Journal of Korean
Data & Information Science Society
2002, Vol. 13, No.2 pp. 87 95

Optimal Design of Partially Accelerated Life Testing for Multi-Component Mixed Systems

Hee Chang Park[1] · Kwang Man Jeng[2] · Min Hwan Kim[2]

Abstract

In this paper we consider optimal designs of partially accelerated life testing which is devised for multi-component mixed systems with the considerably long lifetime. Test items are run at both use condition and accelerated condition until a specified censoring time. The optimal criterion for the sample-proportion allocated to accelerated condition is to minimize asymptotic variance of the maximum likelihood estimators of the acceleration factor and hazard rates.

Keywords : 혼합형시스템, 부분적 가속수명검사

1. 서론

부분적 가속수명검사(partially accelerated life testing : PALT)는 가속수명검사 중에서 정상조건과 특정한 하나의 가속조건에서 검사를 수행하여 정상조건에서의 수명을 외삽법에 의해 추정하고자 하는 경우에 이용하는 검사방법이다. PALT는 가속수명검사와 마찬가지로 부분적 고정충격수명검사(partially constant-stress life testing : PCLT)와 부분적 단계충격수명검사(partially step-stress life testing : PSLT)로 나누어진다.

PCLT의 연구에 있어서 DeGroot와 Goel(1979)은 수명분포를 지수분포로 가정하여 베이즈적인 입장에서 접근하여 관심 있는 모수의 추정과 최적 실험계획을 얻는 과정을 제안하였다. 박희창(1995)은 다수의 부품으로 구성된 직렬형 시스템의 수명검사를 현실적으로 수행하기 위해 부분적 고정충격수명검사의 최적검사계획에 관한 연구를

1. Professor, Department of Statistics, Changwon National University, Changwon, Kyungnam, 641-773, Korea
E-mail : hcpark@sarim.changwon.ac.kr
2. Graduate Student, Department of Statistics, Changwon National University, Changwon, Kyungnam, 641-773, Korea

하였으며, 박희창 등(1996)은 병렬형 시스템의 최적 검사계획에 관한 연구를 하였다.

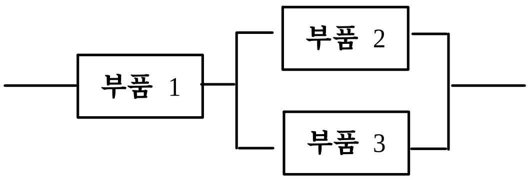
PSLT의 연구에 있어서는 Bai와 Chung(1992)이 수명분포를 지수분포로 가정하여 절단된 자료가 있는 경우에 대하여 정상조건에서의 고장률과 가속인자에 대한 최우추정량을 구하고 최적 검사계획에 관한 연구를 하였다. 또한 Bai 등(1993)은 수명분포가 대수정규분포인 시스템을 PSLT에 투입할 경우에 최적 검사계획을 얻는 과정을 제안하였다. 박희창 등(1995)은 PSLT에 관한 직렬형 시스템의 최적 검사계획에 관한 연구를 하였다.

본 논문에서는 혼합형(직렬형+병렬형) 시스템의 부분적 고정충격수명검사에 관한 최적 검사 계획에 관한 문제를 고찰하고자 한다. 본 논문의 2절에서는 PCLT의 모형에 대해 기술하며, 3절에서는 각 부품의 고장률과 가속인자에 관한 최우추정량의 일반화 점근분산의 합과 각 부품의 가속인자에 관한 최우추정량의 점근분산의 합을 구하여 이를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율을 제안하였다. 4절에서는 예제를 통하여 가속인자의 변화에 따른 최적 표본할당 문제에 관한 토의와 정상조건에서의 고장률의 변화에 따른 최적 표본할당 문제 및 검사시간의 변화에 따른 최적표본할당문제를 검토하고자 한다.

2. PCLT의 모형

2.1. PCLT의 모형

본 논문에서는 <그림1>과 같이 세 개의 부품이 서로 독립적으로 연결되어 있는 혼합형시스템의 PCLT에 관한 최적 검사 계획에 있어서 가속 조건에 투입할 표본할당 비율을 결정하는 문제를 고찰하고자 한다.



<그림1> 세 개의 부품의 연결형태

PCLT는 다음과 같이 일정한 시간동안 검사를 시행했을 때 시스템이 고장나는 경우와 고장나지 않는 경우로 나누어 생각한다. 먼저 시스템이 고장나는 경우는 다음 <표1>에서 보는 바와 같이 다섯 가지 경우가 있다.

