

# 부분하중을 받는 이방성 평판의 해석 및 컴퓨터 프로그램의 개발 Analysis for A Partially Loaded Orthotropic Plate And Development of Computer Program

시상광\*, 김진규\*\*

See, Sang Kwang\*, Kim, Jin Kyu\*\*

## <Abstract>

In this study, an exact solution of governing differential equation for the bending problem of partially loaded orthotropic rectangular plates is presented and also its computer program is developed. The method requires that two opposite edges be clamped or simply supported, or one edge clamped and the other simply supported. Any combination of boundary conditions could exist along the other edges. The plate could be subjected to uniform, partially uniform, and line loads. The solution for the deflection of rectangular plate is expressed as a Levy type single Fourier series and the loads are expressed as a corresponding series. The advantage of the solution is that it overcomes the limitations of the previous Navier's and Levy's methods (limitation of boundary condition and loading conditions of plate), it is easy to program on a computer and it becomes fast to solve the bending problem with computer program. Calculations are presented for isotropic and orthotropic plates with different loading and boundary conditions. Comparisons are made for the isotropic plate with various boundary conditions between the result of this paper and the result of Navier, Levy and Szilard. The deflections were in excellent agreement.

**Key words** : *isotropic plate, orthotropic plate, partially loaded*

\* 정회원, 안동과학대학 토목과 전임강사, 工博  
경북대학교졸업/seesk@andong-c.ac.kr

\*\* 정회원, 영남이공대학 토목과 조교수, 工博  
경북대학교졸업/jkkim@ync.ac.kr

\* Full Time Instructor, Dept. of Civil Eng.  
Andong Science College

\*\* Assistant Professor, Dept of Civil Eng. Yeungnam  
College of Science & Technology, Dr. Eng.

## 1. 서론

평판 구조물 해석은 재료의 성질인 응력과 변형율의 관계에 의하여 선형 또는 비선형으로 구분된다. 지금까지 평판의 기본식을 풀이하는 여러 가지 방법들이 개발되었는데, 정확한 해를 구할 수 있는 간단한 하중 및 경계조건을 가지는 평판이외에는 수치해석에 의한 방법이 사용되어 왔다.

관련문헌<sup>1)2)4)6)7)</sup>들은 여러 모양의 등방성 평판에 관한 광범위한 관심을 보이고 있지만, 이방성 평판에 대해서는 실 구조물에 많이 활용되고 있음에도 불구하고 많은 관심이 없었다. 따라서 이방성 평판에 관하여, 특히 그 중에서도 여러 가지 경계조건을 갖고 여러 형태의 하중을 받는 이방성 평판의 경우 더욱 깊은 연구가 절실히 필요하다.

힘을 받는 이방성 사각형 평판의 해를 구하는데 있어서 지금까지는 Levy의 방법<sup>3)</sup>과 Navier의 방법이 일반적으로 정확한 해석방법으로 알려져 왔다. 이들의 방법은 지배 미분 방정식을 삼각함수의 single series 와 double series를 이용하여 대수학적 방정식으로 변환시킴으로서 용이하게 해를 구할 수 있는 장점이 있다. 그러나 Navier의 방법은 평판의 네 끝단이 단순 지지일 경우에만 적용되며, Levy의 방법은 서로 마주보는 두 끝단이 단순 지지일 경우에만 적용이 되는 단점이 있다. 이러한 풀이 해의 한계를 극복하고자 유한요소법, 이방향유한차분법, 유한띠요소법, 일방향유한차분법, framework방법, 에너지방법 등 여러 가지 근사 해법이 소개되었으나 이러한 방법들은 각각의 요소들의 개수에 따라 해석 결과에 정확도의 문제가 유발된다.

본 연구에서는 Navier와 Levy방법의 장점인 미분 방정식을 대수학적 방정식으로 변환시키는 방법을 유지하면서 그들의 단점인 경계조건에 한계뿐만 아니라 하중조건에 한계까지도 극복할 수 있는 평판해석 방법과 이를 근거로 해석 프로그램을 개발하였다.

## 2. 이방성 평판의 기본 미분 방정식

수직 하중  $q(x, y)$ 을 받는 이방성 평판에서 두께에 비하여 처짐이 작은 경우, 평판의 한 요소에 작용하는 힘은 Fig. 1과 같다.

