Journal of Korean
Data & Information Science Society
2002, Vol. 13, No.2 pp. 243 250

Estimation of a Bivariate Exponential Distribution with a Location Parameter

홍연웅[1] · 권용만[2]

Abstract

This paper considers the problem of estimating parameters of the bivariate exponential distribution with a location parameter for a two-component shared parallel system using component data from system-level life test terminated at the time of the prespecified number of system failure. In the system-level life testing, there are three patterns of failure types; 1) both component failed 2) both component censored 3) one is failed and the other is censored. In the third case, we assume that the failure time might be known or unknown. The maximum likelihood estimators are obtained for the case of known/unknown failure time when the other component is censored.

Keywords : 위치모수를 가지는 이변량지수분포, 체계의 수명시험

1. 서론

두 개의 부품을 가지는 병렬체계에서 한 부품이 고장나면 고장난 부품이 분담하던 부하가 정상부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 주는데 이러한 병렬체계를 부하분배체계라한다. 이중부품 부하분배체계의 상호종속적인 부품의 수명을 나타내는 확률모형에는 여러 가지가 있겠지만 홍연웅(1998)은 Freund(1961)의 모형을 확장하여 식(1)과 같은 위치모수를 가지는 이변량지수분포로 모형화하였다. 순간고장률이 각각 α와 β이며 서로 독립인 지수분포를 따르는 두 부품 1과 2가 병렬구조를 이루는 체계에서 부품1이 x에서 먼저 고장나는 순간 부품2는 부품1이 분담하던 부하를 이전받아 순간고장률이 β에서 β'으로 변화하는 한편, 부품2가 y에서 먼저 고장나면 부품1의 순간고장률도 α에서 α'으로 변화하는 경우에 두 개의 부품이 동시에 고장날 확률을 0이라 가정하면 결합수명분포는 다음과 같다.

1. 동양대학교 인터넷산업공학부 교수, 750-711, 경북 영주시 풍기읍 교촌동 1번지,
E-mail : ywhong@phenix.ac.kr
2. 조선대학교 수학 · 전산 · 통계학부 교수

$$f(x,y)=\begin{cases}\alpha\beta' e^{-\beta'(y-\mu)-(\alpha+\beta-\beta')(x-\mu)}, & \text{for } \mu<x<y \\ \alpha'\beta e^{-\alpha'(x-\mu)-(\alpha+\beta-\alpha')(y-\mu)}, & \text{for } \mu<y<x\end{cases} \qquad (1)$$

홍연웅(1998)은 위의 모형을 제안하고 통계적 성질 등을 밝혔다. Kunchur와 Munoli (1994)는 두 부품의 수명이 모형(1)에서 $\mu=0$인 경우에 체계신뢰도에 대한 최소분산불편추정량을 구하였다. 그 외에도 $\mu=0$인 경우의 Freund모형을 적용한 연구에는 Weier(1981), Hanagal과 Kale(1992), Hanagal(1996) 등이 있지만 이들은 부품의 수명자료가 완전히 얻어지는 경우에 적용한 것이다.

그러나 $\mu\neq0$인 경우인 모형(1)은 두 부품의 최소 수명이 양이라는 의미에서 보다 현실성이 가진 일반화된 모형이라는 측면과, 모형의 추정에 사용되어지는 데이터가 관측중간된 데이터를 사용한다는 측면 및 체계의 수명시험이 부품단위에서 실시되는 것이 아니고 완제품 상태라고 할 수 있는 체계단위로 이루어 진다는 관점에서 기존의 연구와 차별성을 가지고 있다고 할 수 있다.

본 연구에서는 위치모수를 가지는 이변량지수분포 (1)을 따르는 n개의 부하분배체계를 수명시험하여 미리 정해진 수의 체계에서 고장이 발생하면 시험을 종결하고 이때까지 얻어진 부품의 수명자료를 이용하여 모형의 모수에 대한 최우추정량을 구한다. 여기서 강조할 사항은 시험단위가 체계이지만 얻어지는 수명자료는 부품의 것이라는 점이다. 체계가 고장이면 각 부품의 수명은 관측가능하며, 한 부품만 고장이면서 관측 중단된 체계는 부품의 수명이 관측 가능한 경우와 불가능한 경우로 나누어 생각한다. 본 연구에서 사용되어질 부호는 다음과 같다.