<표1> 시스템이 고장나는 경우

경우 1	부품2와 부품3이 고장나지 않은 상태에서 부품1에 의한 고장
경우 2	부품1이 고장나지 않은 상태에서 부품3의 고장후 부품2에 의한 고장
경우 3	부품1이 고장나지 않은 상태에서 부품2의 고장후 부품3에 의한 고장
경우 4	부품3의 고장후 부품2가 고장나지 않은 상태에서 부품1에 의한 고장
경우 5	부품2의 고장후 부품3이 고장나지 않은 상태에서 부품1에 의한 고장

또한 시스템이 고장나지 않는 경우는 다음 <표2>에서 보는 바와 같이 세 가지 경우가 있다.

<표2> 시스템이 고장나지 않는 경우

경우 1	부품1, 부품2, 부품3 모두 고장나지 않는 경우
경우 2	부품1이 고장나지 않은 상태에서 부품3의 고장후 부품2가 고장나지 않는 경우
경우 3	부품1이 고장나지 않은 상태에서 부품2의 고장후 부품3은 고장나지 않는 경우

2.2 기호의 정의

PCLT의 검사계획과 관찰과정은 다음과 같은 기호로 표현한다.

n : 검사에 투입되는 시스템의 총 수

n_{ui} : 정상조건에서 시스템이 고장나는 경우 i의 고장난 시스템의 수 $(i=1,2,\cdots,5)$

n_{uci} : 정상조건에서 시스템이 고장나지 않는 경우 i의 고장나지 않은 시스템의 수 $(i=1,2,3)$

n_{ai} : 가속조건에서 시스템이 고장나는 경우 i의 고장난 시스템의 수 $(i=1,2,\cdots,5)$

n_{aci} : 가속조건에서 시스템이 고장나지 않는 경우 i의 고장나지 않은 시스템의 수 $(i=1,2,3)$

τ : 최종 검사 시간

t_{uij} : 정상조건에서 시스템이 고장나는 경우 i의 고장난 시스템 중 j번째 시스템의 수명 $(j=1,2,\cdots,n_{ui})$

t_{aim}: 가속조건에서 시스템이 고장나는 경우 i의 고장난 시스템 중 m번째 시스템의 수명 $(m=1,2,\cdots,n_{ai})$

ρ : 가속조건검사에 투입되는 표본할당비율

$\bar{\rho}$: 정상조건검사에 투입되는 표본할당비율 $(\bar{\rho}=1-\rho)$

λ_i : 정상조건에서 부품 i의 고장률 $(i=1,2,3)$

β_i : 부품 i의 가속인자 $(\beta_i \geq 1)$ $(i=1,2,3)$

t : 검사 전체에서의 부품의 수명

2.3 기본가정

PCLT의 최적계획을 위해 다음과 같이 가정한다.

[가정1] 검사에 투입되는 각 시스템의 수명 및 시스템을 구성하고 있는 각 부품의 수명은 서로 독립이다.

[가정2] 정상조건에서 검사에 투입되는 시스템을 구성하고 있는 부품 i의 수명은 고장률이 λ_i인 지수분포를 따른다. 즉,

$$f_i(t)=\lambda_i \exp[-\lambda_i t]$$

이다.

[가정3] 가속조건에서 검사에 투입되는 시스템을 구성하고 있는 부품 i의 수명은 고장률이 $\beta_i\lambda_i$인 지수분포를 따른다. 즉,

$$g_i(t) = \beta_i\lambda_i \exp[-\beta_i\lambda_i t]$$

이다.

[가정4] 각 검사가 진행되는 동안에는 조건을 변화시키지 않는다.

2.4 검사 및 관찰과정

[1] 검사에 투입되는 시스템 중에서 임의의 $n\bar{\rho}$개의 시스템은 정상조건검사에 투입되고, 나머지 $n\rho$개의 시스템은 가속조건검사에 투입된다.

[2] 각 검사에 투입된 시스템은 최종검사시점인 τ까지 작동하도록 한다. 각 조건에서 고장 난 시스템의 수와 고장나지 않은 시스템의 수를 관찰치로 받아들인다. 여기서 고장날 때까지의 시간 t뿐만 아니라 고장난 시스템의 수를 나타내는 n_{ui}와 n_{ai} 그리고 고장나지 않은 시스템의 수인 n_{uci}와 n_{aci}도 확률변수가 된다.

