

열적 비대칭 삼각 핀의 열전달 해석; 핀 끝 효과에 기준

A Heat Transfer Analysis of a Thermally Asymmetric Triangular Fin; Based on Fin Tip Effect

강 형 석*
Kang, Hyung-Suk

Abstract

The non-dimensional heat loss from a thermally asymmetric triangular fin is investigated as a function of a ratio of upper and lower surface Biot numbers (Bi_2/Bi_1), the non-dimensional fin length and tip surface Biot number using the two-dimensional separation of variables method. The effect of fin tip surface Biot number on the variation of the non-dimensional temperature along the sloped upper and lower surfaces for the thermally asymmetric condition is presented. The relationship between the non-dimensional fin length and the fin tip surface Biot number for equal amount of heat loss is also discussed as well as the relationship between upper surface Biot number and tip surface Biot number for equal amount of heat loss.

키워드 : 열전달, 비오투 수, 핀 끝, 열적 비대칭

Keywords : *heat transfer, Biot number, fin tip, thermally asymmetry*

1. 서론

우리들 주위의 가정에서부터 산업 현장까지 열전달을 증진시키기 위하여 핀이 사용되지 않는 곳은 거의 없다. 이와 같이 열전달을 향상시키는 핀에 대한 연구는 끊임없이 발표되어 왔으며 지금도 지속적으로 연구되고 있다. 연구되어지는 핀의 형상도 다양한데, 핀 길이 방향을 따라서 단면적이 변화하는 사다리꼴 또는 삼각 핀도 다양한 형상 중의 한 주축을 이루어 왔다. 예를 들면, Abrate와 Newnham[1]는 유한요소법을 사용하여 두꺼운 벽에 붙어있는 삼각 핀에 대한 해석을 하였으며,

Burmeister[2]는 1차원 열균형 적분법을 사용하여 삼각 핀에 대한 성능을 수행하였다. Tanaka[3]는 길이 방향으로 삼각 핀이 부착된 실린더, 원주 방향으로 환형 핀이 부착된 실린더 그리고 수직벽면에서 돌출된 사다리꼴 형상의 핀 등 여러 형상의 핀에 대하여 최소의 체적에 기본을 둔 최적성에 관하여 발표하였으며, Crawford[4]는 핀 바닥의 온도가 주기적으로 변할 때 사다리꼴 형의 끝은 핀의 열전달에 대하여 연구하였다. 또한 Kang과 Lee[5]는 3차원 해석적 방법을 사용하여 사다리꼴 핀의 각 면에서의 열전달에 관한 연구를 수행하였으며, 비선형 열적 물성을 가진 끝이 가늘어지는 핀에 대한 섭동 해석이 Hagen[6]에 의하여 이루어졌다. 우주에서 열전달이 일어날 경우 복사만을 고려한 삼각형상의 핀들에 대한 연구가 Schnurr[7]에 의하여 발표되었고 Georgiou[8]는 내부 열발생이 일어나는 사다리꼴 형상을 가진 pin 핀의 해석과 최적성을 연구하였다. 이와 같이 길이 방향으

* 강원대학교 기계·메카트로닉스 공학부 부교수,
공학박사

로 갈수록 면적이 작아지는 사다리꼴 또는 삼각형상의 핀에 대한 이들 연구에서, 핀 주위는 대칭으로 설정되었다.

본 연구에서는, 삼각 핀의 윗면의 열대류계수를 핀 아래 면의 열대류계수보다 임의로 크거나 같게 놓아서 삼각 핀의 열적 상태를 비대칭으로 만들고, 2차원 변수분리법을 사용하여 핀에 대한 해석을 수행한다. 특히 Kang과 Kim[9]은 삼각 핀에서 그리고 Ünal[10]은 곧은 원통형의 핀에서 각각 핀 끝의 경계조건이 성능에 미치는 영향을 발표하였다. 본 연구에서도 핀 끝의 경계조건이 열전달에 미치는 영향에 관점을 두어서, 핀 끝의 열대류계수는 위아래 면의 열대류계수와 독립적으로 다른 값을 취하고 핀 내부와 주위의 상태는 정상상태로 가정한다. 이와 같은 조건 아래에서, 다른 변수들이 고정되었을 때 열손실을 각각 핀 위아래 면의 Biot 수의 비, 무차원 길이 그리고 핀 끝 면의 Biot 수의 함수로 나타낸다. 같은 양의 열손실이 일어나기 위한 무차원 길이와 핀 끝면의 Biot수의 관계를 고찰한다. 또한 같은 양의 열손실이 일어나기 위한 핀 윗면의 Biot 수와 핀 끝면의 Biot수의 관계를 고찰한다. 이러한 해석을 위하여 핀 뿌리의 온도와 핀 재료의 열전도도는 상수로 가정된다.