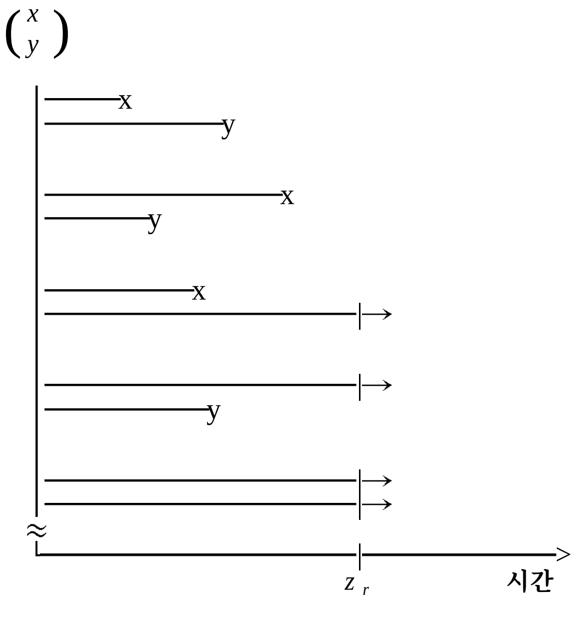
n	: 표본의 크기(체계의 수)
x	: 부품1의 고장시각
y	: 부품2의 고장시각
z_r	: n개의 체계 가운데 r번째 체계의 고장 시점, $r=1,2,\cdots,n$
C_1, C_2	: 수명이 관측중단되는 부품 1 및 2의 집합
D_1, D_2	: z_r이전에 고장나는 부품 1 및 2의 집합
D_{12}	: 부품1이 부품2 보다 먼저 고장나며 수명이 관측되는 부품의 집합,
D_{21}	: 부품2가 부품1 보다 먼저 고장나며 수명이 관측되는 부품의 집합,
r_1	: $C_1\cap D_2$의 원소의 개수
r_2	: $C_2\cap D_1$의 원소의 개수
r_3	: $C_1\cap C_2$의 원소의 개수
d_i, d_{ij}	: D_i 및 D_{ij} 의 원소의 개수, $i,j=1,2$

2. 수명데이터의 유형 및 추정

2.1 관측중단 데이터의 유형

체계의 수명은 두 개의 부품이 모두 고장나는 시점인 $\max(X, Y)$이다. 적어도 하나의 부품이 시험종결시점까지 작동하면 체계는 정상적으로 작동하므로 외형적으로 두 부품 모두 정상인 체계와 한 부품만 고장인 체계는 구분되지 않는다. 고장난 부품을 교체하지 않는다는 가정아래 체계의 수명을 기준으로 고장상태와 비고장상태를 구분하면 두 부품 모두 고장난 경우와 적어도 한 부품이 작동하는 경우의 두 가지로만 구분되어 관찰은 단순화될 수 있지만 데이터의 해석이 용이하지 않다. 그렇다고 조립되기 전의 부품단위에서 수명시험을 실시할 경우, 얻어진 데이터에는 부품수명 사이의 상호종속성이 반영되어있지 않으므로 고장난 부품이 분담하던 부하의 생존부품에로의 이전이 모수에 미치는 영향을 설명할 수 없다. 결국 체계단위의 실험을 실시하되 구성부품의 수명시간도 관측되어지는 것이 바람직하다고 사료된다.

두 부품의 결합수명분포가 모형(1)을 따르는 n개의 체계를 수명시험하여 r개의 체계에서 고장이 발생하면 시험을 종결하는 상황을 고려해보자. 고장난 부품을 교체하지



<그림 1> 불완전 데이터의 유형

않을 경우 부품의 고장시점과 수명시험의 종결시점을 비교하여 발생 가능한 데이터의 유형을 분류하면 <그림 1>과 같이 다섯 종류가 있다. 즉, 두 부품이 모두 고장나면서 부품1이 부품2 보다 먼저 고장나는 경우(D_{12})와 그 반대인 경우(D_{21}), 부품1은 고장이나 부품2가 시험의 종결시점에서 작동하는 경우($C_2 \cap D_1$)와 그 반대의 경우($C_1 \cap D_2$), 그리고 두 부품 모두 생존하는 경우($C_1 \cap C_2$)이다. 여기서 체계가 고장인

경우에 두 부품의 수명을 알 수 있다고 가정하며, 체계를 구성하는 두 부품 가운데 하나의 부품만 고장인 경우에는 그 부품의 수명을 알 수 있는 경우와 알 수 없는 경우가 있다고 가정한다.