2.5 수리적 모형

검사 및 관찰과정으로부터 얻어지는 자료 t_{uij}, t_{aij}, n_{ui}, n_{ai}, n_{uci} 그리고 n_{aci}로부터 대수우도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
LL = &(n_{u1}+n_{u4}+n_{u5}+n_{a1}+n_{a4}+n_{a5})\ln\lambda_1 + (n_{u2}+n_{a2})\ln\lambda_2 + (n_{u3}+n_{a3})\ln\lambda_3 \\
&+ (n_{a1}+n_{a4}+n_{a5})\ln\beta_1 + n_{a2}\ln\beta_2 + n_{a3}\ln\beta_3 \\
&- \lambda.T_{u1} - (\lambda_1+\lambda_2)(T_{u2}+T_{u4}) - (\lambda_1+\lambda_3)(T_{u3}+T_{u5}) + \sum_{j=1}^{n_{u2}} \ln(1-e^{-\lambda_3 t_{u2j}}) \\
&+ \sum_{j=1}^{n_{u3}} \ln(1-e^{-\lambda_2 t_{u3j}}) + \sum_{j=1}^{n_{u4}} \ln(1-e^{-\lambda_3 t_{u4j}}) + \sum_{j=1}^{n_{u5}} \ln(1-e^{-\lambda_2 t_{u5j}}) - n_{uc1}\lambda.\tau \\
&- n_{uc2}(\lambda_1+\lambda_2)\tau + n_{uc2}\ln(1-e^{-\lambda_3\tau}) - n_{uc3}(\lambda_1+\lambda_3)\tau + n_{uc3}\ln(1-e^{-\lambda_2\tau}) \\
&- (\beta\lambda).T_{a1} - (\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2)(T_{a2}+T_{a4}) + \sum_{m=1}^{n_{a2}} \ln(1-e^{-\beta_3\lambda_3 t_{a2m}}) \\
&- (\beta_1\lambda_1+\beta_3\lambda_3)(T_{a3}+T_{a5}) + \sum_{m=1}^{n_{a3}} \ln(1-e^{-\beta_2\lambda_2 t_{a3m}}) + \sum_{m=1}^{n_{a4}} \ln(1-e^{-\beta_3\lambda_3 t_{a4m}}) \\
&+ \sum_{m=1}^{n_{a5}} \ln(1-e^{-\beta_2\lambda_2 t_{a5m}}) - n_{ac1}(\beta\lambda).\tau - n_{ac2}(\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2)\tau + n_{ac2}\ln(1-e^{-\beta_3\lambda_3\tau}) \\
&- n_{ac3}(\beta_1\lambda_1+\beta_3\lambda_3)\tau + n_{ac3}\ln(1-e^{-\beta_2\lambda_2\tau}) \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

단, $\lambda. = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $\beta. = \beta_1+\beta_2+\beta_3$, $(\beta\lambda). = \beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2+\beta_3\lambda_3$ 이다.

3. 최적화 과정

일반적인 최적화의 기준으로는 최우추정량 $\hat{\beta}_i$과 $\hat{\lambda}_i$ 의 일반화 점근 분산, $\hat{\beta}_i$의 점근 분산, $\hat{\lambda}_i$의 점근 분산이 최소가 되도록 하는 것이다. 이러한 분산들은 정보행렬(Information matrix)을 이용하여 구할 수 있는데, 정보행렬을 구하기 위해 식(2.1)의 이차 편도함수에 대한 기대값을 구하면 다음과 같다.

$$E\left[-\frac{\partial^2 LL}{\partial\lambda_i^2}\right]=\frac{n\bar{\rho}}{\lambda_i^2}B_i+\frac{n\rho}{\lambda_i^2}A_i \quad (i=1,2,3) \tag{3.1}$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 LL}{\partial\beta_i^2}\right]=\frac{n\rho}{\beta_i^2}A_i \quad (i=1,2,3) \tag{3.2}$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 LL}{\partial\beta_i\partial\lambda_i}\right]=\frac{n\rho}{\beta_i\lambda_i}A_i \quad (i=1,2,3) \tag{3.3}$$

여기서 A_i, B_i $(i=1,2,3)$는 다음과 같다.

