韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 655-691.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 655-691.

무한개념의 이해와 반성적 추상

전 명 남 (경북대학교)

16개의 무한개념 문제를 가지고 47명의 대학생에게 개별 검사하여 무한개념의 이해 과정을 설명하고자 시도했다. 전문가-초심자의 조망에서 미시발생적 방법을 사용하여 2명의 사례를 비교·분석하였다. Cifarelli(1988)'의 반성적 추상과 Robert(1982)와 Sierpinska(1985)의 무한개념의 3단계를 설명의 틀로 사용하였다. 실무한 개념 수준으로 이행한 사례 P는 그렇게 하지 못한 L보다 높은 수준의 반성적 추상을 보여 주었다. 따라서 반성적 추상은 무한개념의 이해에 결정적인 사고의 메카니즘으로 볼 수 있다.

Ⅰ. 서 론

무한개념은 수, 공간적 양, 시간, 운동과 변화 등을 다루기 위해서는 물론이고, 수학과 과학의 개념 확장에 있어서 새로운 아이디어와 조망을 제공해 준 것으로 알려져 있다(Baron, 1969; Davis & Hersh, 1980; Kline, 1972; Fishbein, 1979; Robert, 1982; Sierpinska, 1985). 즉, 수학사(數學史)적으로, 무한개념의 이해와 조작은 정적인 수학을 운동과 변화의 수학으로 바꾸었으며, 미분과 적분이 구성되는 근간의 위치에 있어서 패러다임적 전환을 가지고 왔다. 따라서 무한개념의 이해는 현대의 수학 학습에서 필수적으로 인정되고 있다. 그러나, Fishbein 등(1979)은 무한개념의 획득은 교수(teaching)의 영향을 받지 않는다는 주장을 하고 있어 무한개념의 이해에 작용하는 지식발달의 메카니즘을 다루는 접근이 요구되고 있다.

최근 수학학습 과정에서 반성적 추상의 역할을 탐색하는 연구들이 나타나기 시작하였다(Dubinsky, 1986, 1991; Cifarelli, 1988). 반성적 추상(abstration réfléchissante)은 Piaget의 심리학적 연구에서 나온 독창적인 개념으로 엄격하게는 '추상을 반성한다'는 의미이고, '구성적 추상(Kamii & Devries, 1988)'이라고도 한다. 수학에서의 추상은 Krutetskii(1976), Silver(1979, 1981), Dubinsky(1986, 1991), Sfard(1989, 1991, 1994) 등에 의해 계속 연구되어 왔으며 최근에는 수학적 개념 이해와 관련해서 Piaget의 반성적 추상을 실증적으로 접근한 Cifarelli(1988), Goodson-Espy(1995, 1998), Petty(1996) 등의 연구들이 두드러지고 있다.

이 연구에서는 문제해결 과정에서 무한개념 수준에서의 변화의 정도가 컸던 학습자와 그렇지 않았던 학습자 간의 차이를 다룬다. 이러한 차이(difference)를 설명하기 위해 개념이해와 관련된 관련 이론의 맥락에서 학습자의 활동을 기술할 필요성이 제기된다. 이를 위해 Cifarelli(1988), Goodson-Espy(1995, 1998)의 반성적 추상의 관점에서 학습자의 문제해결 활동을 다루고자 한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 개별 학습자의 무한 개념이해에서 반성적 추상은 어떠한 역할을 하는가?
둘째, 무한 개념이해 수준에서의 발달적 차이는 반성적 추상의 차이로 설명할 수 있는가?

Ⅱ. 문헌개관

1. 무한개념 이해

무한개념이란 길이, 크기, 넓이, 시간 등에 끝이 없음을 지칭하는 무한대(infinity)와 불가분성, 무한소, 극한 개념에 이르는 무한의 과정(infinite process)을 포함하는 개념이다(Kline, 1972; Petty, 1996). 무한 혹은 무한대는 수학적으로는 변수 X가 어떠한 양수 K를 취해 보아도 반드시 그 보다 클 경우를 가리킨다. 그것이 양수인 경우의 양의 무한대, 음수인 경우는 음의 무한대라고, 양의 무한대를 줄여서 무한대라고 할 때도 있다. 극한은 어떤 양이 일정한 법칙에 따라 확정된 값에 한없이 가까워지는 개념을 일컫는다. 수학적으로는 수열 또는 점렬 a_n이 일정한 값 또는 점 α에 수렴할 때($a_n = \alpha$), α를 a_n의 극한 또는 극한값이라고 하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$와 같이 나타낸다. 그러므로 극한개념을 흔히 무한과정이라고 부르기도 한다. 왜냐하면 극한이란 끝없이 무한으로 가는 개념이기 때문이다.