2.2 최우추정량

수명시험이 종료된 n개의 체계에는 하나의 부품만 고장인 체계가 포함될 수 있으며, 이러한 체계는 기능적으로 정상이지만 체계의 구조에 따라서는 i) 고장난 부품의 수명측정이 가능한 경우, ii) 고장사실은 알 수 있지만 수명측정이 불가능한 경우, iii) 부품의 고장사실조차 알 수 없는 경우의 세 가지로 구분할 수 있다. 본 연구에서는 i)과 ii)만 다룬다.

2.2.1 한 부품만 고장난 체계의 부품수명을 알 수 있는 경우

수명시험의 종결시점 z_r과 체계를 구성하는 부품의 수명을 비교하면 두 부품이 모두 고장인 체계부터 한 부품도 고장이 발생하지 않은 체계까지 다섯 유형의 데이터가 얻어질 수 있으며, 각 경우에 대하여 우도함수를 구하면 다음과 같다.

(a) $\mu<x<y<z_r$ 일 경우:

부품 1과 2의 고장률은 에서 x까지 각각 α와 β를 가지고, 부품 1이 x시점에서 고장나면 x에서 y까지 부 μ품 2의 고장률은 β'이다. 따라서 하나의 체계에 대하여 이러한 사건이 발생할 확률밀도는

$$\alpha\exp(-\alpha(x-\mu))\exp(-\beta(x-\mu))\beta'\exp(-\beta'(y-x))$$

$$=\alpha\beta'\exp\{-(\alpha+\beta-\beta')(x-\mu)-\beta'(y-\mu)\}$$

이고 고장난 d_{12} 개의 체계에서 관측된 부품의 고장데이터에 대한 우도함수는

$$L_a=(\alpha\beta')^{d_{12}}\exp\{-(\alpha+\beta-\beta')\sum_{i\in D_{12}}(x_i-\mu)-\beta'\sum_{i\in D_{12}}(y_i-\mu)\}\qquad(2)$$

이다.

(b) $\mu<y<x<z_r$ 일 경우:

경우 (a)와 같은 방법으로 d_{21} 개의 체계의 고장데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_b=(\alpha'\beta)^{d_{21}}\exp\{-(\alpha+\beta-\alpha')\sum_{i\in D_{21}}(y_i-\mu)-\alpha'\sum_{i\in D_{21}}(x_i-\mu)\}\qquad(3)$$

(c) $\mu<x<z_r<y$ 일 경우:

부품1의 고장시간은 관측되고 부품2가 관측중단되는 r_2 개의 체계에서 얻어진 데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_c=\alpha^{r_2}\exp\{-(\alpha+\beta-\beta')\sum_{i\in C_2\cap D_1}(x_i-\mu)-\beta' r_2(z_r-\mu)\}\qquad(4)$$

(d) $\mu<y<z_r<x$ 일 경우:

경우 (c)와 같은 방법으로 r_1 개의 체계에서 얻어진 데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_d = \beta^{r_1} \exp\{-(\alpha+\beta-\alpha')\sum_{i\in C_1\cap D_2}(y_i-\mu) - \alpha' r_1(z_r-\mu)\} \tag{5}$$

e) $\mu < z_r < x,\ y$ **일 경우:**

두 부품 모두 관측중단되는 경우의 우도함수는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$L_e = \exp\{-(\alpha+\beta) r_3 (z_r-\mu)\} \tag{6}$$

n **개의 체계를 수명시험하여 얻어진 제2종 관측중단된 데이터에 대한 대수우도함수는 식(2)부터 식(6)까지 대수변환하고 합하면 다음과 같음을 알 수 있고**