$$A_1=\frac{\beta_1\lambda_1}{\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2}\{1-e^{-(\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2)\tau}\}+\frac{\beta_1\lambda_1}{\beta_1\lambda_1+\beta_3\lambda_3}\{1-e^{-(\beta_1\lambda_1+\beta_3\lambda_3)\tau}\}$$
$$-\frac{\beta_1\lambda_1}{(\beta\lambda)_.}(1-e^{-(\beta\lambda)_.\tau})$$

$$B_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\{1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}\}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}\{1-e^{-(\lambda_1+\lambda_3)\tau}\}-\frac{\lambda_1}{\lambda_.}(1-e^{-\lambda_.\tau})$$

$$A_2=\frac{\beta_2\lambda_2}{\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2}\{1-e^{-(\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2)\tau}\}-\frac{\beta_2\lambda_2}{(\beta\lambda)_.}\{1-e^{-(\beta\lambda)_.\tau}\}$$
$$+\beta_2^2\lambda_2^2\left\{(\beta_1\lambda_1+\beta_3\lambda_3)G_{a2}+\frac{\tau^2e^{-(\beta\lambda)_.\tau}}{1-e^{-\beta_2\lambda_2\tau}}\right\}$$

$$B_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\{1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}\}-\frac{\lambda_2}{\lambda_.}\{1-e^{-\lambda_.\tau}\}+\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_3)G_{u2}+\frac{\lambda_2^2\tau^2e^{-\lambda_.\tau}}{1-e^{-\lambda_2\tau}}$$

$$A_3=\frac{\beta_3\lambda_3}{\beta_1\lambda_1+\beta_3\lambda_3}\{1-e^{-(\beta_1\lambda_1+\beta_3\lambda_3)\tau}\}-\frac{\beta_3\lambda_3}{(\beta\lambda)_.}\{1-e^{-(\beta\lambda)_.\tau}\}$$
$$+\beta_3^2\lambda_3^2\left\{(\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2)G_{a3}+\frac{\tau^2e^{-(\beta\lambda)_.\tau}}{1-e^{-\beta_3\lambda_3\tau}}\right\}$$

$$B_3=\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}\{1-e^{-(\lambda_1+\lambda_3)\tau}\}-\frac{\lambda_3}{\lambda_.}\{1-e^{-\lambda_.\tau}\}+\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)G_{u3}+\frac{\lambda_3^2\tau^2e^{-\lambda_.\tau}}{1-e^{-\lambda_3\tau}}$$

$$G_{u2}=\int_0^\tau\frac{t^2e^{-\lambda_.t}}{1-e^{-\lambda_2t}}dt\quad,\qquad G_{a2}=\int_0^\tau\frac{t^2e^{-(\beta\lambda)_.t}}{1-e^{-\beta_2\lambda_2t}}dt$$

$$G_{u3} = \int_0^{\tau} \frac{t^2 e^{-\lambda_i t}}{1- e^{-\lambda_3 t}} dt \quad , \quad G_{a3} = \int_0^{\tau} \frac{t^2 e^{-(\beta\lambda)_i t}}{1- e^{-\beta_3\lambda_3 t}} dt$$

식(3.1)에서 (3.3)으로부터 β_i 와 λ_i에 대한 정보행렬을 구하면 다음과 같다.

$$F_i(\beta_i, \lambda_i) = \begin{pmatrix} \frac{n\rho A_i}{\beta_i^2} & \frac{n\rho A_i}{\beta_i\lambda_i} \\ \frac{n\rho A_i}{\beta_i\lambda_i} & \frac{n\bar{\rho} B_i + n\rho A_i}{\lambda_i^2} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

식 (3.4)의 행렬식의 값을 구하면 다음과 같다.

$$|F_i| = \frac{n\rho A_i}{\beta_i^2} \cdot \frac{n\bar{\rho} B_i + n\rho A_i}{\lambda_i^2} - \frac{(n\rho A_i)^2}{\beta_i^2\lambda_i^2} = \frac{n^2 A_i B_i}{\beta_i^2\lambda_i^2}\rho(1-\rho) \tag{3.5}$$

이제 식 (3.5)을 이용하여 표본할당을 위한 최적화 기준인 $\widehat{\beta}_i$ 와 $\widehat{\lambda}_i$의 일반화 점근분산의 합인 V_g , $\widehat{\beta}_i$의 점근분산의 합인 V_β, $\widehat{\lambda}_i$의 점근분산의 합인 V_λ를 구하면 다음과 같다.