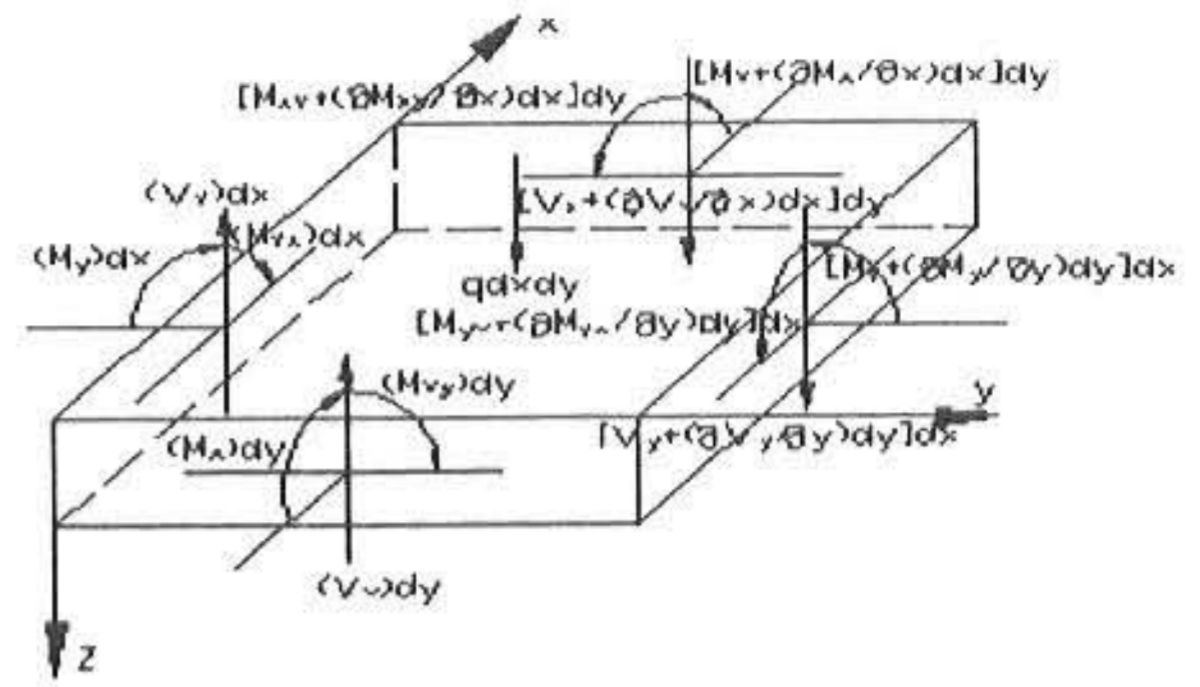


Fig. 1. Forces on a Rectangular Plate Element

평판의 각 면에서 휨 모멘트  $M_x$ ,  $M_y$ 와 비틀림 모멘트  $M_{xy}$  그리고 전단력  $V_x$ ,  $V_y$ 가 작용한다. 평판의 두께가 넓이나 길이에 비해 작은 경우 이들 힘들은  $x, y$ 함수 만으로 나타낼 수 있다. 그림 1.의 평판요소에 대하여 힘의 평형방정식과 처짐과 변형율의 관계를 나타내는 변위방정식, 그리고 힘과 처짐의 관계를 나타내는 구성방정식을 이용하여 서로의 관계식을 적용하면 식 (1)과 같이 이방성 평판의 처짐에 관한 기본 미분 방정식이 유도된다.

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (1)$$

여기서  $2H$ 는  $\mu_y D_x + 4D_{xy} + \mu_x D_y$ ,  $q(x, y)$ 는 평판에 작용하는 수직하중,  $w(x, y)$ 는 평판의 처짐함수,  $D_x$ ,  $D_y$ 는 이방성 평판의 각 방향 휨강성,  $D_{xy}$ 는 비틀림 강성,  $E_x$ ,  $E_y$ 는 탄성계수,  $G$ 는 전단계수,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ 는 포아송 비이다. 식 (1)은 이방성 평판 해석에 기초가 되는 중요한 지배 방정식이다. 이 선형 미분 방정식을 수학적 개념으로 풀고 그 값을 가지고 구성 방정식에 적용하면 전단력  $V_x$ ,  $V_y$  그리고 모멘트  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ 를 계산할 수 있다.

## 3. 이방성 평판의 해석

본 연구에서는 식 (1)의 이방성 평판의 지배함수의 해를 구하는데 있어 Navier, Levy방법을 개선하여 여러 형태의 경계조건 및 하중조건을 적용시킬 수 있는 방법을 개발하였다. 수직하중  $q(x, y)$ 을 받고 있는 이방성 평판의 처짐  $w(x, y)$ 에 관한 지배 미분방정식을 풀기 위하여 처짐함수  $w(x, y)$ 를  $F(x)$

와  $G(y)$ 함수의 곱인 변수분리 형태로 놓으면 식 (2)와 같다.

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) G_n(y) \quad (2)$$

여기서  $F_n(x)$ 는  $n$ 번째 처짐 mode의  $x$ 방향 처짐함수,  $G_n(y)$ 는  $n$ 번째 처짐 mode의  $y$ 방향 처짐함수이다. 식 (1) 선형 편미분 방정식의 일반적인 해는 다음과 같이 두 함수의 합으로 이루어져 있다.

$$w(x, y) = w_H(x, y) + w_P(x, y) \quad (3)$$

여기서  $w_H(x, y)$ 는 일반해 이고,  $w_P(x, y)$ 는 특이해 이다.  $y$ 방향의 처짐함수  $G_n(y)$ 는  $y$ 방향의 경계조건을 만족시켜야하고, 처짐함수  $w(x, y)$ 가 변수분리의 형태로 되기 위한 orthogonal condition을 만족해야한다. 따라서  $y$ 방향의 처짐함수  $G_n(y)$ 은 orthogonal condition을 만족하는 vibrating beam의  $n$ 번째 mode에 관한 eigen function을 이용하여 일반해를 구할 수 있으며 이에 대한 상수는 경계조건을 사용하여 결정할 수 있다.  $y$ 방향의 처짐함수  $G_n(y)$ 이 결정된 후 평판의 지배함수 양변에  $n \neq m$ 인  $m$  번째 mode의  $G_m(y)$ 을 곱하고  $y=0$  에서  $y=b$ 까지 적분을 시켜주면, orthogonal condition 의하여  $n \neq m$ 인 경우는 모두 0이 되므로 결국 지배 방정식은 식 (4)와 같이  $m$ 번째 처짐 mode의  $x$ 에 관한 상미분 방정식으로 바뀌어 진다.

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\partial^4 F_m(x)}{\partial x^4} \int_0^b G_m^2(y) dy \\ & + 2H \frac{\partial^2 F_m(x)}{\partial x^2} \int_0^b \frac{\partial^2 G_m(y)}{\partial y^2} G_m(y) dy \\ & + D_y F_m(x) \int_0^b \frac{\partial^4 G_m(y)}{\partial y^4} G_m(y) dy \\ & = \int_0^b q(x, y) G_m(y) dy \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)의 해는 하중조건 및  $x$  방향의 경계조건에 의하여 구해진다. 식 (4)에서  $q(x, y)$ 를  $x$ 와  $y$  방향의 함수의 곱인  $q(x, y) = Q_0 f(x) g(y)$ , ( $Q_0 =$  상수)의 형태라하고 양변에  $\int_0^b G_m^2(y) dy$ 로 각각 나누어 주면 이 식은  $x$ 에 대한 선형 미분 방정식이된다. 따라서 함수

$F_m(x)$ 는 일반해  $F_{mH}(x)$  와 특이해  $F_{mP}(x)$ 의 합 형태를 갖고 따라서 처짐 함수는 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} F_m(x) G_m(y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} [F_{mH}(x) + F_{mP}(x)] G_m(y) \quad (5) \\ &= w_H(x, y) + w_P(x, y) \end{aligned}$$

$y$  축 방향으로 부분하중을 받는 평판에 대하여 특이해를 구하는 문제에서 본 연구에서는 평판에 작용하는 외부하중이 Fig. 2와 같이 등분포인 경우로 제한한다. 직선하중의 경우는 부분하중에 대한 해를 이용하여 하중의 구간을 변화시킴으로서 그 해를 쉽게 계산할 수 있다.