$$\begin{aligned}\ln L &= (d_{12}+r_2)\ln\alpha + (d_{21}+r_1)\ln\beta + d_{21}\ln\alpha' + d_{12}\ln\beta' \\ &- (\alpha+\beta)\{\sum_{i\in D_{12}}(x_i-\mu) + \sum_{i\in D_{21}}(y_i-\mu) + \sum_{i\in C_2\cap D_1}(x_i-\mu) + \sum_{i\in C_1\cap D_2}(y_i-\mu) + r_3(z_r-\mu)\} \\ &+ \alpha'\{\sum_{i\in D_{21}}(y_i-\mu) - \sum_{i\in D_{21}}(x_i-\mu) + \sum_{i\in C_1\cap D_2}(y_i-\mu) - r_1(z_r-\mu)\} \\ &+ \beta'\{\sum_{i\in D_{12}}(x_i-\mu) - \sum_{i\in D_{12}}(y_i-\mu) + \sum_{i\in C_2\cap D_1}(x_i-\mu) - r_2(z_r-\mu)\}\end{aligned} \tag{7}$$

그러므로 식(7)로부터 모수의 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\mu} = \min_i\{\min(x_i, y_i)\},\quad i\in D_{12}\cup D_{21} \tag{8a}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{d_{12}+r_2}{\sum_{i\in D_{12}\cup D_{21}}(\min(x_i,y_i)-\hat{\mu}) + \sum_{i\in C_2\cap D_1}(x_i-\hat{\mu}) + \sum_{i\in C_1\cap D_2}(y_i-\hat{\mu}) + r_3(z_r-\hat{\mu})} \tag{8b}$$

$$\hat{\beta} = \frac{d_{21}+r_1}{\sum_{i\in D_{12}\cup D_{21}}(\min(x_i,y_i)-\hat{\mu}) + \sum_{i\in C_2\cap D_1}(x_i-\hat{\mu}) + \sum_{i\in C_1\cap D_2}(y_i-\hat{\mu}) + r_3(z_r-\hat{\mu})} \tag{8c}$$

$$\hat{\alpha}' = \frac{d_{21}}{\sum_{i\in D_{21}}(x_i-y_i) - \sum_{i\in C_1\cap D_2}(y_i-\hat{\mu}) + r_1(z_r-\hat{\mu})} \tag{8d}$$

$$\hat{\beta}' = \frac{d_{12}}{\sum_{i\in D_{12}}(y_i-x_i) - \sum_{i\in C_2\cap D_1}(x_i-\hat{\mu}) + r_2(z_r-\hat{\mu})} \tag{8e}$$

또한 식(7)에서 부품1이 부품2보다 먼저 고장나는 사건이 없으면 ($d_{12}=0$) **부품 2의 순간 고장률이** β'**으로 변화하지 않으므로**($\ln L$ **은** β'**의 함수가 아님**) β'**을 추정할 수 없으며,** $d_{21}=0$ **이면** $\ln L$ **은** α'**의 함수가 아니므로** α'**을 추정할 수 없다. 모든 체계가 완전히 고장나는 경우의 최우추정량은 식(8)에** $r_1=r_2=r_3=0$ **및** $C_1\cap D_2 = C_2\cap D_1 = \phi$**를 대입하여 얻을 수 있다.**

2.2.2 한 부품만 고장난 체계의 부품수명을 알 수 없는 경우

시험의 종결시점까지 하나의 부품에서만 고장난 체계의 경우, 부품의 고장 사실은 알 수 있으나 고장시간은 관측이 불가능하다고 하자. 이 경우에 고장난 부품의 수명을 처리하는 방법에 따라서 추정결과가 상이하게 나타날 수 있는데 본 연구에서는 z_r의일정비율시점에서 고장났다고 가정한다. $\mu<x<z_r<y$ 일 때 $x=p_1 z_r\ (0\le p_1\le 1)$ 이라 하면 식(4)는

$$L_c'=\alpha^{r_2}\exp\{-(\alpha+\beta-\beta')r_2 p_1(z_r-\mu)-\beta' r_2(z_r-\mu)\} \qquad (9)$$

이 된다. 또한 $\mu<y<z_r<x$ 일 때 $y=p_2 z_r\ (0\le p_2\le 1)$ 이라하면 식(5)는

$$L_d'=\beta^{r_1}\exp\{-(\alpha+\beta-\alpha')r_1 p_2(z_r-\mu)-\alpha' r_1(z_r-\mu)\} \qquad (10)$$

