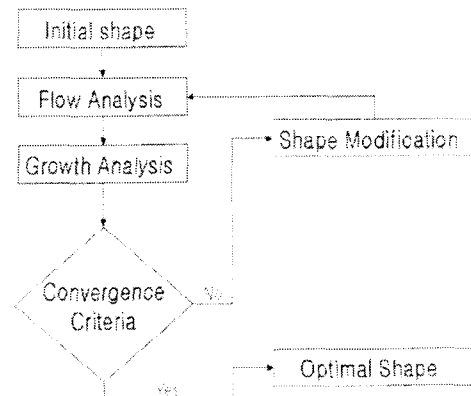


Fig. 1 The shape optimization procedures

플라인 곡선으로 나타낸 것을 최종형상으로 하였다.

2.2 성장-변형률법의 수정

Azegami 기법은 식 (1)과 같은 체적 변형률  $\epsilon_{ij}^B$  을 사용하여 형상 변화를 수행하였다. 그러나, 이를 실제 유동 시스템에 적용시 비점성 유동에서는 분포매개변수가 균일화되는 과정에서 형상이 불안정하게 변화하게 되어 성장비  $h$  를 작게 조절해야 하는 현상이 발생하여 수렴속도가 느려지며, 점성 유동에서는 분포매개변수가 균일하게 수렴하지 못하고 도리어 증가되는 현상이 나타난다.

따라서, 본 연구에서는 식 (9)와 같이 체적 변형률의 식을 제안하여 비점성 유동에서는 성장비의 조절이 필요하지 않고, 점성 유동에서는 분포매개변수가 균일하게 수렴하도록 수정하였다.

$$\epsilon_{ij}^B = \epsilon_{ij}^B(\text{old}) - \epsilon_{ij}^B(\text{new}) \tag{9}$$

3. 유동시스템의 적용

3.1 포텐셜 관로 유동

본 연구에서 제시한 방법을 시험하기 위하여 정밀해를 예측할 수 있는 포텐셜 유동의 관로<sup>16)</sup>에 대한 형상 최적화를 수행하였다. 유동 방정식은 식(10)~(11)이고, 유한 차분법을 사용하였다

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{10}$$

$$u = -\frac{d\psi}{dy}, v = \frac{d\psi}{dx} \tag{11}$$

여기서  $\psi$  는 유동 함수이다.

Fig. 2 와 같은 임의의 형상을 가지는 관로에서 유동이 가장 원활하게 되는 형상은 직관로가 될 것이다. 그때의 속도의  $y$  성분은 최소가 될 것이다. 따라서, 식 (1)의 적용시 분포매개변수로  $d$  대신 속도의  $y$  성분 절대값인  $|v|$  를,  $\bar{d}$  는 분포매개변수의 평균값인  $\overline{|v|}$  를 사용하였다.

성장비  $h$  는 0.05 로 설정하였으며, 형상 변화의 구속 조건은 뒷면만의 변화를 허용하고, 다른 면은 완전 구속하였다.

Fig. 3 과 Fig. 4 에서 Azegami 기법과 수정된 기

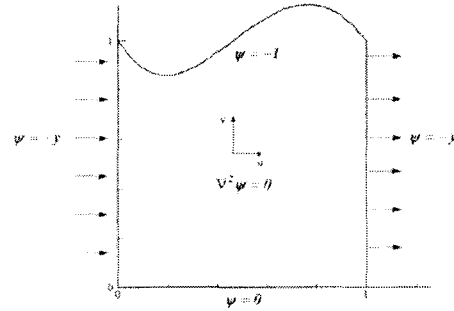


Fig. 2 Potential flow through a channel

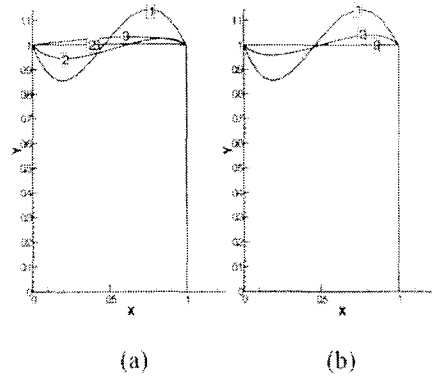


Fig. 3 Result from optimization process( (a) Azegami method, (b) This study )