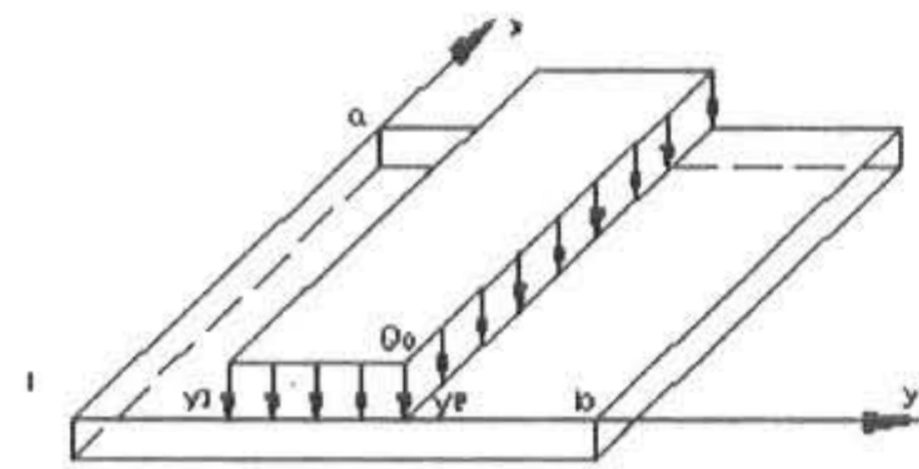


Fig. 2. Partially Loaded Plate

$y$ 축 방향으로 부분하중을 받는 평판에 대한 식 (5)의 특이해는 식 (6)과 같다. 여기서 각 변수는 식 (7)에서 식 (10)과 같이 정식화 되며  $y_1$ 과  $y_2$ 는 각각  $y$  방향으로 하중의 시작점과 끝점이다.

$$F_{mP} = \frac{Q_0 g_{1m}}{D_y \eta_m^4 g_{4m}} \quad (6)$$

$$g_{1m} = \frac{\int_{y_k - \nabla y}^{y_k + \nabla y} G_m(y) dy}{\int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (7)$$

$$g_{4m} = \frac{\int_{y_k - \nabla y}^{y_k + \nabla y} G_m^{(4)}(y) G_m(y) dy}{\eta_m^4 \int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (8)$$

$$\eta_m^4 = \frac{\int_{y - \nabla y}^{y + \nabla y} \frac{\partial^4 G_m(y)}{\partial y^4} G_m(y) dy}{\int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (9)$$

$$y_k = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \nabla y = \frac{y_2 - y_1}{2} \quad (10)$$

식 (5)의 일반해는 식 (11)로 정식화 된다.

$$F_{m1}(x) = A_m e^{\xi_{m1}x} + B_m e^{\xi_{m2}x} + C_m e^{\xi_{m3}x} + D_m e^{\xi_{m4}x} \quad (11)$$

여기서

$$\xi_{m1} = \eta_m \sqrt{\beta} [ g_{2m} + \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} ]^{1/2} \quad (12)$$

$$\xi_{m2} = \eta_m \sqrt{\beta} [ g_{2m} - \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} ]^{1/2} \quad (13)$$

$$\xi_{m3} = -\eta_m \sqrt{\beta} [ g_{2m} + \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} ]^{1/2} \quad (14)$$

$$\xi_{m4} = -\eta_m \sqrt{\beta} [ g_{2m} - \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} ]^{1/2} \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{D_y}{D_x}, \quad \beta = \frac{H}{D_x} \quad (16)$$

$$g_{2m} = -\frac{\int_0^b G_m''(y) G_m(y) dy}{\eta_m^2 \int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (17)$$

이고  $A_m, B_m, C_m, D_m$ 은 적분상수이며  $g_{4m}$ 은 식 (8)에서 적분구간을 0에서 b까지 확장한 값이다. 식 (11)은 x, y 방향의 강성비  $\alpha = D_y/D_x$ ,  $\beta = H/D_x$ 에 따라서 다음과 같이 3가지의 경우로 나누어진다.

$$\text{Case 1) } \frac{g_{2m}^2}{g_{4m}} > \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (18)$$

$$\text{Case 2) } \frac{g_{2m}^2}{g_{4m}} = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (19)$$

$$\text{Case 3) } \frac{g_{2m}^2}{g_{4m}} < \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (20)$$

앞에서 구한 처짐 함수에서 특이해가 상수이므로 x 방향에 관한 함수  $F_m(x)$ 의 상수는 식 (5)를 식(21)로 변형시켜 결정한다.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{mP}(x) [1 + F_{mH}(x)] G_m(y) \quad (21)$$

평판의 x 와 y 의 좌표축 결정은 다음과 같다. y축과 평행한 평판의 양 끝단의 경계조건이 서로 대칭인 경우에는 그림 3과 같이 x축은 평판 가장 자리에 y축은 평판 중앙에 놓고, 대칭이 아닌 경우에는 그림 4와 같이 x, y축을 모두 평판의 가장 자리에 놓고 경계조건을 이용함으로써 적분상

수  $A_m, B_m, C_m, D_m$ 를 쉽게 결정할 수 있다.