이 되고 대수우도함수는 식(2), (3), (6)과 (9), (10)으로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\ln L &= (d_{12}+r_2)\ln\alpha+(d_{21}+r_1)\ln\beta+d_{21}\ln\alpha'+d_{12}\ln\beta' \\ &-(\alpha+\beta)\Big(\sum_{i\in D_{12}}(x_i-\mu)+\sum_{i\in D_{21}}(y_i-\mu)+r_2p_1(z_r-\mu)+r_1p_2(z_r-\mu)+r_3(z_r-\mu)\Big) \\ &+\alpha'\Big(\sum_{i\in D_{21}}(y_i-\mu)-\sum_{i\in D_{21}}(x_i-\mu)+r_1p_2(z_r-\mu)-r_1(z_r-\mu)\Big) \\ &+\beta'\Big(\sum_{i\in D_{12}}(x_i-\mu)-\sum_{i\in D_{12}}(y_i-\mu)+r_2p_1(z_r-\mu)-r_2(z_r-\mu)\Big)\end{aligned} \qquad (11)$$

식(11)로부터 모수의 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\mu}=\min_i\{\min(x_i,y_i)\},\quad i\in D_{12}\cup D_{21} \qquad (12a)$$

$$\hat{\alpha}=\frac{d_{12}+r_2}{\sum_{i\in D_{12}\cup D_{21}}(\min(x_i,y_i)-\hat{\mu})+(r_2p_1+r_1p_2+r_3)(z_r-\hat{\mu})} \qquad (12b)$$

$$\hat{\beta}=\frac{d_{21}+r_1}{\sum_{i\in D_{12}\cup D_{21}}(\min(x_i,y_i)-\hat{\mu})+(r_2p_1+r_1p_2+r_3)(z_r-\hat{\mu})} \qquad (12c)$$

$$\hat{\alpha}'=\frac{d_{21}}{\sum_{i\in D_{21}}(x_i-y_i)+(1-p_2)r_1(z_r-\hat{\mu})} \qquad (12d)$$

$$\hat{\beta}'=\frac{d_{12}}{\sum_{i\in D_{12}}(y_i-x_i)+(1-p_1)r_2(z_r-\hat{\mu})} \qquad (12e)$$

3. 추정량들의 비교

$\alpha = 1.0, \beta = 1.2, \alpha' = 1.4, \beta' = 1.6,\ \mu = 1.0$에 대하여 식(1)을 따르는 크기 20의 이변량자료를 IMSL을 이용하여 생성하면 (1.0344, 1.2085), (1.3329, 1.0890), (1.2662, 1.3627), (3.2106*, 1.0893), (1.1686, 1.2519), (3.9520*, 3.5642*), (1.0129, 1.5818), (2.0021, 1.1129), (1.1094, 2.3797*), (3.3488*, 1.0997), (2.9892*, 1.6138), (2.1080*, 1.3172), (1.4081, 1.3472), (2.4088*, 1.1588), (1.8255, 1.6449), (1.6978, 1.1727), (1.3636, 1.3467), (1.9289, 2.8799*), (3.1860*, 1.5735), (3.1219*, 1.4034)이다. $r = 10$이라하면 $z_{10} = 2.0021$이므로 [*]표시된 값은 관측중단되어 계산과정에서 2.0021로 대치된다. 또한, 밑줄 친 값은 고장난 시간을 모를 경우에 $2.0021p\ (0 \le p \le 1)$로 대치된다.

위의 데이터와 $p = p_1 = p_2 = 0.0\ (0.1)\ 1.0$에 대하여 모수의 최우추정치를 구하면 <표 1>과 같다. 표에서 알 수 있듯이 절대편의의 총합과 평균제곱오차의 합은 p에 대하여 아래로 볼록한 모양을 가지며 $p = 0.4$과 0.5에서 절대편의의 총합과 평균제곱오차의 총합은 각각 최소임을 알 수 있다. 이는 부품의 고장난 사실만 알고 수명을 몰라도 p값을 적절히 결정하면 수명을 아는 경우보다 좋은 결과를 가져온다는 것을 시사한다(진하게 고딕체로 표시한 부분). 한편 $p_1 \neq p_2$ 인 경우에도 절대편의의 총합과 평균제곱오차의 합을 각각 최소로하는 (p_1, p_2)의 조합을 수치적으로 구할 수 있을 것이나 식(12)의 최우추정량이 실험상황을 나타내는 여러 가지 요인의 영향을 받으므로 어떤 (p_1, p_2)의 조합이 최적이라는 객관적인 결론을 내리기는 어려울 것으로 사료된다.

