Journal of the Korean
Data & Information Science Society
2002, Vol. 13, No. 1, pp. 157 ~ 164

The Strong Consistency of Regression Quantiles Estimators in Nonlinear Censored Regression Models

Seunghoe Choi [1]

Abstract

In this paper, we consider the strong consistency of the regression quantiles estimators for the nonlinear regression models when dependent variables are subject to censoring, and provide the sufficient conditions which ensure the strong consistency of proposed estimators of the censored regression models. one example is given to illustrate the application of the main result.

Key Words: Nonlinear Censored Regression Model, Regression Quantiles Estimators, Strong Consistency.

1. 서론

자연과학, 생명과학, 사회과학, 공학 등 여러 분야에서 많이 나타나는 비선형회귀모형

$$y_t = f(x_t, \theta_o) + \epsilon_t, \quad t = 1, \cdots, n \tag{1.1}$$

에 대한 통계적인 문제는 독립변수(x_t)와 종속변수(y_t)의 관찰치를 기초로 하여 회귀모수의 참값인 θ_o을 추정 또는 검정하는 방법이다. 비선형회귀모형에 대한 추정 및 검정 방법은 여러 사람들에 의하여 활발히 연구되어 왔으며, 오차항(ϵ_t)의 구조에 따라 강인성(robustness)을 보장하는 추정량들이 제안되고 연구되어 왔다 (Wu(1981), Wang(1995), Jurečková와 Procházka(1994), Choi et al.(2001) 참조). 그러나, 어떤 실험에서는 모든 종속변수를 관찰할 수 없거나 혹은 종속변수를 관찰하기 위하여 실험을 지속하기보다는 적당한 방법에 의하여 관찰을 중단하고 그 때까지 얻어진 자료만을 이용하여 통계적인 분석을 하는 방법이 시간적으로나 경제적으로 더 유리한 경우가 있다. 이와 같이, 외부적인 조건에 의하여 중도에 절단된 자료를 종속변수로 포함하고 있는 회귀모형을 검열회귀모형이라 한다. 종속변수가 어떠한 제약을 받지 않는 일반적인 회귀모형에서 유도된 여러 가지 통계적인 성질들을 검열회귀모형에 적용하기 어려운 경우가 있다. 따라서 검열자료를 포함하고 있는 회귀모형에 대한 추정량의 강일치성, 점근적 정규성 등 점근적 성질을 만족시켜 주는 충분조건을 제시하거나, 검열회귀모형에 대한 통계적인 추정 및 검정 방법을 연구할 필요가 있다.

[1] Assistant Professor, Department of General Studies, Hankuk Aviation University, Koyang, Kyungkido, 412-791, Korea
E-mail : shchoi@mail.hangkong.ac.kr

본 논문에서는 다음과 같은 비선형검열회귀모형(Nonlinear Censored Regression Model, NCRM)

$$y_t = \min\{c_t, f(x_t, \theta_o) + \epsilon_t\}, \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{1.2}$$

을 생각한다. 여기서 x_t는 $\Gamma \subset R^q$에 속하는 고정 벡터이고 회귀모수 $\theta_o = (\theta_1, \cdots, \theta_p)$는 $\Theta \subset R^p$에 속하는 미지 벡터이다. 그리고 반응함수 f는 $R^q \times \Theta$에서 R^1으로 가는 연속함수이며, 오차항 ϵ_t는 서로 독립이고 같은 분포을 가지는 확률변수로서 유한한 2차 적률을 가진다. 종속변수 y_t는 중도절단시점인 c_t에 의하여 제한을 받는 검열자료이다.