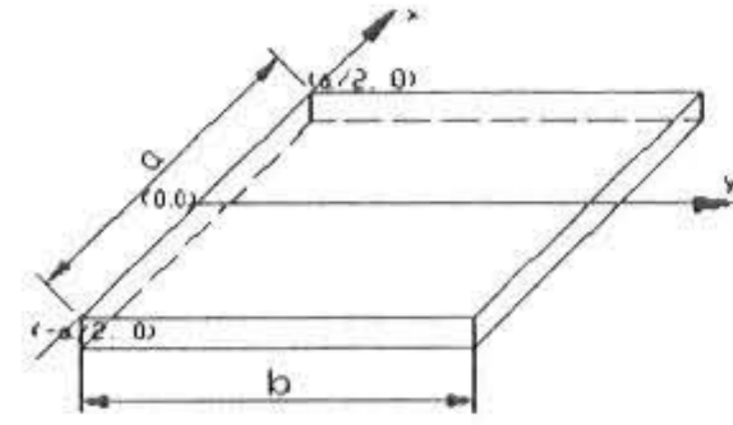


Fig 3. Rectangular Coordinates of Symmetric Plate

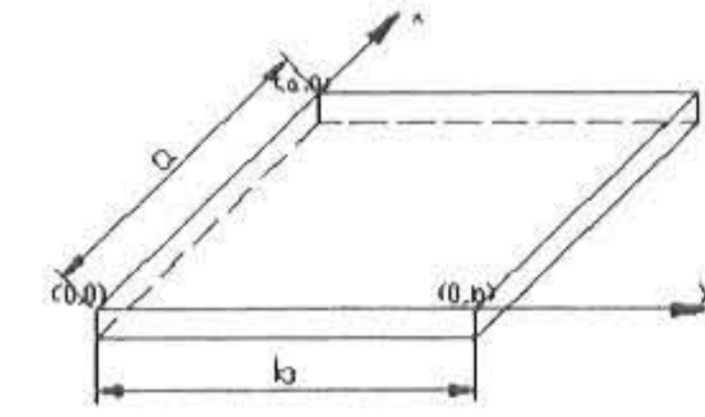


Fig 4. Rectangular Coordinates of Nonsymmetric Plate

이상의 이론을 이용한 해석 프로그램의 전산 알고리즘은 다음과 같다. 먼저 평판재료의 물성치와 경계조건 그리고 하중의 분포와 크기를 입력한다. 경계조건 입력자료를 이용하여 적분상수를 결정한 다음 y 방향 일반해를 계산한다. 다음으로 경계조건에 따른 x 방향 일반해를 계산하고 하중조건에 따른 특이해를 계산한다. 계산된 각 방향 일반해와 특이해의 결과를 이용하여 처짐량을 산출한 다음 각 방향 모멘트와 전단력을 계산하여 그 결과를 출력한다.

#### 4. 부분하중을 받는 평판의 해석 예

본 연구에서는 사용된 이론 및 해석 프로그램의 정당성을 증명하기 위해 부분하중을 받는 등방성 평판과 이방성 평판의 1) 네 단이 모두 고정단일 때, 2) 네 단이 모두 단순지지단일 때, 그리고 3) 두 단은 고정단, 나머지 두 단은 단순지지단 일 경우의 예제를 풀이하였으며 그 결과를 지금까지 알려지은 Levy방법과 Navier방법 과 비교하였다.

##### 4.1. 등방성 평판의 해석 예

등방성 평판은 x와 y방향으로 재료의 성질인 탄성계수와 포아손비가 각각 같으므로 강성비  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 모두 1.0으로 두고 평판을 계산 하였다.

1) 평판의 가장자리가 모두 고정단일 때

평판의 네 단이 모두 고정단일 경우, Fig. 2 에서 보는 바와 같이 평판의 y축으로 b/3지점에서 2b/3 지점까지 부분 하중을 받는 경우를 각각 고려하여 여러 위치에서의 처짐과 모멘트를 계산하였다. 이때 평판의 세로의 길이와 가로의 길이의 비는 b/a=1.5 인 직사각형 평판을 고려하였다. 부분하중을 받는 직사각형 평판의 각 점에서의 처짐과 모멘트는 Table 1과 같다.

Table 1. Results of 4 Clamped Plate Analysis  
(b/a = 1.5 ,  $\alpha = \beta = 1.0$ )

점	x좌표	y좌표	w(xD <sub>v</sub> /Qob <sup>4</sup> )	M <sub>x</sub> (/Qob <sup>2</sup> )	M <sub>y</sub> (/Qob <sup>2</sup> )
1	0.25a	b/6	0.0000330	-.158E-03	-.189E-02
2	0.25a	2b/6	0.0001170	.254E-02	.183E-02
3	0.25a	3b/6	0.0001690	.468E-02	.513E-02
4	0.25a	4b/6	0.0001180	.258E-02	.188E-02
5	0.25a	5b/6	0.0000347	-.103E-03	-.181E-02
6	0.00a	b/6	0.0000601	.126E-02	-.263E-02
7	0.00a	2b/6	0.0002030	.763E-02	.424E-02
8	0.00a	3b/6	0.0002890	.116E-01	.964E-02
9	0.00a	4b/6	0.0002060	.774E-02	.435E-02
10	0.00a	5b/6	0.0000630	.140E-02	-.248E-02
11	-0.25a	b/6	0.0000330	-.158E-03	-.189E-02
12	-0.25a	2b/6	0.0001170	.254E-02	.183E-02
13	-0.25a	3b/6	0.0001690	.468E-02	.513E-02
14	-0.25a	4b/6	0.0001180	.258E-02	.188E-02
15	-0.25a	5b/6	0.0000347	-.103E-03	-.181E-02

2) 평판의 가장자리가 모두 단순지지단일 때

Table 2. Results of 4 Simply Supported Plate Analysis  
(b/a = 1.5 ,  $\alpha = \beta = 1.0$ )