2. 이차원 해석

정상상태에서, Fig. 1에서 보여지는 열적 비대칭 삼각 핀에 대한 지배방정식은 식 (1)로 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

지배 방정식 (1)을 풀기 위한 2개의 경계조건과 2개의 에너지 균형식이 식 (2)부터 식 (5)에서 주어진다.

$$\theta = 1 \text{ at } x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + Bi3 \cdot \theta = 0 \text{ at } x = L \quad (3)$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} dy - \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = Bi1 \cdot \sqrt{1+L^2} \int_0^1 \theta dy \quad (4)$$

$$-\int_{-1}^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} dy = Bi1 \cdot \sqrt{1+L^2} \int_0^1 \theta dy + Bi2 \cdot \sqrt{1+L^2} \int_{-1}^0 \theta dy \quad (5)$$

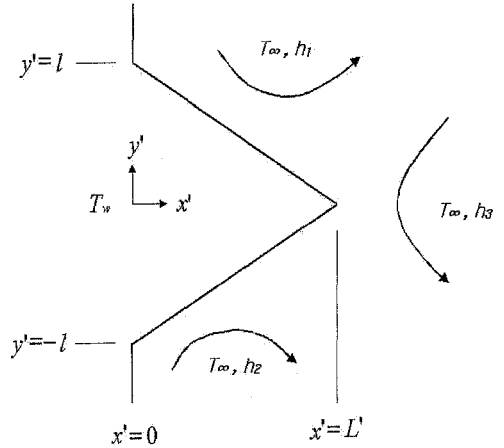


Fig. 1 Geometry of a thermally asymmetric triangular fin

두 개의 경계조건식들 (2)~(3)과 하나의 에너지 균형식 (4)를 이용하여 지배 방정식 (1)을 풀면, 식 (6)과 같은 형태의 온도 분포를 나타내는 식을 얻을 수 있다.

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \cdot f(x) \cdot f(y) \quad (6)$$

여기서,

$$f(x) = \cosh(\lambda_n x) - f_n \cdot \sinh(\lambda_n x) \quad (7)$$

$$f(y) = \cos(\lambda_n y) + g_n \cdot \sin(\lambda_n y) \quad (8)$$

$$N_n = 4 \sin(\lambda_n) / \{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)\} + g_n^2 \cdot \{2\lambda_n - \sin(2\lambda_n)\} \quad (9)$$

$$f_n = \frac{\lambda_n \cdot \tanh(\lambda_n L) + Bi3}{\lambda_n + Bi3 \cdot \tanh(\lambda_n L)} \quad (10)$$

$$g_n = (2\lambda_n \cdot Bi1 \cdot AA_n + 2Bi1 \cdot Bi3 \cdot BB_n - \lambda_n \cdot \sqrt{1+L^2} \cdot CC_n) / (2\lambda_n \cdot Bi1 \cdot DD_n + 2Bi1 \cdot Bi3 \cdot EE_n + \lambda_n \cdot \sqrt{1+L^2} \cdot FF_n) \quad (11)$$

식 (11)에서 보여지는 AA_n 부터 FF_n 항들은 식 (12)부터 식 (17)까지 주어진다.