$$V_g = \sum_{i=1}^{3} GeA\,svar(\widehat{\beta}_i, \widehat{\lambda}_i) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|F_i|} = \frac{1}{n^2\rho(1-\rho)} \sum_{i=1}^{3} \frac{(\beta_i\lambda_i)^2}{A_i B_i}$$

$$V_\beta = \sum_{i=1}^{3} A\,svar(\widehat{\beta}_i) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|F_i|} E\left[-\frac{\partial^2 LL}{\partial\lambda_i^2}\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3} \beta_i^2 \left\{\frac{1}{A_i\rho} + \frac{1}{B_i(1-\rho)}\right\}$$

$$V_\lambda = \sum_{i=1}^{3} A\,svar(\widehat{\lambda}_i) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|F_i|} E\left[-\frac{\partial^2 LL}{\partial\beta_i^2}\right] = \frac{1}{n(1-\rho)} \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i^2}{B_i}$$

그런데 V_g를 최소화시키는 ρ값은 0.5의 단순해(trivial solution)를 최적값으로 갖고, V_λ를 최소화시키는 ρ값은 0.0의 단순해(trivial solution)를 최적값으로 갖는다는 것을 쉽게 알 수 있다. 또 V_β를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율 ρ_β를 구하기 위해 V_β를 ρ에 대해 미분한 후 0으로 놓고 방정식을 풀면 다음과 같은 두 개의 해가 얻어진다.

$$\rho_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1 a_0}}{a_0 - a_1}, \quad \rho_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1 a_0}}{a_0 - a_1}$$

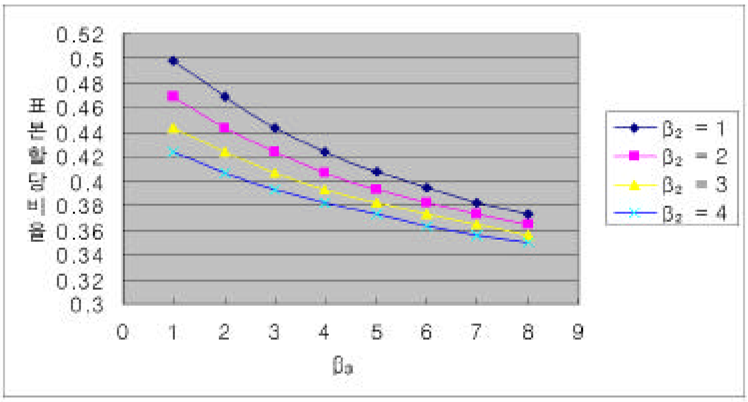
여기서 $a_0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\beta_i^2}{B_i}$, $a_1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\beta_i^2}{A_i}$이다. 그런데 ρ_β는 표본할당 비율이기 때문에 $0 \le \rho_\beta \le 1$ 이어야 한다. 하지만 실제로 ρ_1, ρ_2를 구해보면 ρ_2는 1보다 큰 값을 갖는다. 따라서 ρ_1을 최적 표본할당비율 ρ_β은 다음과 같다.

$$\rho_\beta = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1 a_0}}{a_0 - a_1} \tag{3.6}$$

4. 예제 및 고찰

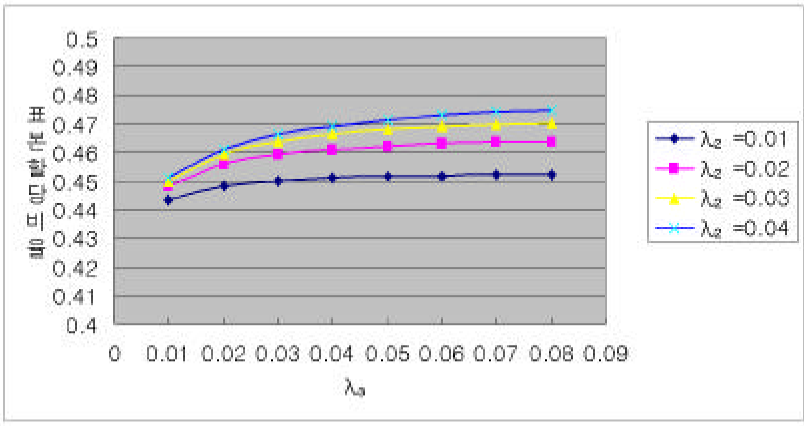
본 절에서는 <그림1>과 같이 세 개의 부품으로 구성된 30개의 시스템에 대해 가속인자의 변화에 따른 최적 표본할당 문제에 관한 토의와 정상조건에서의 고장률 λ_i의 변화에 따른 최적 표본할당 문제 및 검사시간 τ의 변화에 따른 최적표본할당문제를 검토하고자 한다.