무한개념을 심리학적인 관점에서 조망해 볼 때 이는 순수한 구성개념(pure construct)이다. 어떠한 직접적 경험도 이를 지원하기 위해 야기될 수 없을 뿐만 아니라 또한 가설도 아니다. 이에 반하면, 수학분야에서 무한개념은 이상적 개념으로 여겨지게 되었으며 증명 가능할 뿐만 아니라 접근할 수 있고-Cantor가 수행했던 바와 같이-다른 수학적 개념과의 총체성(totality)이나 수학적 실재(mathematical reality)를 인정받게 되었다(Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979).

한편, Cornu(1981), Robert(1982), Sierpinska(1985)에 의한 개개인의 무한 개념 발달에 대한 연구들은 무한개념 발달에는 1단계의 정적 무한(static concept of limit: SC), 2단계인 가무한(dynamic concept of limit; potential infinity: DC), 3단계의 실무한(acutalized infinity concept: AC) 개념의 세 수준이 존재한다는 점을 밝혀주고 있다. 구체적으로 보면, SC 수준의 개인에 있어서 무한과 무한과정은 존재하지 않는다. 또한 이 단계에서 무한이 존재한다고 해도 그 경계에 있는 모든 것은 유한하고 한정적이다. DC 수준의 개인은 무한과정의 존재를 인정하지만 단지 그 잠재적인 결과를 재인하는데 그친다. 계속되고 끝나지 않는 과정으로 극한에 대해 인식하지만, 극한은 접근할 수 있지만 결코 도달하지 않는 값이 된다. 무한과정은 가능하지도 않고 한정적이지도 않은 결과를 내는 것으로 단지 잠정적인 결과만이 있는 것으로 간주한다. DC 수준을 역동적 무한개념 수준 혹은 가무한 개념 수준이라고 칭한다. AC 수준의 개인은 무한과정을 조작할 수 있을 뿐만 아니라 또한 그러한 과정의 결과를 예측할 수도 있다. AC 수준에서는 수학적 대상으로서 개념화된 무한의 개념을 가진다. 무한은 전체적이고 한정된 대상으로 다루어지며 AC 수준의 개인은 한정된 과정의 결과를 예측하는 것이 가능하다고 믿는다.

2. 반성적 추상

추상은 수학의 학문적 영역도 아니고 추상을 그 내용으로 다루지도 않지만 수학을 교수-학습하는 과정과 그 성과를 체계화시키려고 하는 수학교육에서는 추상을 중요한 변인으로 다룬다. 왜냐하면, 수학교육자들은 수학의 개념 이해 및 수학 지식의 형성이 실재로부터의 추상과정의 결과라고 보기 때문이다(Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Boulet, 1993; Baumgartner 등, 1996). Piaget(1977)는 논리·수학적 지식은 반성적 추상에 의해 획득된다고 하였으며 수학분야 뿐만 아니라 물리, 생물, 사회 탐구에 적용된다고 보았다(Piaget, 1950a, 1950b, 1950c). Piaget(1970, 1985)는 외적인 대상과 주체의 내적인 정신적 조작으로 주체의 상호작용을 기술하기 위해 반성적 추상을 다루었다. Piaget(1977), Glaserfeld(1991, 1995)는 반성적 추상을 반성적 추상(reflective abstraction), 반성된 추상(reflected abstraction), 위-경험적 추상(pseudo-empirical abstraction)으로 구분하고 있다.