$$AA_n = L \cdot \cos(\lambda_n) \cdot \sinh(\lambda_n L) + \sin(\lambda_n) \cdot \cosh(\lambda_n L) \quad (12)$$

$$BB_n = L \cdot \cos(\lambda_n) \cdot \cosh(\lambda_n L) + \sin(\lambda_n) \cdot \sinh(\lambda_n L) - L \quad (13)$$

$$CC_n = 2\lambda_n \cdot \sin(\lambda_n) \cdot \sinh(\lambda_n L) + 2Bi_3 \cdot \sin(\lambda_n) \cdot \cosh(\lambda_n L) \quad (14)$$

$$DD_n = \cos(\lambda_n) \cdot \cosh(\lambda_n L) - L \cdot \sin(\lambda_n) \cdot \sinh(\lambda_n L) - 1 \quad (15)$$

$$EE_n = \cos(\lambda_n) \cdot \sinh(\lambda_n L) - L \cdot \sin(\lambda_n) \cdot \cosh(\lambda_n L) \quad (16)$$

$$FF_n = 2Bi_3 \cdot \{1 - \cos(\lambda_n) \cdot \cosh(\lambda_n L)\} - 2\lambda_n \cdot \cos(\lambda_n) \cdot \sinh(\lambda_n L) \quad (17)$$

고유값 λ_n 은 또 다른 하나의 에너지 균형식 (5)를 풀어서 정리한 식 (18)을 사용하여 구할 수 있다.

$$2f_n \cdot \lambda_n \cdot \sin(\lambda_n) \cdot \sqrt{1+L^2} = (GG_n - f_n \cdot L \cdot HH_n) \cdot (Bi_1 + Bi_2) + g_n \cdot (HH_n - f_n \cdot II_n) \cdot (Bi_1 - Bi_2) \quad (18)$$

여기서,

$$GG_n = \sin(\lambda_n) + L \cdot \sinh(\lambda_n L) \quad (19)$$

$$HH_n = \cosh(\lambda_n L) - \cos(\lambda_n) \quad (20)$$

$$II_n = \sinh(\lambda_n L) - L \cdot \sin(\lambda_n) \quad (21)$$

마지막으로 핀 내의 온도분포를 나타내는 식 (6)을 Fourier의 열전도 방정식에 적용하여 얻은 식 (22)를 사용하여 핀으로부터의 열손실을 구할 수 있다.

$$Q = 2k\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} N_n \cdot f_n \cdot \sin(\lambda_n) \quad (22)$$

3. 결과 및 고찰

Fig. 2는 무차원 길이가 5이고 Bi_1 이 0.1일 때 세 경우의 Bi_3 값에 대하여 Bi_2/Bi_1 을 0.8부터 1.0까지 변화시키면서 그에 따른 열손실의 변화를 나타낸다. 세 경우의 Bi_3 에 대하여 모두 Bi_2/Bi_1 이 증가함에 따라 열손실은 선형적으로 증가함을 보여준다. 특히 주지할 점은 핀 끝 면에서의 Biot 수 Bi_3 이 작을수록 열손실이 커지는데, 이는 물리적으로 핀 길이 방향으로의 열전달이 활발치 않음으로써 위아래 면으로의 열전달이 더욱 잘 일어나기 때문으로 생각된다.

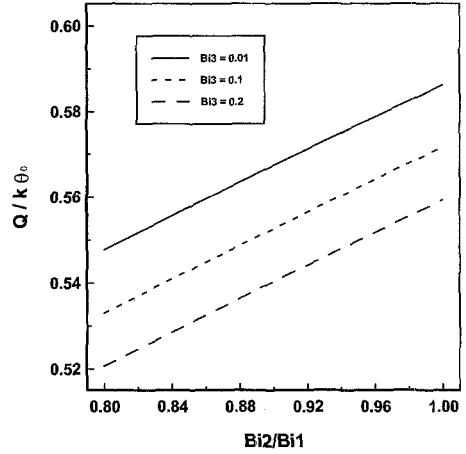


Fig. 2 Non-dimensional heat loss versus Bi_2/Bi_1 for $L=5$ and $Bi_1=0.1$.