종속변수와 독립변수을 모두 관측하여 모형 (1.1)에 포함된 회귀모수을 추정하는 일반적인 회귀분석과는 달리 검열회귀모형에서는 모든 자료를 관측할 수 없다. 따라서 검열자료를 포함하고 있는 회귀모형에서는 다음과 같은 새로운 변수

$$y_t^* = \begin{cases} f(x_t, \theta_o) + \epsilon_t, & if\ y_t < c_t(uncensored) \\ c_t, & if\ y_t \geq c_t(censored) \end{cases}$$

와 지시함수(indicator function)

$$\delta_t = \begin{cases} 0, & if\ y_t < c_t \\ 1, & if\ y_t \geq c_t \end{cases}$$

을 이용하여 모형 (1.2)에 포함된 회귀모수을 추정하여야 한다.

Powell(1984)은 검열회귀모형의 회귀모수를 추정하기 위해 널리 사용되는 최소제곱(Leaest Squares, LS)추정량이 이상치에 민감함으로 LS추정량에 대한 대안으로 최소절대편차(Least Absolute Deviation, LAD)추정량을 제안하고 다음 함수

$$R_n(\theta : \frac{1}{2}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} |y_t - \min\{c_t, f(x_t, \theta)\}|$$

를 최소화하는 값 $\hat{\theta}_n(\frac{1}{2})$을 최소절대편차추정량이라 하였다. Chen과 Wu(1994)는 선형검열회귀모형에 대한 LAD추정량이 회귀모수 θ_o에 강수렴하는 충분조건을 제시하였고 Choi와 Kim(1998)은 중도에 절단된 자료를 포함하고 있는 비선형회귀모형에 대한 LAD추정량의 강일치성과 점근적 정규성에 대하여 연구하였다. 비록 LAD추정량은 오차항의 구조가 꼬리부분이 두꺼운 경우 LS추정량에 비하여 효율적이나, LS추정량과 같이 오차항의 구조가 대칭일 경우만 점근적 성질을 만족한다. 오차항의 구조가 비대칭일 경우는 중위수에 근거한 LAD추정량보다는 표본 분위수를 근거한 추정량이 더 효율적일 수 있다.

비대칭분포에 대한 LAD추정량을 보완하기 위해 Koenker와 Basset(1978)는 표본 분위수를 선형회귀모형에 일반화하여 다음 함수

$$R_n^*(\theta : \beta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \rho_\beta(y_t - \min\{c_t, f(x_t, \theta)\}) \tag{1.3}$$

를 최소화하는 값 $\hat{\theta}_n(\beta)$을 회귀분위(Regression Quantiles, RQ)추정량이라 하였다. 여기서 함수 $\rho_\beta(\cdot)$는

$$\rho_\beta(\omega) = \begin{cases} \beta\omega, & \omega \geq 0 \\ (\beta - 1)\omega, & \omega < 0 \end{cases}$$

이고 $0 < \beta < 1$ 이다. 선형회귀모형에 대한 RQ추정량의 성질들은 Powell(1986)과 Portnoy(1991)에 의하여 연구 되었으며 Jurečkova와 Procházka(1994) 그리고 Choi와 Kim(2001)는 비선형회귀모형에 대한 RQ추정량의 점근적 성질을 연구하였다.

본 논문에서는 중도절단시점에 제한을 받는 검열자료를 종속변수로 포함하고 있는 비선형검열회귀모형 (1.2)에 대한 회귀모수의 참값을 추정하기 위하여 회귀분위추정량을 소개하고 제안된 추정량의 강일치성을 만족하는 충분조건을 제안한다. 그리고 회귀분위추정량의 강일치성을 설명하는 적절한 예제를 제시한다.

2. 강일치성

본 절에서는 검열회귀모형에 대한 회귀분위추정량의 강일치성을 만족하는 충분조건을 제안하였다. 본 논문에서 사용된 여러 기호들을 간단히 하기 위하여 다음과 같은 기호들을 정의하였다.

$$f_t(\theta) = f(x_t, \theta),\ a_t(\theta) = f_t(\theta) - c_t,\ b_t(\theta) = f_t(\theta) - f_t(\theta_o),$$

$$\nabla f_t(\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta_i} f_t(\theta)\right]_{(p\times 1)},\ \nabla^2 f_t(\theta) = \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} f_t(\theta)\right]_{(p\times p)}.$$

RQ추정량 $\hat{\theta}_n(\beta)$의 강일치성을 위하여 검열회귀모형 (1.2)에 대하여 다음 조건을 가정하자.