수학교육에 있어서 반성적 추상의 역할은 Piaget(1970)가 그것을 다루기 훨씬 전에 Kommerell(1928), Blackwell(1940), Keppers(1955) 등에 의해 수학에서의 추상 과정으로 언급된 바 있고(Krutetskii, 1976), 1950년 이후에는 Krutetskii(1976), Silver(1979, 1981), Dubinsky(1986, 1991), Sfard(1989, 1991, 1994)에 의해서도 다루어졌다. 예컨대 Krutetskii(1976)는 사례연구로 영재아의 문제해결과정을 직접 관찰하여 이들이 구체적인 자료에서 추상하기 때문에 문제해결이 가능하다는 점을 실증하였다. Silver(1979, 1981)도 수학문제 해결의 초기에 학습자는 구조를 지각하려는 경향성이 있고, 이는 일정 시간이 지난 뒤에 문제의 구조를 회상하려는 경향성과 유의한 관계가 있다는 점을 발견하였다. 그러나 Krutetskii(1976)와 Silver(1979, 1981)의 연구는 지식의 구성에 관련되는 추상의 과정을 구체적으로 다루지 못하였다. 한편 Dubinsky(1986, 1991)는 Piaget의 반성적 추상을 틀로 하는 수학적 지식의 구성과정에 대한 일반이론으로 행위-과정-대상 이론을 제안하였다. Sfard(1989, 1991, 1994)는 학생들이 추상적인 수학개념을 구성해 가는 과정은 대상으로서의 구조적인 속성과 과정으로서의 조작적 속성을 갖고 있다고 보고 대상과 과정 사이의 상호보완적 관계를 분석했다. 국내에서도 류희찬·조완영 (1994), 윤정륜·전명남(2000)에 의해 이론적 접근이 시도된 바 있다.

최근에는 수학적 개념이해과 관련해서 그 학습과정과 Piaget의 반성적 추상 개념을 실증적으로 접근한 연구들이 대두되고 있다(Cifarelli, 1988; Goodson-Espy, 1995, 1998; Petty, 1996). Cifarelli(1988)가 발견해 낸 반성적 추상은 Goodson-Espy(1995, 1998), Petty(1996) 등에 의해 재검증되어 왔다. Cifarelli(1988)는 반성적 추상을 피험자의 활동의 수준을 기준으로 도구적 수준(instrumental level), 재인 수준(recognition level), 표상의 지각적 표현에 대한 반성 수준(reflection on a perceptual expression of representation level), 표상에 대한 반성 수준(reflection on a re-presentation level), 구조적 추상 수준(structural abstration level), 구조적 자각의 수준(structural awareness level)으로 구분하였다.

도구적 수준의 활동은 지시에 따라 기계적으로 현행 과제를 수행하며 재빨리 단순하게 답을 진술하거나 문제해결 활동의 본질에 대해 생각하지 않는 경우를 가리킨다. 도구적 수준의 활동은 완전히

비반성적일 때를 가리킨다. 이 수준에서 활동하는 학습자는 수행을 하기 전이나 중도에 해결활동의 잠재적 본질에 대해 생각하는 것 같지 않다. 재인 수준은 선행 해결활동이 현행 과제를 수행하는 데 적절하다고 연관짓거나 그러한 반응을 보여줄 때이다. 이는 현행 과제를 탐색하는 동안 선행 과제에서 사용했던 절차를 자신의 사고에서 분리시키는 것을 가리킨다. 표상의 지각적 표현에 대한 반성수준은 학생들이 문제상황에 반응할 때 자신의 다이어그램, 모델, 물리적 표상을 반성의 보조자로 사용하는 수준이다. 이 활동 수준은 사고 내에서의 표상이 문제 상황에서 잠재적 활동을 분석하는데 사용되는 해석 도구로 기능하는 경우이다.

표상에 대한 반성 수준은 학생들이 이전에 구축한 절차에 대해 통제권을 획득한 것을 보여 주거나 선행 해결활동을 내면화한 것을 보여 줄 때 추론된다. 학습자가 자신의 선행 해결 활동에 대해 반성할 수 있고 그 결과를 예상할 수 없을 때 조차도 새로운 상황에서 선행활동의 수행을 보여주는 경우이다. 구조적 추상 수준은 자신의 표상으로부터 거리를 둘 수 있을 때를 가리킨다. 이 수준의 학습자는 문제를 해결할 때 필요한 특징을 식별할 수 있으며 이 특징에 기초하여 문제해결 방법을 조망할 수 있다. 구조적 추상 수준에서는 선행과제에서 구성했던 내면화된 해결방법을 가지고 있음을 보여주며 또한 상당히 구조적인 방식으로 해결 활동에 대해 반성할 수 있게 된다. 이 사고의 수준에서는 직접 그 활동을 하지 않고도 해결활동의 잠재적 과정과 결과를 표상하고 예상할 수 있다. 구조적 자각 수준은 참가자가 해결활동의 구조를 표상에 대한 요구가 없어도 예상할 수 있는 경우이다. 이 사고의 수준에서는 참가자가 해결활동을 정신적으로 꿰뚫어(run-through) 보고 있다. 실제적으로 구체적인 문제 해결 활동을 표상하려는 노력을 들이지 않고도 그 잠재적인 결과를 예상하거나 판단해 낼 수 있다. 이 수준에서 학습자에 의해 창출된 문제의 구조는 반성의 대상이다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