점	x좌표	y좌표	w(xD <sub>v</sub> /Qob <sup>4</sup> )	M <sub>x</sub> (/Qob <sup>2</sup> )	M <sub>y</sub> (/Qob <sup>2</sup> )
1	0.25a	b/6	.249E-03	.570E-02	.185E-02
2	0.25a	2b/6	.485E-03	.126E-01	.792E-02
3	0.25a	3b/6	.594E-03	.165E-01	.127E-01
4	0.25a	4b/6	.485E-03	.126E-01	.792E-02
5	0.25a	5b/6	.249E-03	.570E-02	.185E-02
6	0.00a	b/6	.350E-03	.773E-02	.270E-02
7	0.00a	2b/6	.676E-03	.162E-01	.107E-01
8	0.00a	3b/6	.825E-03	.206E-01	.167E-01
9	0.00a	4b/6	.676E-03	.162E-01	.107E-01
10	0.00a	5b/6	.350E-03	.773E-02	.270E-02
11	-0.25a	b/6	.249E-03	.570E-02	.185E-02
12	-0.25a	2b/6	.485E-03	.126E-01	.792E-02
13	-0.25a	3b/6	.594E-03	.165E-01	.127E-01
14	-0.25a	4b/6	.485E-03	.126E-01	.792E-02
15	-0.25a	5b/6	.249E-03	.570E-02	.185E-02

평판의 네 단이 모두 단순지지단일 경우에도 앞의 경우와 마찬가지로 평판의 y축으로 b/3지점

에서 2b/3지점 까지 부분 하중을 받는 경우에 각각의 점에 처짐과 모멘트를 계산하였다. 평판의 세로길이와 가로의 길이의 비는 b/a=1.5인 직사각형 평판을 고려하였으며 평판의 각 점에서 처짐과 모멘트는 Table 2와 같다.

3) 2고정단, 2단순지지단 평판일 때

평판의 가장자리가 두 단은 고정단, 나머지 두 단은 단순지지단 일 때 그림 5에서 보는 바와 같이 평판의 y축으로 b/3지점에서 2b/3지점까지 부분 하중을 받는 경우의 각각의 점에서 처짐을 계산하였다. 이때 평판의 세로의 길이와 가로의 길이의 비는 b/a=1.5인 직사각형 평판을 고려하였다. 부분하중을 받는 직사각형 평판의 각 점에서의 처짐은 Table 3.과 같다.

Table 3. Results of 2 clamped 2 Simply Supported Plate Analysis  
(b/a = 1.5 ,  $\alpha = \beta = 1.0$ )

점	x좌표	y좌표	w(xD <sub>v</sub> /Qob <sup>4</sup> )
1	0.25a	b/6	.453E-04
2	0.25a	2b/6	.153E-03
3	0.25a	3b/6	.225E-03
4	0.25a	4b/6	.181E-03
5	0.25a	5b/6	.843E-04
6	0.50a	b/6	.953E-04
7	0.50a	2b/6	.307E-03
8	0.50a	3b/6	.445E-03
9	0.50a	4b/6	.370E-03
10	0.50a	5b/6	.182E-03
11	0.75a	b/6	.788E-04
12	0.75a	2b/6	.254E-03
13	0.75a	3b/6	.369E-03
14	0.75a	4b/6	.307E-03
15	0.75a	5b/6	.152E-03

4.2. 이방성 평판의 해석 예

이방성 평판은 x와 y방향으로 재료의 성질인 탄성계수와 포아손비가 서로 다르므로 x와 y방향으로의 강성비를 달리하여  $\beta=1.0$ ,  $\alpha=3.0$ 으로 두고 계산하였다. 이때 부분 하중의 분포와 평판의 가로와 세로의 길이 비는 등방성 평판의 경우와 같이 하였다.

1) 평판의 가장자리가 고정단 일 때

네 단이 모두 고정단인 부분하중을 받는 이방성 평판의 각 점에서의 처짐과 모멘트계산 결과는 Table 4 와 같다.

Table 4. Results of 4 Clamped Orthotropic Plate Analysis

( $b/a = 1.5, \alpha=3.0, \beta=1.0$ )

점	x좌표	y좌표	$w(\times D_y/Q_0b^4)$	$M_x/(Q_0b^2)$	$M_y/(Q_0b^2)$
1	0.25a	b/6	.907E-04	-.685E-03	-.348E-02
2	0.25a	2b/6	.283E-03	.287E-02	.494E-02
3	0.25a	3b/6	.391E-03	.534E-02	.109E-01
4	0.25a	4b/6	.287E-03	.293E-02	.507E-02
5	0.25a	5b/6	.948E-04	-.606E-03	-.328E-02
6	0.00a	b/6	.162E-03	.839E-04	-.445E-02
7	0.00a	2b/6	.487E-03	.717E-02	.107E-01
8	0.00a	3b/6	.661E-03	.112E-01	.200E-01
9	0.00a	4b/6	.493E-03	.729E-02	.109E-01
10	0.00a	5b/6	.169E-03	.247E-03	-.409E-02
11	-0.25a	b/6	.907E-04	-.685E-03	-.348E-02
12	-0.25a	2b/6	.283E-03	.287E-02	.494E-02
13	-0.25a	3b/6	.391E-03	.534E-02	.109E-01
14	-0.25a	4b/6	.287E-03	.293E-02	.507E-02
15	-0.25a	5b/6	.948E-04	-.606E-03	-.328E-02

2) 평판의 가장자리가 모두 단순지지단일 때

네 단이 모두 단순 지지단인 부분하중을 받는 이방성 평판의 각 점에서의 처짐과 모멘트계산 결과는 Table 5와 같다.