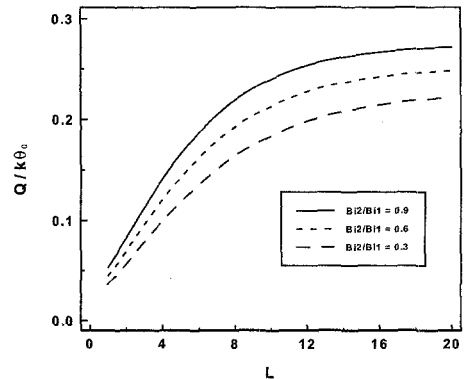
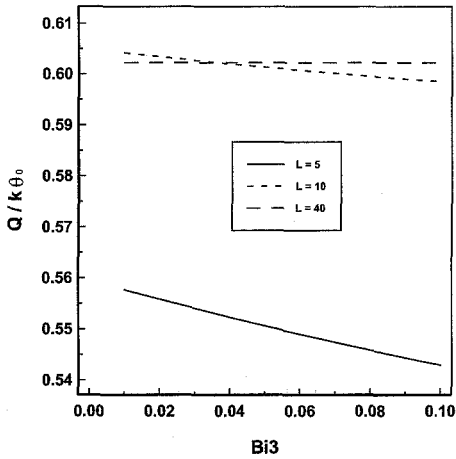


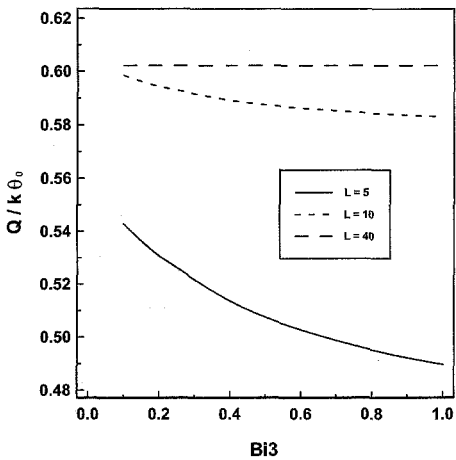
Fig. 3 Non-dimensional heat loss versus L for $Bi_1=0.02$ and $Bi_3=(Bi_1+Bi_2)/2$.

Fig. 3는 핀 윗면의 Biot 수가 0.02이고 끝 면의 Biot 수를 위아래 면의 평균값으로 취했을 때 Bi_2/Bi_1 이 각각 0.3, 0.6 그리고 0.9인 경우에 무차원 길이 L 을 1부터 20까지 변화시키면서 그에 따른 열손실의 변화를 보여준다. 세 경우의 Bi_2/Bi_1 에 대하여 모두 무차원 길이가 약 8까지는 열손실이 급격히 증가하다가 그 후 증가율이 완만해지며, 예상대로 Bi_2/Bi_1 의 값이 클수록 열손실의 값은 커짐을 보여준다.

Fig. 4는 Bi_1 이 0.1이고 Bi_2/Bi_1 이 0.85일 때 Bi_3 의 변화에 따른 열손실의 변화를 나타내는데 Bi_3 수를 (a)에서는 핀 윗면의 Biot 수보다 작은 범위인 0.01부터 0.1까지 변화시켰으며, (b)에서는



(a) $0.01 \leq Bi_3 \leq 0.1$



(b) $0.1 \leq Bi_3 \leq 1.0$

Fig. 4 Non-dimensional heat loss versus Bi_3 for $Bi_1=0.1$ and $Bi_2/Bi_1=0.85$.

핀 윗면의 Biot 수보다 큰 범위인 0.1부터 1.0까지 변화시킨 경우이다. 무차원 길이가 5와 10일 때는 (a), (b) 모두 Fig. 2에서 주지된 바와 같이 Bi_3 가 증가함에 따라 열손실은 감소함을 보여주고 Bi_3 가 0.1보다 작은 범위에서는 열손실이 선형적으로 감소하며, 0.1보다 큰 범위에서는 포물선 형태로 감소하며 점점 그 감소율이 둔화된다. 반면에 무차원 길이가 40에서는 (a), (b) 두 경우 모두 Bi_3 의 변화에 관계없이 열손실이 일정함을 보여주는데, 이는 물리적으로 핀 길이가 아주 길 경우에는 열손실이 핀 끝 면의 Biot 수에 영향을 받지 않음을