대구·경북, 호남지역의 K, M, J대학교에 다니는 학생 50명(남자=20명, 여자=30명)으로 교직을 이수하고 있는 예비교사들이었다. 대학교 1학년부터 4학년에 걸쳐 있었으며 연령은 만19세부터 만24세까지였고 연구에 자원한 참가자였다. 이들 가운데 47명이 실제로 과제를 마쳤으며 연이은 분석의 후보로 포함되었다. 참가자들은 고등학교를 다닐 때까지 모두 수열은 물론 미적분학까지 경험하였다. 이들의 자료를 조심스럽게 조사한 후에 두 명의 피험자 P(가명)와 L(가명)의 사례를 보다 상세한 분석을 위해 선택하였다. P와 L의 두 사례를 선택한 준거는 연구 목적에 부합하는 대표성(representativeness; Hamel, Dufour & Fortin, 1993)과 비교성(comparable case selection; Goetz & LeCompte, 1984) 면에서 적합하다고 보았기 때문이다.

2. 연구도구

무한 문제해결 과제(Problem of Infinity or Infinite process: PI)는 Petty(1996)가 개발한 문제를 번안하여 사용하였다(부록). 고등학교 수학교사 2명과 대학원생에게 PI를 보여서 무한개념과 관련된 문항인지를 확인하는 절차를 거쳐 총 16개의 문항을 구성하였다. 이 문항을 구성할 때 면접을 통해서 묻는 질문을 모두 문항에 포함되도록 하였다. Petty(1996)의 과제를 선택하게 된 이유로서는 첫째, 무한개념을 다루는 수학적 내용으로 이루어져 있다는 점이었다. Piaget(1977), Dubinsky와 Lewin(1986) 등은 수학적 지식의 이해에 반성적 추상이 작용한다고 하였으며 이를 구체적으로 다루고자 한 것이 이 연구의 목적이기 때문이었다. 둘째, 학습자들에게 노출된 적이 없는 문제로 이루어져 있다는 점이다. Cobb(1986)은 학습과제의 결정적인 필요조건은 면접동안 학습자들이 과제-관련되도록 하는 것이라고 했다. 따라서 이미 노출된 적이 없는 문제들은 학습자들의 과제-관련이 용이할 것으로 생각했다. 셋째, 추상을 반성하는 것을 나타나는 활동을 관찰할 기회를 제공할 수 있는 과제이어야 한다는 점이었다. 이들 과제는 Petty(1996)의 연구를 거쳐 무한 개념의 발달에서 반성적 추상을 관찰할 수 있다는 것이 확인되었기 때문이다. 넷째로 참가자들의 개념을 특징지울 수 있는 기회를 허용하였다. 총 16개의 문제는 각 문제가 하나의 문두와 여러 개의 질문으로 이루어져 있기 때문에 16개의 학습과제라고 볼 수 있다. 그러므로 하나의 문두와 여러 개의 질문을 통해 참가자들의 개념뿐만 아니라 활동을 관찰해내고 특징지을 수 있다.