<그림2>는 위에서 기술한 시스템에 대해 각 부품의 고장률을 모두 0.01로, β_1을 2로 고정하고 β_2의 값이 각각 1, 2, 3, 4 일 때 β_3의 변화에 따른 표본할당비율의 그래프이다. 이 그래프에서 가속인자 β_3의 값이 커질수록 표본할당비율은 낮아짐을 알 수 있으며, β_2의 값이 커질수록 표본할당비율도 낮아짐을 알 수 있다.



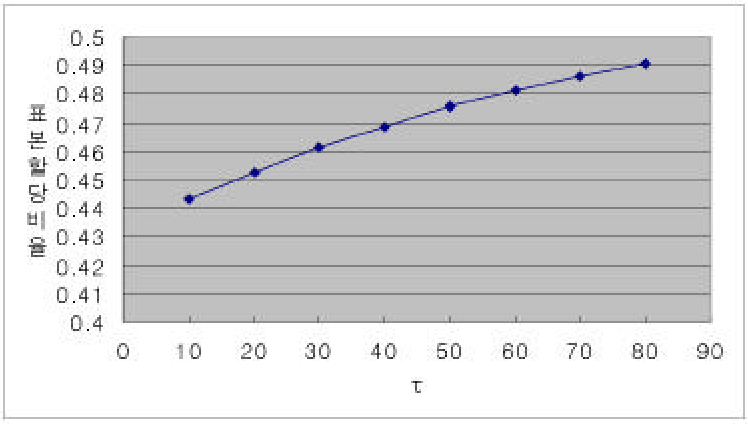
<그림2> 가속인자의 변화에 따른 표본할당비율

<그림3>은 가속인자는 모두 2로, λ_1을 0.01로 고정하고 λ_2의 값이 각각 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 일 때 λ_3의 변화에 따른 표본할당비율의 그래프이다. 이 그래프에서 고장률이 커질수록 표본할당비율이 커진다는 것을 알 수 있으며 λ_2의 값이 커질수록 표본할당비율이 커진다는 것을 알 수 있다.



<그림3> 고장률의 변화에 따른 표본할당비율

<그림4>는 고장률을 모두 0.01로 하고 가속인자를 모두 2로 했을 때 검사시간의 변화에 따른 표본할당비율을 나타낸 것이다. 이 그래프에서 검사시간이 늘어날수록 표본할당비율도 커진다는 것을 알 수 있다.



<그림4> 검사시간의 변화에 따른 표본할당비율

5. 결 론

PCLT는 가속수명검사 중에서 정상조건과 특정한 하나의 가속조건에서만 검사를 수행하여 정상조건에서의 수명을 외삽법에 의해 추정하고자 하는 경우에 이용하는 검사방법이다. 본 연구에서는 세 개의 부품이 혼합형으로 구성된 시스템의 PCLT에 대한 최적 표본할당문제에 대해 고찰하였으며, 각 부품의 고장률과 가속인자의 최우추정량을 구하였다. 또한 각 부품의 고장률과 가속인자에 관한 최우추정량의 일반화 점근분산의 합과 각 부품의 가속인자에 관한 최우추정량의 점근분산의 합을 구하여 이

를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율을 제안하였다.

향후 연구과제로는 본 연구의 결과를 바탕으로 다수의 부품으로 구성된 혼합형 시스템의 PSLT에 대한 연구가 기대된다.

참고문헌

1. 박희창 (1995). 다수의 부품으로 구성된 직렬형 시스템의 부분적 고정충격 수명검사에 관한 최적계획, 한국통계학회논문집, 제2권, 제2호, 395-403

2. 박희창, 이석훈 (1995). 부분적 단계충격 수명검사에 관한 직렬형 시스템의 최적 검사계획, 응용통계연구지, 제8권, 제2호, 121-132

3. 박희창, 이석훈 (1996). 병렬형 시스템의 부분적 가속수명검사를 위한 최적계획, 품질경영학회지, 제24권 제4호, 14-28.

4. Bai, D.S. and Chung, S.W. (1992). Optimal Design of Partially Accelerated Life Tests for Exponential Distribution under Type I Censoring, *IEEE transactions on Reliability*, 41, 3, 400-406.

5. Bai, D.S. and Chung, S.W., and chun, Y.R. (1993). Optimal Design of Partially Accelerated Life Tests for Lognormal Distribution under Type I Censoring, *Reliability Engineering and System Safety*, 40, 85-92.

6. DeGroot, M.H. and Goel, P.K. (1979). Bayesian Estimation and Optimal Designs partially Accelerated Life Testing, *Naval Research Logistics Quarterly*, 26, 223-235.

[2002년 8월 접수, 2002년 9월 채택]