<표 1> 추정치의 편의 및 평균제곱오차

p	추정치의 편의 및 총절대편의						평균제곱오차 및 총합					
	α	α'	β	β'	μ	총절대합	α	α'	β	β'	μ	총합
※	-.0649	.7962	-.4532	.4845	-.0876	1.8864	.2554	.9132	.2662	.9146	.3254	2.6748
.0	.8876	2.5621	-.6891	-.3201	-.3064	4.7653	1.2898	8.2709	1.3011	8.2897	3.4064	22.5579
.1	.4390	1.7421	-.6448	-.1430	-.2462	3.2151	.6698	3.9105	.6687	3.9103	1.2071	10.3664
.2	.2176	1.5634	-.5713	-.1145	-.2278	2.6946	.4287	1.9604	.4109	1.9632	.7784	5.5416
.3	.0231	1.1131	-.6117	.0991	-.1231	1.9701	.2843	1.0204	.2890	1.0321	.6241	3.2499
.4	-.1246	.6814	-.4578	.3201	.0451	**1.6290**	.2032	.5854	.1921	.5865	.3675	**1.9347**
.5	-.2498	.5623	-.5621	.5481	.1410	2.0633	.1472	.4667	.1364	.4678	.3210	**1.5391**
.6	-.4031	.2901	-.1193	.5995	.2665	**1.6785**	.1134	.6145	.1109	.6223	.3789	**1.8400**
.7	-.3876	.1782	.1672	.7896	.3201	**1.8427**	.1576	1.0813	.1498	1.0786	.5626	3.0299
.8	-.4128	.0674	.5065	1.1249	.3210	3.0392	.3687	2.0431	.3566	2.0287	1.1432	5.9403
.9	-.4784	-.0891	.9816	1.8952	.3487	3.7930	1.0211	3.8684	1.0178	3.8577	2.3678	12.1328
1.0	-.6007	-.1289	1.5031	2.6573	.3598	5.2498	3.2655	7.4977	3.2545	7.4973	5.5612	27.0762

※는 고장난 부품의 수명을 아는 경우를 나타냄

4. 결론

본 연구에서는 위치모수를 가지는 이변량 지수분포를 따르는 이변량수명자료가 체계수명을 기준으로 제2종 관측중단되어 얻어질 경우 모형의 모수에 대한 최우추정량을 한 부품만 고장인 체계의 고장부품수명을 아는 경우와 모르는 경우로 나누어 구하였다. 또한 부품의 고장사실만 알고 고장시간을 몰라도 관측중단시각의 일정비율 시점에서 고장났다고 가정하고 최우추정량을 구하였다.

본 연구는 제2종 관측중단된 자료를 대상으로 추정하였지만 제1종관측중단 등 다양한 형태의 자료에 대하여도 쉽게 확장할 수 있을 것이다. 또한, 이중부품부하분배체계의 수명은 max(X,Y)이므로 이에 대한 자료만 얻어질 때 모수를 추정하는 문제와 부하분배체계의 가속수명시험자료를 분석하는 문제는 향후의 과제로 남겨둔다.

참고문헌

1. 홍연웅(1998), 위치모수를 가지는 이변량지수분포의 개발, 응용통계연구, 11권 1호, pp. 185-192.
2. Freund, J.E.(1961). A Bivariate Extension of the Exponential Distribution, *J. Amer. Statist. Assn.* 56, pp. 971-977.
3. Hanagal, D.D.(1996). Estimation of System Reliability from Stress-Strength Relationship, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 25(8), pp. 1783-1797.
4. Hanagal, D.D. & Kale, B.K.(1992). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Models, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 21(9), pp. 2625-2643.
5. Kunchur, S.H. & Munoli, S.B.(1994). Estimation of Reliability in Freund Model for Two Component System, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 23(11), pp. 3273-3283.
6. Lawless, J.F.(1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.
7. Weier, D.R.(1981). Bayes Estimation for a Bivariate Survival Model Based on Exponential Distributions, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 10(14), pp. 1415-1427.

[2002년 9월 접수, 2002년 10월 채택]