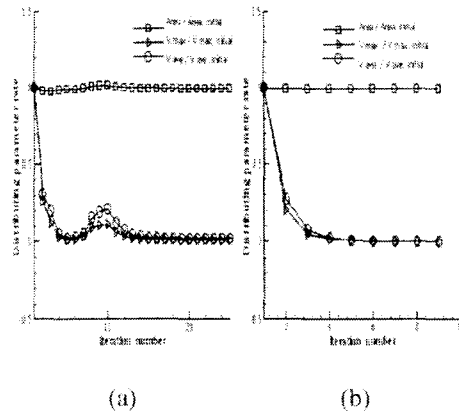


Fig. 4 Convergence history( (a) Azegami method, (b) This study )

법의 최적화 과정을 비교하였다. Fig. 3 (b)에서와 같이 수정된 기법에 의한 최적 형상은 반복 횟수 9 번만에 직관로가 됨을 알 수 있었다.

하지만, Azegami 의 기법은 Fig. 3 (a)에서와 같이 반복 횟수 9 번에서 형상이 불안정하게 위로 부푸는 현상을 볼 수 있었고, 다시 성장비를 0.005 로 낮게 조절하여 25 번 이상에서 직관로 형상으로 수렴하는 것을 알 수 있었다.

이는 Fig. 4 (a)에서 반복 횟수 5 번 이상부터 형상 변화가 안정치 못하여 유동 해석에서 나온 분

포매개변수인  $y$  방향의 속도 성분의 분포가  $h = 0.05$  에서 발산되기 때문이다. 반면에 Fig. 4(b)는 안정적으로 수렴함을 보여주고 있다.

### 3.2 2차원 확대관 유동

#### 3.2.1 Azegami 기법과의 비교

점성이며, 비압축성인  $Re$  수가 50 인 정상 유동 시 2 차원 점진 확대관의 형상에 대하여 최적 설계를 수행하였다. 이때 레이놀즈수는  $Re = \rho \bar{u} L_{in} / \mu$  와 같이 정의되고  $\bar{u}, L_{in}$  은 각각 입구의 유량평균속도와 입구부의 길이이다. 유동의 지배방정식은 식 (12)의 연속 방정식과 식 (13)의 Navier-Stoke 방정식이며, 분포 매개변수  $d$  는 식 (14)와 같은 소산에너지 밀도를 설정하였다.

$$u_{,i} = 0 \tag{12}$$

$$\rho u_j u_{i,j} = -P_{,i} + \mu u_{i,jj} \tag{13}$$

$$d = \frac{1}{2} \mu \{u_{i,j} + u_{j,i}\}^2 \tag{14}$$

Fig. 5 는 초기 형상 및 형상변화의 구속조건을 나타낸 것으로 레이놀드수가 50 일때의 유동 해석 결과인 유선을 도시하여 놓은 것이다. 정렬 격자  $61 \times 41$  에 대하여 유한 체적법으로 식(14)의 소산 에너지 밀도  $d$  를 구하였고,  $\bar{d}$  로는 소산에너지 밀도의 체적 평균값을 사용하였다. 유동 속도 조건으로 입구는 Dirichlet 조건인 완전 발달 유동을 주었고, 출구는 Neumann 조건을 주어 확대관의 대칭성을 고려하여 확대관의 반쪽 부분만 해석하였다. 성장 해석시 성장비  $h$  는 0.03 을 사용하였다.

유동특성에 대해서는 기존 연구에서 확인된 것으로 여기서는 설명을 피하였다. Fig. 5 에서  $L$  은 무차원화한 특성 길이이며, Fig. 6 은 수정된 기법으로 얻어진 최적 형상을 Azegami 기법으로 계산된 형상과 비교한 그림이다.