Table 5. Results of 4 Simply Supported Orthotropic Plate Analysis

( $b/a = 1.5, \alpha=3.0, \beta=1.0$ )

점	x좌표	y좌표	$w(\times D_y/Q_0b^4)$	$M_x/(Q_0b^2)$	$M_y/(Q_0b^2)$
1	0.25a	b/6	.665E-03	.609E-02	.794E-02
2	0.25a	2b/6	.123E-02	.131E-01	.204E-01
3	0.25a	3b/6	.146E-02	.169E-01	.284E-01
4	0.25a	4b/6	.123E-02	.131E-01	.204E-01
5	0.25a	5b/6	.665E-03	.609E-02	.794E-02
6	0.00a	b/6	.933E-03	.828E-02	.113E-01
7	0.00a	2b/6	.170E-02	.168E-01	.272E-01
8	0.00a	3b/6	.202E-02	.212E-01	.368E-01
9	0.00a	4b/6	.170E-02	.168E-01	.272E-01
10	0.00a	5b/6	.933E-03	.828E-02	.113E-01
11	-0.25a	b/6	.665E-03	.609E-02	.794E-02
12	-0.25a	2b/6	.123E-02	.131E-01	.204E-01
13	-0.25a	3b/6	.146E-02	.169E-01	.284E-01
14	-0.25a	4b/6	.123E-02	.131E-01	.204E-01
15	-0.25a	5b/6	.665E-03	.609E-02	.794E-02

3) 2고정단, 2단순지지단 평판일 때

Fig. 5에서 보는 바와 같이 평판의 가장자리가 두 단은 고정단, 나머지 두 단은 단순지지단 일때, 이방성 평판의 y축으로 b/3지점에서 2b/3지점까지 부분하중을 받는 경우에 대하여 각각의 점에서 처짐과 모멘트를 계산하였으며 그 결과는 Table 6과 같다.

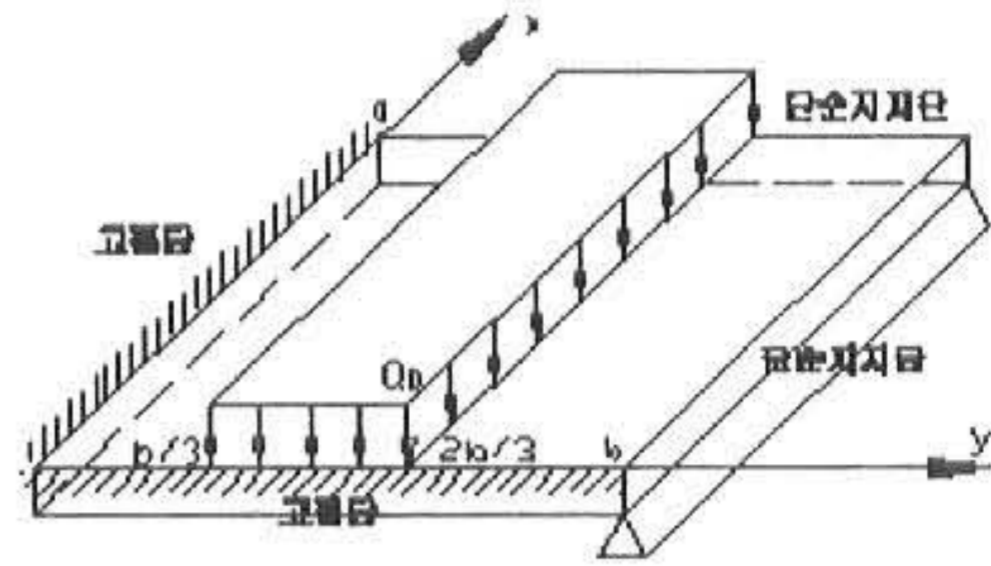


Fig. 5. 2 Clamped 2 Simply Supported Plate

Table 6. Results of 2 Clamped 2 Simply Supported Orthotropic Plate Analysis

( $b/a = 1.5, \alpha=3.0, \beta=1.0$ )

점	x좌표	y좌표	$w(\times D_y/Q_0b^4)$	$M_x/(Q_0b^2)$	$M_y/(Q_0b^2)$
1	0.25a	b/6	.116E-03	-.512E-01	-.497E-01
2	0.25a	2b/6	.364E-03	.272E+00	.247E+00
3	0.25a	3b/6	.528E-03	-.221E+00	-.192E+00
4	0.25a	4b/6	.457E-03	.150E-01	.174E-01
5	0.25a	5b/6	.239E-03	.685E-01	.619E-01
6	0.50a	b/6	.238E-03	-.583E-03	-.713E-02
7	0.50a	2b/6	.720E-03	.807E-02	.120E-01
8	0.50a	3b/6	.103E-02	.137E-01	.246E-01
9	0.50a	4b/6	.921E-03	.114E-01	.184E-01
10	0.50a	5b/6	.503E-03	.535E-02	.666E-02
11	0.75a	b/6	.196E-03	.645E+47	.581E+47
12	0.75a	2b/6	.597E-03	-.169E+48	-.152E+48
13	0.75a	3b/6	.860E-03	.646E+47	.581E+47
14	0.75a	4b/6	.764E-03	.119E+48	.107E+48
15	0.75a	5b/6	.416E-03	-.156E+48	-.140E+48

4.3. 결과 비교

본 연구에서는 등분포 하중을 받는 등방성 평판의 계산 결과를 Navier의 방법과 Levy의 방법과 비교하였으며, 또한 선하중을 받는 평판의 처짐을 계산하여 R. Szilard<sup>5)</sup>의 결과와 비교하였다.

1) Navier의 방법과 결과 비교

등분포하중을 받는 평판의 네 단이 모두 단순지지단일 경우에 본 논문의 결과를 이용한 처짐의 계산값과 Navier의 방법으로 계산한 처짐의 값들을 비교하여 나타내었다. 평판은 두께 0.00283 in, x 방향의 길이 20 in, y 방향의 길이 20 in인 정사각형 평판을 대상으로 등분포 하중 2.0 psi를 작용시켰다. 또한 포아손비는 0.3 이고, 탄성계수는  $3 \times 10^7$  을 사용 하였다. 두 방법에 의한 처짐 결과는 표 7과 같으며 본 연구의 결과는 정확해법인 Navier방법의 결과와 일치하고 있음을 볼 수 있다. 결과 비교 점은 Fig. 6과 같다.