가 정 A

A_1 : 모수공간 Θ는 R^p의 컴팩트 (compact) 부분집합이고 Γ는 R^q의 유계집합이다.

A_2 : 모수공간 Θ에 속하는 모든 θ에 대해 $\nabla f_t(\theta)$와 $\nabla^2 f_t(\theta)$가 존재하고, $\nabla f_t(\theta)$는 $\Gamma\times\Theta$에서 연속이다 .

A_3 : 집합 $D_n(\theta) = \{t : f_t(\theta) \neq f_t(\theta_o), \theta \neq \theta_o\}$의 원소 갯수인 $d_n(\theta)$와 전체 자료수인 n의 비, 즉 $\frac{d_n(\theta)}{n}$가 $d(\theta)$에 수렴하고 $0 < d(\theta) < 1$이다.

가 정 B

B_1 : 오차에 대한 분포함수는 $G(x)$이고, 밀도함수 $g(x) = G'(x)$는 $\eta_\beta = G^{-1}(\beta)$의 근방에서 양수이며 연속이다.

표본 분위수 개념을 회귀모형에 일반화한 RQ추정량은 β값에 따라 변한다. 주어진 β값에 따라 RQ추정량을 구하여 서로 다른 β값에 따라 RQ추정량을 비교하는 것도 유익함으로 다음과 같이

$$f(x, \theta) = \theta_1 + \tilde{f}(x, (\theta_2, \cdots, \theta_p))$$

절편을 가지는 비선형함수를 반응함수로 갖는 회귀모형을 생각하는 것이 RQ추정량의 특징을 더욱 잘 설명할 수 있다. 이를 위해

$$R_n(\theta : \beta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \rho_\beta(y_t - \eta_\beta - \min\{c_t, f_t(\theta)\}) \tag{2.1}$$

라 하자. 그러면 $R_n(\theta : \beta)$을 최소로 하는 값과 (1.3)에서 정의된 RQ추정량은 서로 동치임으로 $R_n^*(\theta : \beta)$을 $R_n(\theta : \beta)$로 변환하여 RQ추정량의 목적함수로 사용할 수 있다.

다음 정리는 식 (2.1)을 변형한

$$Q_n(\theta : \beta) = R_n(\theta : \beta) - R_n(\theta_o : \beta)$$

의 극한 성질을 설명하고 있다.

정리 2.1 비선형검열회귀모형 (1.2)이 가정 A, B를 만족하면 $Q_n(\theta:\beta)-E[Q_n(\theta:\beta)]$가 0으로 강수렴한다. 즉,

$$Q_n(\theta:\beta)-E[Q_n(\theta:\beta)]\xrightarrow{a.s.}0$$

이다.

증명

$$V_t(\beta,\theta,\theta_o)=\rho_\beta(y_t-\min\{c_t,f_t(\theta)\}-\eta_\beta)-\rho_\beta(y_t-\min\{c_t,f_t(\theta_o)\}-\eta_\beta)$$

라 하면 Chebyshev 부등식은

$$P\{|Q_n(\theta)-E[Q_n(\theta)]|>\epsilon\}\le\frac{\max\limits_{1\le t\le n}Var[V_t(\beta,\theta,\theta_o)]}{n\epsilon^2}.$$