3. 자료수집 절차와 분석

이 연구에서는 PI를 사용하여 개별검사를 실시하였으며 미시발생적 방법(Siegler & Crowley, 1991; Miller & Coyle, 1999; 전명남, 2001)을 사용하였다. PI는 적당한 크기의 조용한 방 안에 마련된 의자에 실시자와 참가자가 앉아서 실시하게 되는데 미리 연필과 볼펜, 색종이, 자, 콤파스 등의 용품을 책상 위에 배열해 두었다. 연구자는 총 16 개의 과제를 포트폴리오(portfolio)를 하였다. 참가자에게는 PI를 풀 때 머리 속에 떠오르는 어떤 생각이라도 관계없으니 답안지에 쓰기를 요청하였다. 이러한 요구는 문제를 풀어나가는 도중에도 참가자에게 재차 말해주었다. 개별 검사 동안 학생들에게는 문제를 푸는데 시간 제한을 받지 않도록 허용하였다. 문제가 무한개념 획득과 관련된다는 말을 하지 않았다. 면접은 5~7회의 회기를 거쳐 이루어졌으며 각 검사 당 20분을 초과하지 않았다. 검사에 소요된 시간은 전형적으로 1시간 15분에서 2시간 정도 지속되었다. 미시발생적 방법을 활용하여 전문가와 비전문가의 차이를 다루는 맥락에서 47명의 참가자 중에서 상세화된 비교를 위해 두 명의 자료를 사례로 선택했다.

자료분석에서는 참가자 P와 L이 PI를 풀어나가는 진행과정에서 보여준 포트폴리오의 전사를 가지고 개념수준과 반성적 추상의 변화과정에 초점을 맞추는 미시 발생적 분석을 하였다. 즉 참가자의 여러 문제에 대한 행동 반응에서의 변화에 대해 집중하여 관찰하고 기술하는 접근이다. 참가자 P의 과제 수행을 분석하고 그 해결활동을 요약하였다. 그리고 나서 사례 P와 L의 수행을 비교하였다. P

와 L의 무한 개념이해 수준의 분석은 무한개념 이해의 3단계 모델에 근거하였다(Robert, 1982; Sierpinska, 1985). 무한에 대한 학생들의 개념 이해는 정적 무한개념, 가무한 개념, 실무한 개념 수준에 걸쳐 있다. 또한, Cifarelli(1988)의 반성적 추상 수준을 P와 L의 문제해결 활동을 분류하기 위한 지침으로 사용했다. 반성적 추상은 피험자의 활동의 수준을 기준으로 도구적 수준, 재인 수준, 표상의 지각적 표현에 대한 반성 수준, 표상에 대한 반성 수준, 구조적 추상 수준, 구조적 자각의 수준이다.

무한 개념이해 수준과 반성적 추상의 수준은 연구자와 수학과와 수학교육과 대학원생 2명이 기술하고 해석하여 합치되었을 때 결정했다. 평정 및 해석자들은 무한개념과 관련된 집합론과 수학교육학의 교과목을 이수하였으며 무한 개념이해와 반성적 추상 이론을 1998년 10월부터 1999년 10월까지 12개월 이상 접해 온 경험이 있었다.

Ⅳ. 연구결과

학습자의 개념적 지식 발달에 초점을 맞추어 학습과정에서 반성적 추상의 역할을 알아 볼 목적으로 참가자에게 일련의 과제를 풀도록 하였다. 이 일련의 무한 과제를 풀어가도록 하여 이 과정에서 일어나는 학습자의 이해에 대한 설명을 제공하고자 시도했다.

사례 P와 L은 과제 수행 초기에는 둘 다 극한의 정적 개념이해 수준에 있었다. 그러나 P는 과제를 수행해 나가면서 극한의 정적 수준에서 가무한 개념이해 수준을 거쳐 실무한 개념이해 수준으로 이해를 확장해 나갔다. L은 ST 수준에서 AI 수준으로 확장해 나갔다. 사례 P와 L의 자료를 분석하는 과정에서 반성적 추상의 계열은 활동과 개념 수준에 의존적임을 찾아냈다..

1. 정적 무한에서 실무한 개념이해 수준으로의 이행: P의 사례

P는 대학교 2학년생으로 교직과목을 이수하고 있으며 인문계 고등학교에서 수학을 배운 이후 대학에서는 수학과 관련된 과목을 이수한 적이 없는 여학생이었다. 고등학교에서는 수열과 미적분학을 배운 바 있다. 3주 동안 총 6회의 회기를 거쳐 P는 과제 수행을 완료했으며 문제를 푸는데 걸린 전체시간은 대략 120분 정도였다.