Fig. 7 은 최적화 과정 중 분포매개변수인 소산 에너지 밀도 분포가 최적값으로 균일화 하는지를 나타낸 그림이다. Azegami 기법의 경우 반복 횟수가 증가함에 따라 소산에너지 밀도의 최대값과 평균값이 점차 증가하는 것을 알 수 있다. 이는 Azeagmi 기법의 형상 변화가 유동 시스템 적용시 안정치 못하여 올바른 유동 해석을 할 수 없었기 때문이라 생각된다. 반면 수정된 기법의 경우는 반복 횟수 6 회 정도에서 최적 형상으로 수렴했다.

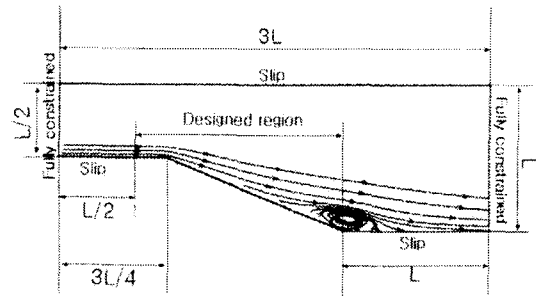


Fig. 5 Initial half shape of the 2-d diffuser and constraint condition

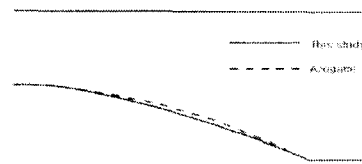


Fig.6 The optimal shape of the 2 - D diffuser

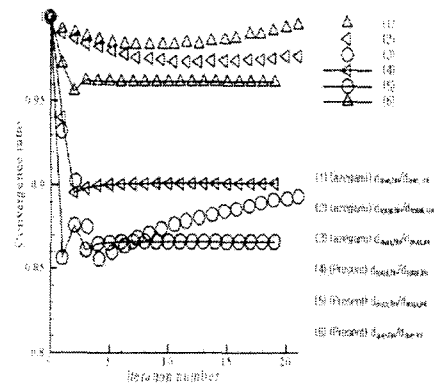


Fig. 7 Dissipation energy distribution ratio in the optimization process

#### 3.2.2 Adjoint 기법과의 비교

또 다른 기존의 최적화 방법과의 비교로 2 차원 평판 확대관에 대한 고찰을 하였다. 입구부는 Dirichlet 조건인 완전 발달 유동 조건을, 출구부는 Neumann 조건을 주었으며, 유동 해석은 정렬 격자  $61 \times 31$  로 하여 대칭성을 고려 윗부분 반쪽만,  $Re$  수 50, 100, 200 에 대하여 형상 최적화를 수행하였다. 성장 해석은 Fig. 8 과 같은 형상 구속 조건하에서 성장비를 0.25 로 하여 소산에너지 밀도 분포가 최소값으로 균일하게 분포되도록 식 (1)의 체적 변형률에서  $\bar{d}$  의 값을 최소값인  $d_{min}$  으로 설정하였다.

또한 얻어진 최적 형상의 확대관 성능을 평가하기 위하여 식 (15)로 정의되는 압력 회복 계수  $C_p$  를 사용하였다.

$$C_p = \frac{\Delta P}{1/2\rho U_{ave}^2} \quad (15)$$

윗 식에서  $U_{ave}$  는 입구부 속도의 체적 평균값이다. 본 논문에서는 형상 최적화 과정을  $Re$  수 50에 대해서만 나타내었으며, 초기 형상에 대한 소산에너지 밀도 분포를 Fig. 9 에, 최적 형상에 대한 소산에너지 밀도 분포를 Fig. 10 에 소산에너지의 체적 평균값으로 무차원화하여 나타내었다.

$Re$  수 50 인 경우 Fig. 9 와 Fig. 10 에서 최적화된 확대관의 윗면부분에서 소산에너지 밀도가 초기 형상에 비해 낮게 분포하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 11 은 최적화 과정 중 분포매개변수인 소산에너지 밀도 분포가 반복 횟수에 따라 어떻게 변화하는지를 나타내었으며, 반복 횟수가 증가함에 따라 소산에너지 밀도가 균일화됨을 보여준다.