을 의미함으로 정리 2.1를 증명하기 위해서는 $V_t(\beta,\theta,\theta_o)$의 분산이 유한함을 보여주면 충분하다. 함수 $\rho_\beta(\cdot)$의 볼록성으로부터

$$\rho_\beta(x+y)\le\rho_\beta(x)+\rho_\beta(y)$$

을 유도할 수 있다. 따라서 단순한 계산 결과로 다음과 같은

$$V_t(\beta,\theta,\theta_o)\le\begin{cases}0, & on\ \Omega_1=\{x\in\Omega:c_t<f_t(\theta),c_t<f_t(\theta_o)\}\\ \rho_\beta(f_t(\theta_o)-f_t(\theta)), & on\ \Omega_2=\{x\in\Omega:c_t>f_t(\theta),c_t>f_t(\theta_o)\}\\ \rho_\beta(f_t(\theta_o)-c_t), & on\ \Omega_3=\{x\in\Omega:f_t(\theta)<c_t<f_t(\theta_o)\}\\ \rho_\beta(c_t-f_t(\theta_o)), & on\ \Omega_4=\{x\in\Omega:f_t(\theta_o)<c_t<f_t(\theta)\}\end{cases}$$

결과를 얻을 수 있다. 또한 t가 Ω_3나 혹은 Ω_4에 속하는 경우는

$$\rho_\beta(c_t-f_t(\theta_o))\le\rho_\beta(f_t(\theta)-f_t(\theta_o)),\ \rho_\beta(f_t(\theta_o)-c_t)\le\rho_\beta(f_t(\theta_o)-f_t(\theta))$$

이므로

$$V_t(\beta,\theta,\theta_o)\le\rho_\beta(f_t(\theta_o)-f_t(\theta))$$

이다. 따라서 $\tau_\beta=\max\{\beta,1-\beta\}$라 하면

$$V_t(\beta,\theta,\theta_o)\le\tau_\beta|f_t(\theta_o)-f_t(\theta)|$$

이다. 그러므로, 위 식과 Hölder 부등식으로부터

$$V_t(\beta,\theta,\theta_o)\le\tau_\beta\|\nabla f_t(\bar\theta)\|\|\theta-\theta_o\| \tag{2.2}$$

을 유도할 수 있으며 여기서 $\bar\theta=\lambda\theta_o+(1-\lambda)\theta, 0\le\lambda\le1$이고, $\|.\|$는 유클리드 노름을 표시한다. 그러므로 식 (2.2)와 가정 A로부터 $V_t(\beta,\theta,\theta_o)$의 분산이 유한함을 확인할 수 있다.

검열회귀모형 (1.2)에 대하여, 앞에서 제시한 가정 A, B에 다음 가정을 추가하자.

가 정 C

C_1 : 집합 $C_n(\theta_o) = \{t : f_t(\theta_o) < c_t\}$의 원소 갯수인 $q_n(\theta_o)$와 전체 자료수인 n의 비, 즉 $\frac{q_n(\theta_o)}{n}$가 $q(\theta_o)$에 수렴하고 $0 < q(\theta_o) \leq 1$이다.

C_2 : 행렬 $V_n(\theta_o) = \frac{1}{n} \sum_{t \in C_n(\theta_o)} \nabla f_t(\theta_o) \nabla f_t^T(\theta_o)$는 어떤 양의 정칙행렬 $V(\theta_o)$로 수렴한다

참고 실제적인 실험에서 종속변수의 값이 중도절단시점 내에 얼마나 많이 관찰할 수 있는가 하는 것은 중요한 문제이다. 충분한 시간을 가지고 실험을 관찰하거나 기록할 경우는 $q(\theta_o) = 1$이 됨으로 가정 C_2는 비선형회귀모형에서 자주 언급되는 조건으로 변형되고 일정한 시간내에 관찰할 수 있는 종속변수의 값이 극히 적은 경우 $(q(\theta_o) = 0)$는 회귀모형에 적합하지 않을 수 있다. 따라서 가정 C_1에서 제시한 것과 같이 중도절단시점 내에 관찰할 수 있는 종속변수의 수와 전체 자료수의 비는 일정한 비율을 유지하여야 한다.

다음 정리는 검열회귀모형 (1.2)에 대한 회귀모수 θ_o에 대한 회귀분위추정량의 강일치성을 설명한다.