Table 1 Non-dimensional temperature along the upper and lower surface line for $Bi_1=0.11$, $Bi_2=0.09$ and $L=5$.

x	$Bi_3 = 0.01$		$Bi_3 = 1.0$	
	$\theta(y)$	$\theta(y)$	$\theta(y)$	$\theta(y)$
0.1	0.9501 (0.98)	0.9689 (-0.98)	0.9588 (0.98)	0.9778 (-0.98)
1	0.7361 (0.8)	0.7481 (-0.8)	0.7539 (0.8)	0.7652 (-0.8)
2	0.5782 (0.6)	0.5852 (-0.6)	0.5656 (0.6)	0.5724 (-0.6)
3	0.4729 (0.4)	0.4767 (-0.4)	0.4037 (0.4)	0.4070 (-0.4)
4	0.4117 (0.2)	0.4133 (-0.2)	0.2601 (0.2)	0.2611 (-0.2)
5	0.3897 (0)	0.3897 (0)	0.1282 (0)	0.1282 (0)

설명한다. 특히 (a)에서 Bi_3 가 약 0.03이하에서는 무차원 길이가 10일 때가 40일 때보다 오히려 큰데, 이는 그 범위의 Bi_3 에서는 핀 길이가 늘어남에 따라 처음에는 열손실이 증가하다가 나중에는 오히려 감소됨을 나타내고 있다.

Table 1은 위아래 면의 Biot 수가 각각 0.11과 0.09로 비대칭이고 무차원 길이가 5일 때, Bi_3 가 위아래 면의 Biot 수의 평균인 0.1보다 각각 10배 작고, 큰 0.01과 1.0인 경우에 대하여 핀의 위아래 면을 따른 온도분포 변화를 제시한다. 예상되듯 핀 끝을 제외하고는 윗면의 온도가 아랫면의 온도보다는 낮게 나타났다. 특히 주지할 점은 위아래 면의 온도가 처음에는 Bi_3 가 0.01인 경우가 0.1인 경우보다 낮지만, x가 1과 2사이에서 그 값들이 역전된다는 것이다. 이는 물리적으로 핀 끝의 Biot 수가 작을수록 핀 뿌리 부분이 가까운 곳에서 이미 많은 열전달이 일어나고, 핀 끝 부분으로 갈수록 주위로의 열손실이 작아짐을 의미하는데 핀으로부터의 전체적인 열손실은 핀 끝의 Biot 수가 작을수록 더욱 커지는 것은 이미 Fig. 2에서 확인되었다.

Fig. 5는 Bi_1 이 0.01이고 Bi_2/Bi_1 이 0.1일 때, 같은 열손실이 일어나기 위한 무차원 길이와 Bi_3 의 관계를 보여준다. 앞에서 기술하였듯이, Bi_3 가 커질수록 열손실이 줄어들기 때문에 Bi_3 가 증가할수록 같은 열손실이 발생하기 위해서는 길이가 길어져야만 한다. 길이 10에 기준을 둔 경우에는 Bi_3 가 0.01부터 0.09까지 증가함에 따라 길이가 선형적으로 증가하는 반면, 길이 20에 기준을 둔 경우에는 약간 곡선적으로 증가하며 그 증가율도 더

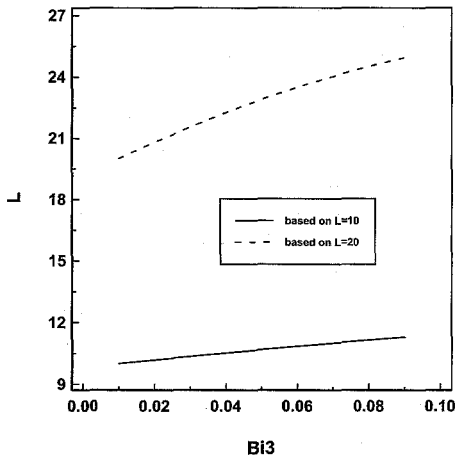


Fig. 5 The relationship between L and Bi_3 for equal amount of heat loss when $Bi_1=0.01$ and $Bi_2/Bi_1=0.1$.