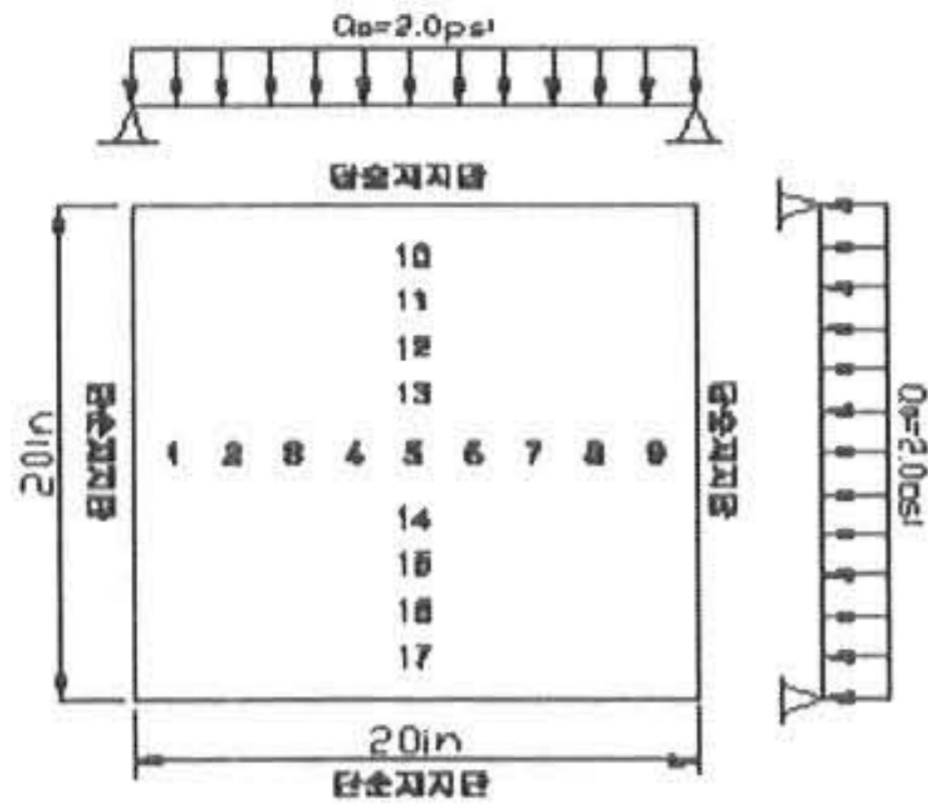


Fig. 6. Comparison point

Table 7. Comparison of Results with Navier's Solution

지점	Navier 방법에 의한 평판의 처짐	본 연구에 의한 평판의 처짐
1	0.676E+01	.676E+01
2	0.127E+02	.127E+02
3	0.171E+02	.171E+02
4	0.199E+02	.199E+02
5	0.209E+02	.209E+02
6	0.199E+02	.199E+02
7	0.171E+02	.171E+02
8	0.127E+02	.127E+02
9	0.676E+01	.676E+01
10	0.676E+01	.676E+01
11	0.127E+02	.127E+02
12	0.171E+02	.171E+02
13	0.199E+02	.199E+02
14	0.199E+02	.199E+02
15	0.171E+02	.171E+02
16	0.127E+02	.127E+02
17	0.676E+01	.676E+01

## 2) Levy의 방법과 결과 비교

본 연구의 결과와 Levy방법의 결과를 비교하였다. 등분포하중을 받는 네 단이 모두 고정단인 정사각형과 직사각형 평판을 대상으로 하였으며 각 평판의 중앙점에서의 처짐과 모멘트를 계산하여 그 비교 값을 Table 8에 나타내었다. 표에서 알 수 있듯이 초기 변수인 처짐은 본 논문의 결과와 정확해법인 Levy의 결과와 매우 접근함을 알 수 있다. 그러나 이차변수인 모멘트는 약간의 오차를 나타내며 이것은 컴퓨터에 의한 round off error로 생각되어 진다.

Table 8. Comparison of Results with Levy's Solution

	b/a	wDy/Qob <sup>4</sup>	Mx/Qob <sup>2</sup>	My/Qob <sup>2</sup>
Levy방법에 의한 계산결과	1.0	0.00126	0.0231	0.0231
	1.5	0.00220	0.0368	0.0203
	2.0	0.00254	0.0412	0.0158
본 연구의 계산결과	1.0	0.00127	0.0233	0.0240
	1.5	0.00222	0.0378	0.0207
	2.0	0.00257	0.0419	0.0161

## 3) 선 하중을 받는 평판의 비교

선 하중을 받는 정사각형 평판의 네 단이 모두 단순지지단일 경우에 본 연구의 계산결과를 이용한 처짐의 계산 값과 R. Szilard의 방법을 이용한 처짐의 계산 값을 Table 9에서 비교하였다. 이때 각 방법의 평판 좌표와 처짐을 계산한 점과 작용하는 선 하중의 위치는 Fig. 7과 같다. 비교에서 알 수 있듯이 두 방법은 일치된 결과를 나타내고 있다.