정리 2.2 비선형검열회귀모형 (1.2)이 가정 A, B와 C를 만족하면 회귀분위추정량 $\hat{\theta}_n(\beta)$는 $(\theta_1 + \eta_\beta, \theta_2, \cdots, \theta_p)$로 강수렴한다. 즉,

$$\hat{\theta}_n(\beta) \xrightarrow{a.s.} (\theta_1 + \eta_\beta, \theta_2, \cdots, \theta_p)$$

이다.

증명 RQ추정량 $\hat{\theta}_n(\beta)$의 강일치성을 보여주기 위해서 임의의 $\delta > 0$에 대하여 다음 식

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\|\theta-\theta_o\|>\delta} \{R_n(\theta;\beta) - R_n(\theta_o;\beta)\} > 0 \quad a.e.$$

가 성립함을 보여주며 충분하다. 정리2.1에서

$$Q_n(\theta : \beta) = E[Q_n(\theta : \beta)] + o(1)$$

이므로 회귀모수 θ_o가

$$Q(\theta : \beta) \equiv \lim_{n\to\infty} E[Q_n(\theta : \beta)]$$

의 극소값임을 보여주자. Ω_i에 속하는 t에 대한 $V_t(\beta, \theta, \theta_o)$의 기대값을 $F_{ti}(\theta)$라 하고 $F_{t3}(\theta)$을 구하면

$$\beta(a_t(\theta_o) - b_t(\theta)) - \left[\int_{-\infty}^{b_t(\theta)+\eta_\beta} (a_t(\theta_o) - b_t(\theta)) - \int_{b_t(\theta)+\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)} \lambda + \int_{b_t(\theta)+\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)} (a_t(\theta_o) + \eta_\beta)\right] dG_t(\lambda)$$

이고, 가정 B를 이용하여 간단히 정리하면

$$\left[\int_{b_t(\theta)+\eta_\beta}^{\eta_\beta} (a_t(\theta_o) - b_t(\theta)) + \int_{b_t(\theta)+\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)} (\lambda - a_t(\theta_o) - \eta_\beta)\right] dG_t(\lambda)$$

이다. 이와 비슷한 방법으로 $F_{t4}(\theta)$는

$$\begin{cases} \left[\int_{\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)} (a_t(\theta_o) - \lambda) + \int_{\eta_\beta}^{\infty} \eta_\beta\right] dG_t(\lambda), & \eta_\beta \geq 0 \\ \int_{\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)} (a_t(\theta_o) - \lambda) dG_t(\lambda), & \eta_\beta < 0 \end{cases}$$

이고, $F_{t2}(\theta)$는

$$\begin{cases} \int_{\eta_\beta}^{\eta_\beta+b_t(\theta)}(b_t(\theta)-\lambda+\eta_\beta)dG_t(\lambda), & a_t(\theta_o)>b_t(\theta) \\ \left[\int_{\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)}(b_t(\theta)-\lambda+\eta_\beta)+\int_{a_t(\theta_o)}^{\infty}(b_t(\theta)-a_t(\theta_o)+\eta_\beta)\right]dG_t(\lambda), & \eta_\beta<a_t(\theta_o)<b_t(\theta)+\eta_\beta \\ \int_{\eta_\beta}^{\infty}b_t(\theta)dG_t(\lambda), & a_t(\theta_o)<\eta_\beta<b_t(\theta)+\eta_\beta \end{cases}$$

이다. 위 식은 $b_t(\theta)$가 0보다 클 경우에 계산한 결과이며 0보다 작은 경우는 비슷한 방법으로 구할 수 있으므로 여기서는 생략한다. 한편 Ω_2나 혹은 Ω_3에 속하는 t에 대하여 모수 θ에 대한 $E[V_t(\beta,\theta,\theta_o)]$의 1계 미분은

$$\nabla f_t(\theta)\int_{\eta_\beta}^{\eta_\beta+b_t(\theta)}dG_t(\lambda)$$

이고, 2계 미분은

$$\int_{\eta_\beta}^{\eta_\beta+b_t(\theta)}dG_t(\lambda)\nabla^2 f_t(\theta)+g_t(\eta_\beta+b_t(\theta))\nabla f_t(\theta)\nabla^T f_t(\theta)$$