가. 과제 1과 2에 P의 활동

과제 1에서 P의 활동은 과제에서 제공되는 지시를 통해서만 수행하는 것처럼 보인다. P는 이전의 어떤 경험과도 관련짓는 것을 보여주지 않고 오히려 작은 삼각형을 만드는 방법에만 고착되고 있고 이 과제의 해결 활동의 잠재적인 본질에 대해 반성하지 않고 있으므로 도구적 수준(IL)으로 보인다. 과제 1과 과제 2에서 종이를 접는 과정을 무한히 계속할 수 있을 것인가에 대한 질문에 P는 '없다'

라고 대답하였다. 무한 개념이해의 수준은 ST에 있다. 과제 2에서의 P의 초기 해석도 과제 1에서 삼각형의 종이에 제한된 것과 마찬가지로 사각형의 종이에 제한되고 있다. 과제 2에서의 P의 활동은 과제1에서의 활동과 별다른 차이를 보여주지 않고 있으며 도구적 수준에 있는 것 같다.

나. 과제 3과 4에 P의 활동

과제3에서 이러한 과정을 무한히 반복할 수 있는가의 질문에 '무한히 반복한다는 것은 불가능하다는 생각이 들고 조금만 더 하다 보면 완전한 원이 되어 버릴 것 같다'라는 P의 반응에서 과제를 끝까지 해나갈 때의 결과를 예상할 수 없는데도 새로운 상황에서 선행활동의 수행을 보여주며, '원'이라는 자기 자신의 물리적 표상을 사용하고 있다는 것이 나타나므로 '표상의 지각적 표현에 대한 반성'의 수준이라고 추론할 수 있다.

과제4에서 '변의 수가 증가할 때 어떠한 일이 일어납니까?'라고 질문했을 때 '변의 수가 많아질수록 원에 접하는 도형이 원과 같아진다'고 반응한 데에서 미루어 보아 선행 해결 활동을 현재의 과제에 적절한 것으로 규명하고 있는 것 같고 또한 자신이 고안해 낸 원과 같은 물리적 표상을 사용하고 있으므로 반성적 추상은 표상의 지각적 표현에 대한 반성 수준으로 볼 수 있다.

다. 과제 5과 6에서의 P의 활동

P는 과제 5에서 선분할을 구성해 나갔다. 그녀는 이 과제에서 이론 상과 실제 간의 차이점을 주목했으며 계속해서 반분해 나갔으며 결코 끝나지 않는 과정으로 인정했다. 이는 P가 극한에 대한 역동적인 개념 수준인 가무한 개념임을 가리킨다. 과정이 명확하게 계속될 수 있다는 P의 제안은 그녀가 표상에 대한 반성의 수준에 있음을 가리킨다. 그러나 P는 과제를 수행하면서 자신 내부의 어떤 갈등도 해결하고 있지 않은 듯 보였다. P는 계속된 반분 활동을 보여주다가 실제로 반분 과정을 더 이상 그려나가지 않았으며 그 절차를 실제적으로 수행할 필요가 없는 내면적인 수준을 성취해 냈다. P는 선행의 해결활동을 검토할 수 있다. 5번 과제에서 이 과정을 무한히 반복한다면 어떠한 일이 일어날까라는 질문에 '점이 되어 버릴 것이다'라고 반응하고 있다. 여기에서 P가 실제적으로 이러한 해결활동을 완수해 내지 않고도 활동의 결과나 특징을 식별해 낼 수 있으며, 잠재적인 해결 활동에 대해 반성할 수 있다는 점에서 구조적 추상 수준에 있다고 추론할 수 있다.

과제 6에서는 실제로 벽에 도달하는 것이 가능하다고 믿기 때문에 이것을 비연속적인 과정(discontinous process)으로 보고 있었다. 무한개념 이해수준은 ST였다. P는 이 과정에서 혹은 그 결과에서 문제가 잠재적으로 묻고 있는 바에 대해서 지각하고 있지 않은 것으로 보였다. P는 과제에서 제공되는 지시를 통해서만 수행하고 있고 어떠한 반성도 보여주지 않았으므로 도구적 수준에 있었다.