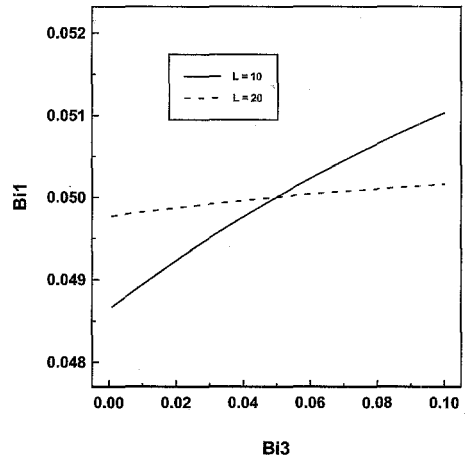


Fig. 7 The relationship between Bi_1 and Bi_3 for equal amount of heat loss for $Bi_2/Bi_1=0.9$.

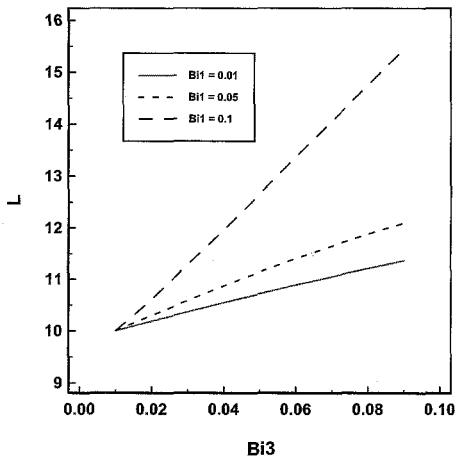


Fig. 6 The relationship between L and Bi_3 for equal amount of heat loss based on $L=10$ and $Bi_3=0.01$ in case of $Bi_2/Bi_1=0.8$.

속 커짐을 보여준다.

핀 위아래 면의 Biot 수의 비가 0.8인 경우 무차원 길이가 10이고, 핀 끝 Biot 수가 0.01일 때의 열손실 량에 기준을 두었을 때 같은 열전달이 일어나기 위한 무차원 길이와 핀 끝 Biot 수의 관계를

Fig. 6에 나타내었다. 세 Bi_1 값에 대하여 모두 Bi_3 가 증가함에 따라 L 은 선형적으로 증가하는데, Bi_1 이 커질수록 기울기가 급격히 커짐을 알 수 있다.

마지막으로 Fig. 7은 Bi_2/Bi_1 이 0.9일 때 각각 L 이 10과 20인 경우에 같은 양의 열손실이 일어나기 위한 Bi_1 과 Bi_3 의 관계를 보여준다. 두 경우의 무차원 길이 모두 Bi_3 가 증가함에 따라 Bi_1 도 증가하는데, 이는 Bi_1 이 고정되었을 때 Bi_3 가 증가하면 열손실이 줄어들기 때문에 같은 양의 열손실을 발생시키기 위하여 Bi_1 도 증가하여야 한다는 물리적 현상과도 일치한다. 또한 길이가 20일 때 Bi_3 의 증가에 따라 Bi_1 의 증가가 완만한 것은 길이가 길어 핀 끝의 Biot 수에 영향을 적게 받는다는 것을 설명한다.

5. 결론

열적 비대칭 삼각 핀에 대한 2차원 수치해석과 결과 및 고찰로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 1) 핀 끝 면에서의 Biot 수가 작아질수록 오히려 삼각 핀에서 발생하는 열손실은 증가한다.
- 2) 핀 끝 면에서의 Biot 수가 위아래 면의 Biot 수보다 상당히 작은 경우에는 무차원 길이가 증가함에 따라 열손실이 처음에는 증가하다가 나중에는 오히려 감소한다.
- 3) 핀 끝의 Biot 수가 작을수록 핀 뿌리 부분에

가까운 곳에서 상대적으로 많은 열전달이 일어나고 핀 끝 부분으로 갈수록 주위로의 열손실이 작아진다.