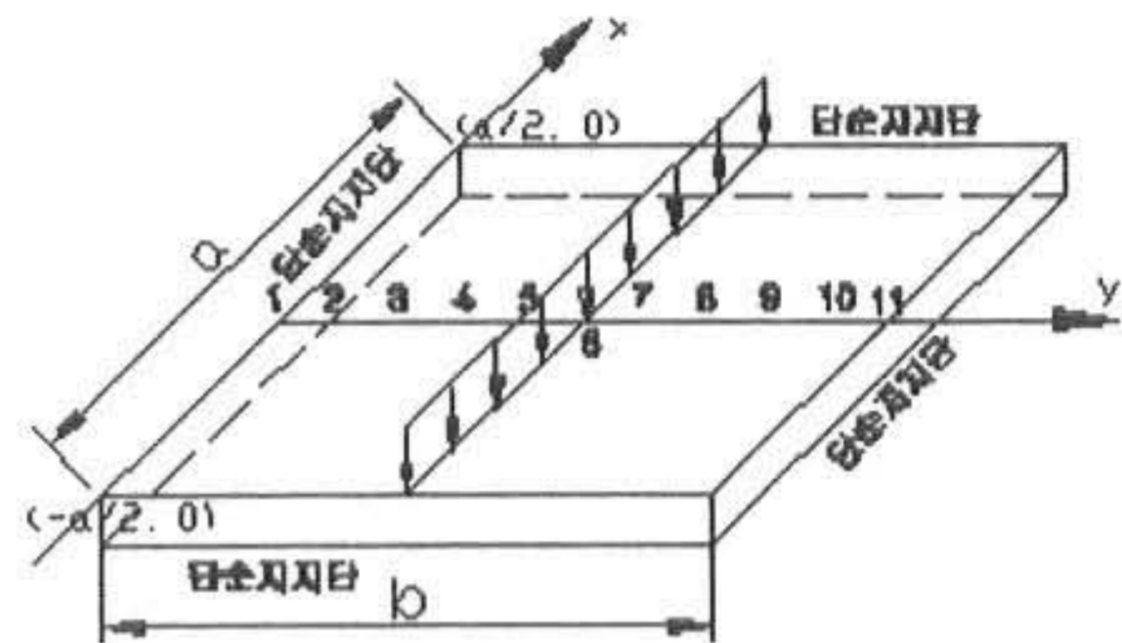


Fig. 7. Comparison point

Table 9. Comparison of Results with R. Szilard's Solution

	y 좌표	본 연구의 계산결과 wxDy/Qob <sup>4</sup>	R. Szilard의 계산 결과 wxDy/Qob <sup>4</sup>
1	0.0b	.000E+00	0.000E+00
2	0.1b	.914E-04	0.914E-04
3	0.2b	.179E-03	0.179E-03
4	0.3b	.256E-03	0.256E-03
5	0.4b	.313E-03	0.313E-03
6	0.5b	.337E-03	0.337E-03
7	0.6b	.313E-03	0.313E-03
8	0.7b	.256E-03	0.256E-03
9	0.8b	.179E-03	0.179E-03
10	0.9b	.914E-04	0.914E-04
11	1.0b	-.256E-10	-.256E-10

## 5. 결론

본 연구에서는 부분하중을 받는 이방성 평판의 미분 방정식을 직접 풀이하여 이것을 실용화 할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 본 연구에 사용된 해석 방법은 삼각함수의 single series를 이용한 Levy방법을 개선하여 평판의 서로 마주보는 두 끝단이 단순지지단 뿐만 아니라 고정단의 경우와 고정단과 단순지지단이 서로 함께 하는 경우, 그리고 나머지 두 끝단은 어떠한 경우라도 해석이 가능하다. 하중은 등분포하중, 부분하중과 선하중의 경우를 고려하여 계산할 수 있도록 하였다. 본 연구에서 사용된 해석 방법 중의 또 하나의 특징은 계산의 처리속도가 빨라졌다. 일반적으로 항이 5 이상이 되면 처짐과 구하고자 하

는 응력은 충분히 만족할만한 결과를 얻을 수 있다. 따라서 여기에서 얻어진 여러 가지 결과를 지금까지 알려진 정확한 해법과 비교하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 지금까지 평판 구조물을 해석하는데 있어 Navier 와 Levy방법에서 문제가 되어왔던 경계조건과 하중조건의 제약을 극복하였다.
2. 근사 해법인 유한요소법이나 유한차분법은 정해진 점들밖에 처짐과 응력을 구할 수 없으며 또한 원하는 정확도를 얻기 위해서는 많은 요소들을 필요로 한다. 그러나 본 연구에서는 주어진 미분 방정식을 대수 방정식으로 전환하는 기법을 사용하여 평판의 임의점의 처짐과 응력을 구할 수 있으며 위의 방법보다 적은 컴퓨터시간으로도 원하는 정확도를 얻을 수 있는 장점이 있다.
3. 본 연구의 프로그램은 지금까지 사용 되어온 F.E.M의 방법으로 유도된 프로그램보다 입력 데이터가 아주 간략화 되어 이용이 편리하다.
4. 본 논문을 통하여 해석한 결과들은 실제 구조물에 사용되고 있는 이방성 슬래브 등의 평판에 직접 적용될 수 있으리라 본다.

### 참고문헌

- 1) Issam E. Harik, A. M. and Ghassan L. Salamoun, : Analytical Strip Solution to Rectangular Plates. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, Vol.112, (1986)
- 2) Kuhn, P., Stresses in Aircraft and Shell Structures, Mcgraw-Hill Book Company, New York, (1976)
- 3) Levy, M., Sur l'équilibre elastique d'une plaque rectangulaire, C. R. Acad. Sci., 129, (1899)
- 4) Pickett, G., : Solution of Rectangular Clamped Plate with Lateral Load by Generalized Energy Method, Journal of the Applied Mechanics, ASME, Vol.6, Dec. (1939)
- 5) Szilard, Rudolph, Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (1974)
- 6) Timoshenko, Stephen P. and Woinowsky-Krieger, S.,

Theory of Plate and Shell, Mcgraw-Hill International Editions, New York., (1970)

- 7) Weber, J.W., : Uniformly Loaded Sectional Plates, Journal of the Structural Division, Proceedings of ASCE, Vol. 103, No. ST1, Jan. (1977)

---

(2001년 10월 15일 접수, 2002년 2월 20일 채택)