라. 과제 7과에서 P의 활동

과제 7에서 P는 상대방과의 달리기를 그림을 그림으로써 시작하고 있다. P는 이 그림을 그리는 것을 계속하지 않았다. 이는 그 질문을 이해하지 못한 결과이다. P는 내가 상대방을 따라 잡았을 것

이라고 결론내린다. '어떤 일이 일어나고 있습니까?'라는 질문에 그는 '당연히 잘 달리는 사람이 더 많이 앞지를 것이다'라고 반응하고 있으며 실제적인 지각에 제한 받고 있음을 제안한다. 또한 그림이라는 물리적인 표상을 사용하고 있으므로 P는 표상의 지각적 표현에 대한 반성의 수준에 있다

마. 과제 8에서 P의 활동

P는 한 점에서 원의 중심으로 선분할을 그려 나감으로써 시작한다. 다음으로 그는 원 안에 또 다른 원을 만들었다. 자신이 만들어간 모델을 사용하였기 때문에 이는 P의 반성적 활동이 표상의 지각적 표현 수준에 있다는 점을 제안한다. 이러한 과정을 계속할 수 있을 것이라는 그의 인정은 표상 수준의 지시가 된다. P는 '원은 점점 더 작아지고 나중에는 점으로 보일만큼 작아질 것이다'라고 반응하는데 이는 해결 활동의 잠재적 결과를 표상하고 있음을 보여준다. 또한 '이런 분할 과정으로부터 얻어지는 기하학적인 도형은 무엇입니까?'라는 질문에 '점들이 모인 선'이라고 반응하고 있어서 과제를 해결하였을 때의 잠재적 결과를 예측할 수 있었다. 또한 과제를 다루는 감각적 조작으로부터 어느 정도의 거리를 둘 수 있었으므로 P는 구조적 추상 수준을 보여 주었다.

바. 과제 9에서의 P의 활동

과제 9의 연속된 수열 '1, 2, 3, 4, 5, ……'에 직면에는 P는 매번 증가한다고 말하였다. 0.9, 0.99, 0.999…에서 점점 수가 더 복잡해지며 수가 무한히 계속 이어질 수 있다고 말하였다. 그리하여 $0.\dot{9}$는 1이 될 수 있다고 동의한다. 과제 9에서 P의 무한개념 이해수준은 실무한 수준을 보여주고 있다. 비록 과제 9에 대한 반성적 활동이 일부 선행경험에 종속하는 것처럼 보이긴 하지만 P는 과제에서 어느 정도 거리를 두고 0.9, 0.99, 0.999…의 결과를 예측할 수 있었으므로 구조적 추상 수준에 있다.

사. 과제 10에서 P의 활동

과제 10에서 P는 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{15}{8}$,…을 고려하고는 원래 수의 $\frac{1}{\text{분모}}$에 $\frac{1}{2}$를 곱한 만큼 증가하기를 계속한다는 점을 인정한다. P는 어떤 종류의 규칙을 찾아내고 있었다. P는 수직선에 수를 그래프화하였다. 이 과제에서 반성적 활동을 도출하기는 어렵다.

100, 50, 25, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{4}$, …를 보고는 나온 수의 $\frac{1}{\text{분모}}$에 반만큼 감소한다고 했다. 앞의 항의 반만큼 그 수가 점점 작아진다고 인정했다. 여기에서 P는 선행 해결활동에 종속하는 것으로 보이며 보다 명백하게는 물리적 모델 혹은 표상에 종속하고 있는 것 같다. 이러한 해결활동은 반성의 지각적 표현 수준을 가리킬 수 있다. P가 수열을 그래프로 그림으로 그려서 과제를 해 냈다. 이는 P가 과제를 이해하거나 해석하기 위해 사용하는 모델이 된다. 수직선을 구축한 후에 P는 연속적인 수들

간의 차이에 초점을 맞춘다. P의 반성적 활동은 물리적 모델을 구성하는 표상의 지각적 표현에 대한 반성 수준으로 나타난다.

또한 4, 3.5, 3.25, 3.125, 3.0625, …의 수열에 대해서는 '4에서 3까지 수가 줄어든다. 3과 4에서 반 틈, 또 반 나누어진 데에서 또 반…, 이렇게…' P는 소수점이 반이 되고 또한 수가 점점 적어지는 점을 깨닫는다. P는 그 값이 3에 접근하고 있다는 점을 주목하고 그리고 수열이 3에 접근하고 있다고 진술해 낸다. P의 반응은 이러한 과제를 선행과제에 관련시키는 듯 보이므로 재인수준에서의 반성을 가리킨다.