4) 열적 비대칭 삼각 핀에서 같은 양의 열손실이 발생하기 위해서 핀 끝 Biot 수가 증가함에 따라 무차원 길이는 선형적으로 증가하며 핀 윗면의 Biot 수가 커지면 무차원 길이의 증가율도 커진다.

기호설명

- Bi1 : 핀 윗면 Biot 수 ($= h_1 l / k$)
- Bi2 : 핀 아래면 Biot 수 ($= h_2 l / k$)
- Bi3 : 핀 끝면 Biot 수 ($= h_3 l / k$)
- h_1 : 핀 윗면 열대류계수 ($W/m^2 \text{ } ^\circ C$)
- h_2 : 핀 아래면 열대류계수 ($W/m^2 \text{ } ^\circ C$)
- h_3 : 핀 끝면 열대류계수 ($W/m^2 \text{ } ^\circ C$)
- k : 핀의 열전도율 ($W/m \text{ } ^\circ C$)
- l : 핀 높이의 반 (m)
- L' : 핀 길이 (m)
- L : 무차원 핀 길이 ($= L' / l$)
- Q : 열손실 (W)
- T : 온도 ($^\circ C$)
- T_w : 핀 뿌리 온도 ($^\circ C$)
- T_∞ : 주위 온도 ($^\circ C$)
- x' : 길이 방향 좌표 (m)
- x : 무차원 길이 방향 좌표 ($= x' / l$)
- y' : 높이 방향 좌표 (m)
- y : 무차원 높이 방향 좌표 ($= y' / l$)

그리스 문자

- θ : 무차원 온도 ($(T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$)
- θ_0 : 변형된 핀 뿌리 온도 ($(T_w - T_\infty) \text{ } (^\circ C)$)
- λ_n : 고유값 ($n = 1, 2, 3, \dots$)

상첨자

' : 차원 변수

하첨자

- ∞ : 주위
- 0 : 뿌리
- 1 : 윗면
- 2 : 아래면
- 3 : 끝면
- w : 뿌리

참 고 문 헌

- [1] Abrate, S. and Newnham, P., "Finit Element Analysis of Triangular Fin Attached to a Thick Wall", *Computer & Structures*, Vol. 57, No. 6, pp. 945-957, 1995.
- [2] Burmeister, L.C., "Triangular Fin Performance by the Heat Balance Integral Method", *ASME J. Heat Trans.*, Vol. 101, pp. 562~564, 1979.
- [3] Tanaka, S., "Optimum Fin Geometries for simultaneous Convective and Radiative Heat Transfer", *Transactions of JSME*, Vol.48, No. 436, pp. 2599~2606, 1982.
- [4] Crawford, M., "Heat Transfer in Trapezoidal Straight Fins with a Periodically Varying Base Temperature", *ASME, 82-WA/HT-41*, 1982.
- [5] Lee, S. J. and Kang, H. S., "Trapezoidal Fin Analysis by the 3-D Analytical Method", *Korean Journal Air-conditioning and Refrigeration Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 388~397, 2000.
- [6] Hagen, K. D., "Perturbation Analysis of Tapered Fins with Nonlinear Thermal Properties", *J. Thermophysics*, Vol. 2, No. 3, pp. 276~279, 2000.
- [7] Schnurr, N. M., "Radiation from an Array of Longitudinal Fins of Triangular Profile", *AIAA Journal*, Vol. 13, No. 5, pp. 691~693, 1975.
- [8] Georgiou, E. N., "Analysis and Optimization of Convective Pin Fins with Trapezoidal Profile having Internal Heat Generation Density", *J. Frankline Inst.* Vol. 335B, No. 1, pp. 179~197, 1998.
- [9] Kang, H. S. and Kim, S. J., "Errors in the Triangular Fin Analysis under Assuming the Fin Tip is Insulated", *KSME Journal*, Vol. 18, No. 7, pp. 1783~1788, 1994.
- [10] Ünal, H. C., "The Effect of the Boundary Condition at a Fin Tip on the Performance of the Fin with and without Internal Heat Generation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, No. 7, pp. 1483~1496, 2000.