각각의  $Re$  수에 따른 본 연구의 수정된 성장-변형률법에 의한 최적 형상은 Fig. 12 와 같이 구해

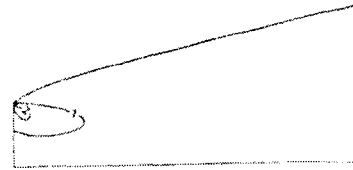


Fig. 10 Final distribution of dissipation energy( $Re=50$ )

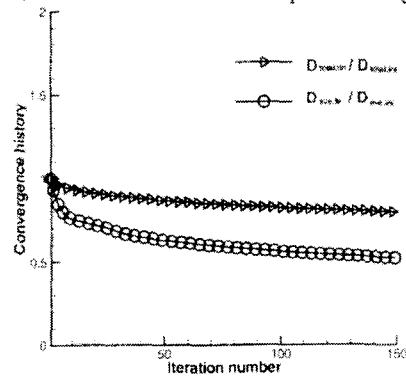


Fig. 11 Convergence history in the flow system ( $Re=50$ )

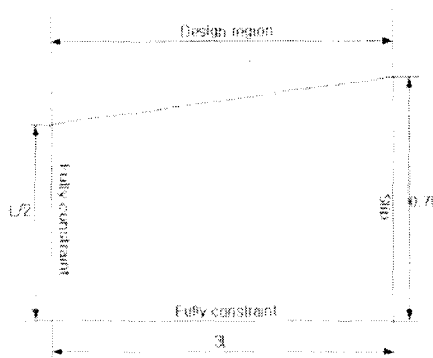


Fig. 8 Initial half shape and constraint condition

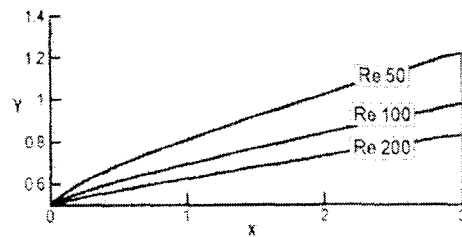


Fig. 12 Optimal shapes at Reynolds Number 50, 100, 200 by the modified growth-strain method



Fig. 9 Initial distribution of dissipation energy( $Re=50$ )

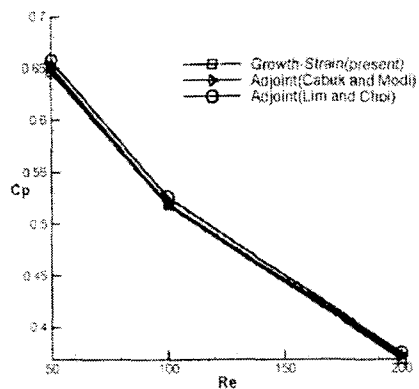


Fig.13 The pressure recovery coefficient according to Reynolds Number

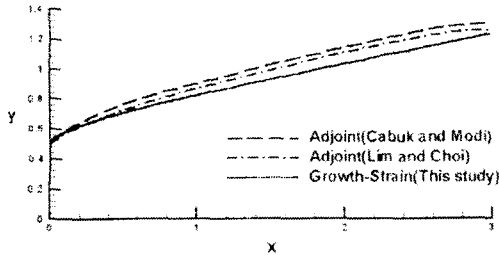


Fig. 14 Comparison of optimal shapes (  $Re=50$  )

Table 1 Relative Error(%) of pressure recovery coefficient  $C_p$  ( adjoint( I ) : Cabuk and Modi, adjoint( II ) : 임과 최)

Re	Adjoint ( I )	Adjoint ( II )	This study	Relative Error ( I )	( II )
50	0.6516	0.6581	0.6466	0.767	1.747
100	0.5197	0.5262	0.5185	0.231	1.463
200	0.372	0.375	0.3684	0.968	1.76