이다. 단 t가 Ω_2에 속할 경우는 $a_t(\theta_o)>b_t(\theta)$인 경우만 생각하였다. $a_t(\theta_o)<b_t(\theta)$인 경우는 쉽게 구할 수 있고, 회귀모수의 참값 θ_o가 극소값임을 증명하는데 앞으로는 사용되지 않으므로 여기서는 생략하였다. 지금, $k_n(\beta)=\min\limits_{1\le t\le n}g_t(\eta_\beta)$라 하면

$$\begin{aligned}\nabla^2 E[Q_n(\theta_o:\beta)] &= \frac{1}{n}\sum_{t\in C_n(\theta_o)}g_t(\eta_\beta)\nabla f_t(\theta_o)\nabla^T f_t(\theta_o) \\ &\ge \frac{k_n(\beta)}{n}\sum_{t\in C_n(\theta_o)}\nabla f_t(\theta_o)\nabla^T f_t(\theta_o),\end{aligned}$$

이고, $\nabla E[Q_n(\theta_o:\beta)]=0$이므로 가정 C에 의하여 회귀모수의 참값인 θ_o는 $Q(\theta:\beta)$의 극소값이다. 다음으로 $\lim\limits_{n\to\infty}E[Q_n(\theta:\beta)]$가 $N_\zeta(\theta_o)\equiv\{\theta:\|\theta-\theta_o\|\ge\zeta\}\cap\Theta$에서 양수임을 보여주자. 가정 A는

$$EQ_n(\theta:\beta)=\inf_{\theta^*\in N_\zeta(\theta_o)}E[Q_n(\theta^*:\beta)]$$

을 만족하는 θ의 존재성을 설명한다. 그리고 $t\in\Omega_2$일 때 $0<b_t(\theta)<a_t(\theta_o)$이므로

$$\begin{aligned}F_{t2}(\theta) &> \int_{\eta_\beta}^{\eta_\beta+b_t(\theta)}(b_t(\theta)-\lambda+\eta_\beta)dG_t(\lambda) \\ &= g_t(\eta_\beta^*)[G_t(\eta_\beta+b_t(\theta))-G_t(\eta_\beta)]\equiv\eta_{t2}>0\end{aligned}$$

이다. 여기서 η_β^*는 η_β와 $\eta_\beta+b_t(\theta)$사이의 내분점이다. 또한 $t\in\Omega_3$일 때 $b_t(\theta)<a_t(\theta_o)<0$이므로

$$\begin{aligned}F_{t3}(\theta) &\ge \begin{cases}\int_{\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)}(\lambda-a_t(\theta_o)-\eta_\beta)dG_t(\lambda), & if\ \eta_\beta<a_t(\theta_o)<0 \\ \int_{\eta_\beta+a_t(\theta_o)}^{a_t(\theta_o)}(\lambda-a_t(\theta_o)-\eta_\beta)dG_t(\lambda), & if\ a_t(\theta_o)<\eta_\beta<0\end{cases} \\ &\equiv \eta_{t3}>0\end{aligned}$$

이고, $t \in \Omega_4$일 때 $0 < a_t(\theta_o) < b_t(\theta)$이므로

$$F_{t4}(\theta) \geq \int_{\eta_\beta}^{a_t(\theta_o)} (a_t(\theta_o) - \lambda) dG_t(\lambda) \equiv \eta_{t4} > 0$$

이다. 따라서 $\eta_t \equiv \{\eta_{t2}, \eta_{t3}, \eta_{t4}\}$라 하면, 가정 C에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\theta \in N_\zeta(\theta_o)} E[Q_n(\theta : \beta)] \geq 3q(\theta)\eta$$

이므로 회귀분위추정량 $\hat{\theta}_n(\beta)$은 θ_o에 강수렴한다. 여기서 $\eta = \min_{1 \leq t \leq q_n(\theta_o)} \{\eta_t\}$이다.

참고 만약 $G(\frac{1}{2}) = 0$이면 RQ추정량은 LAD추정량이 됨으로, 정리 2.2는 NCRM에 대한 LAD추정량의 강일치성을 설명하고 있다.

다음 예제는 회귀분위추정량의 강일치성이 적용되는 모형을 설명하여 준다.

예제 1 검열회귀모형 (1.2)의 반응함수는

$$f(x_t, \theta) = \theta_1 + \theta_2 e^{\theta_3 x_t}$$

이고, 독립변수 x_t는 분포함수을 $H(x)$로 가지는 어떤 분포에서 균일하게 선택되었으며 오차항의 분포함수 $G(x)$는 가정 B를 만족한다고 하자. 그리고 θ_2는 일정한 값을 가지며 회귀모수의 참값 θ_o는 $\Theta = [0, a_1] \times \{k\} \times [0, a_3], a_1, a_3 < \infty$에 속한다고 하자. 또한 가정 A_2, C_1이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} V_n(\theta_o) &= \frac{1}{n} \sum_{t \in C_n(\theta_o)} \nabla f_t(\theta_o) \nabla f_t^T(\theta_o) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{q_n(\theta)}{n} & \frac{1}{n} \sum_{t \in C_n(\theta_o)} k x_t e^{\theta_3 x_t} \\ \frac{1}{n} \sum_{t \in C_n(\theta_o)} k x_t e^{\theta_3 x_t} & \frac{1}{n} \sum_{t \in C_n(\theta_o)} \left(k x_t e^{\theta_3 x_t}\right)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

는

$$q(\theta) \begin{bmatrix} \int dH(x) & \int kxe^{\theta_3 x}\, dH(x) \\ \int kxe^{\theta_3 x}\, dH(x) & \int \left(kxe^{\theta_3 x}\right)^2 dG(x) \end{bmatrix}$$

로 수렴한다. 더우기 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$에 대하여

$$\alpha V(\theta) \alpha^T = q(\theta) \int \left(\alpha_1 + \alpha_2 kxe^{\theta_3 x}\right)^2 dH(x) > 0$$

이므로 회귀분위추정량의 강일치성을 만족한다.

참 고 문 헌

1. Chen, X. R., and Wu, Y. (1994). Consistency of L_1 Estimates in Censored Linear Regression Models, *Commmnication in Statistics,* 23, 1849-1858.

2. Choi, S. H., and Kim, H. K. (1998). Asymptotic Properties of LAD Estimators in Censored Nonlinear Regression Model, *Journal of the Korean Statistical Society,* 27, 101-112.

3. Choi S. H., Kim H. K., and Park, K. O. (2001). Nolinear regression quantiles estimation, *Journal of the Korean Statistical Society,* 30, 551-561.

4. Jurečková, J. and Procházka, B. (1994). Regression quantiles and trimmed least squares estimators in nonlinear regression model, *Nonparametric Statistics,* 3, 201-222.

5. Koenker,R., and Bassett, G. (1978). Regression Quantiles, *Econometrica,* 46, 33-50.

6. Portnoy, S. (1991). Asymptotic behavior of regression quantiles in non-stationary dependent cases, *Journal of Multivariate Analysis,* 50, 100-113.

7. Powell, J. L. (1984). Least Absolute Deviation Estimation for the Censored Regression Model, *Journal of Econometrics,* 25, 303-325.

8. Powell, J. L. (1986). Censored regression quantiles, *Journal of Econometrics,* 32, 143-155.

9. Wang, J. (1995). Asymptotic normality of L_1-estimators in nonlinear regression, *Journal of Multivariate Analysis,* 54, 227-238.

10. Wu, C. F. (1981). Asymptotic theory of nonlinear least squares estimation, *The Annals of Statistics,* 501-513.