Table 2 Level of pressure recovery coefficient  $C_p$

Re	Initial shape	Optimal shape
50	0.163456	0.646586
100	0.240738	0.518448
200	0.260800	0.368368

졌다. 수정된 기법에 의해 형상 최적화된 확대관의 성능을 평가하기 위해 Adjoint 기법에 의해 최적화된 확대관에 대하여 압력회복계수  $C_p$  로 비교한 결과를 Fig. 13 과 Table 1 에 나타내었다. 이 결과로부터 Adjoint 기법에 의해 최적화된 형상과 수정된 기법에 의해 최적화된 형상의 압력회복계수가 0.2% ~ 1.8% 정도의 차이를 보여주고 있다. Dulyachot<sup>(6)</sup> 등이 주장하였듯이 Fig. 14 와 같이 본 논문의 최적 형상이 adjoint 기법의 의한 최적 형상과 동일한 목적의 결과 형상인 최적 형상군을 이루는 것을 알 수 있었다. 또한, Table 2 은 각각 Reynolds 수에서 초기 형상과 최적 형상의 압력회복 계수  $C_p$  을 비교한 표인데, 수정된 기법에 의한 최적 형상이 초기 형상보다 더 높은 압력회복 계수를 가지는 우수한 형상임을 확인할 수 있었다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 Azegami 기법의 수치해석시 발생된 불안정한 형상 변화를 수정하여 안정적인 형상 변화가 이루어지도록 수정된 성장-변형률법을 제안하였으며, 수정된 기법을 점성 및 비점성유동에 적용하여 형상의 최적화를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 수정된 성장-변형률법을 적용한 결과, 비점성유동인 포텐셜 관로 유동에서는 성장비의 조절이 불필요하였으며, 점성유동인 2 차원 확대관 유동에서는 분포매개변수가 빨리 수렴함을 알 수 있었다.

(2) Adjoint 기법과 수정된 성장-변형률법에 의한 2 차원 확대관의 최적 형상을 비교하여, 압력회복 계수  $C_p$  와 최적 형상이 근사적으로 일치함을 확인하였다.

(3) 수정된 성장-변형률법은 Adjoint 변수를 사용하지 않고, 단 한 개의 분포매개변수를 설정함으로써 유동 시스템의 형상 최적화에 효율적이며, 실용적으로 적용될 수 있음을 확인하였다.

#### 참고문헌

- (1) Glowinski, R. J. and Pironeau, O., 1975, "On the Numerical Computation of The Minimum Drag Profile in Laminar Flow," *J. Fluid Mech.* Vol. 72, pp. 385 ~ 389.
- (2) Cabuk, H. and Modi, V., 1992, "Optimum Plane Diffusers in Laminar Flow," *J. Fluid Mech.* Vol. 237, pp. 373 ~ 393.
- (3) Lim, S. H. Choi, H., 1997, "Optimal Shape Design Using a Mathematical Theory in Laminar Flow," *KSME Proceedings for Spring Conference*, B, pp. 357~362
- (4) Hideyuki, Azegami, Masatoshi, Shimoda, Toshiaki, Sakurai, and Yusuke, Kondo, 1992, "Shape Optimization of Solid Structures Using the Growth-Strain Method(Application to Chassis Componets)," *SAE*, 921063, pp. 1136 ~ 1145.
- (5) Eijim, Katamine, Hideyuki, Azegami, and Akiyoshi, Okitsu, 1992, "Shape Optimization Analysis of Flow Field (approach by the growth-strain method)," *JSME*, Vol. 58, No.91-1434.
- (6) Dulyachot, CH., Vijay, S. and Vijay, M., 1999, "Shape Optimization for Fluid Flow Problems Using Bezier Curves and Designed Numerical Experiments," *ASME Design Engineering Technical Conference*, pp. 1 ~ 8.
- (7) Han, S.Y., 2000, "Shape Optimization for general two-dimensional structures" *Acta Mechanica*, Vol. 145, No. 1-4, pp.117~125