1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, …의 수열에서 P는 하나의 규칙을 찾아낸다. 3에 도달할 때까지 1을 더하며 그리고 3항씩 반복해서 시작한다고 말하였다. 이 과제는 유용한 과제가 되는 것으로 보이지는 않는다. 비록 여기에서 지각적 표현 수준에서 반성하는 것이라 할 수 있지만, 이 과제로는 거의 성취하지 못한다. 1, -1, 1, -1, 1, -1, …의 수열에서도 P는 어떤 규칙을 찾고 있다. 2항씩 반복되고 있다고 지적하였다. 이 과제 또한 유용한 과제가 되는 것으로 보이지는 않는다. 2, 2, 2, …에서도 어떤 규칙을 찾아낸다. 수열 0, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$… 을 검토하고는 다음 항을 결정해 내려고 했다. '0과 -2를 기준으로 해서 한 번씩 증가한다. 증가하는 간격은 $\frac{1}{n}$ (n: 자연수) 만큼' 이라 했다. P는 이 과제에서 양수는 점점 1에 가까워지고 있음을 간과하고 있으며 문제를 인식하는데 오류를 범하고 있다. 이러한 과제는 어떤 실제적인 통찰을 제공하고 있는 것 같지는 않다. 즉 반성적 활동을 나타내는 것 같지는 않다. P는 물리적 표상으로써 수직선을 구성했는데 이는 표상의 지각적 표현에 대한 반성의 수준을 가리킨다.

아. 과제 11에서 P의 활동

과제 11에서는 콘크리트 지면 위 30cm 높이에서 고무공을 떨어 뜨렸다. P는 연속적인 수열이 생성된다고 하고 이를 '1에서 시작하는 수열로 $1/2^n$(n: 0, 1, 2, 3, 4,…)'이라고 쓰고 있다. P는 자신의 과제 해결활동의 잠재적 결과에 대해 반성하고 있는 것으로 보이며 또한 그 과정이 무한으로 계속될 수 있다는 점을 제안하고 있다. 감각적으로 확인하지 않고도 이 과정에 상징을 사용하는 구조적인 방법으로 해결하려했으며 자신의 해결활동을 표상해 냈으므로 여기에서 P의 반성적 추상 수준을 구조적 추상 수준이라고 추론할 수 있다.

그러나, 이 공이 얼마나 계속 움직일까에 대한 질문에는 '실제로는 얼마가지 않아서 멈추게 될 것이다'라고 반응하고 있어서 P가 선행해결활동에 대해 반성하고 있는가 의문을 갖게 만든다. 이러한 결과는 이 앞에서 수열 $1/2^n$의 규칙을 발견한 점과는 대조적이다. 즉 수학적 공식으로 규칙성을 발견해 내려는 노력은 역력히 보이나 사고에 대한 반성의 측면에서는 오히려 뒤떨어지는 것 같다.

자. 과제 12에서 P의 활동

과제 12에서 P는 블록수에 초점 맞추고 있고 3에서 매번 1씩 그것이 증가한다고 지적하였다. 그림과 같은 과정을 계속 진행할 수 있을까에 대한 질문에 P는 선행 해결활동을 반성하고 있는가에 대한 의문이 드는 반응을 보이고 있다. '점점 더 벽돌이 잘게 나누어지고 있다'고 물리적인 표상을 반성의 보조자로 사용하고 있어 표상의 지각적 표현에 대한 반성 수준으로 추론할 수 있다.

차. 과제 13, 14, 15에서 P의 활동

과제 13에서 P는 직사각형을 만들고 있다고 확신하고 있으며 면의 길이가 $\frac{1}{2}$씩 감소하고 있다는데 주목하고 있다. 그러나 가로의 길이와 넓이에 대해서는 확신할 수 없다고 반응하여 과제를 꿰뚫어 보지 못하고 있다. P는 면의 길이와 면적 간에 존재하는 관계를 깨닫지 못하고 있다. 그림과 같은 과정을 계속 진행할 수 있을까의 질문에 '언젠가는 점이 되어서 계속 진행할 수 없을 것이다'라고 반응하고 있어 과제 13에서의 P의 무한 개념이해 수준은 실무한 수준이다. 현재의 감각적 지각을 넘어서서 잠재적 해결 활동에 대해 예측하고 있으므로 반성적 추상은 구조적 추상 수준에 있다고 볼 수 있다.

과제 14에서의 P의 반응을 살펴 보면 '삼각형이 점점 작아진다', 이 과정은 '점이 되어 버릴 것이다'로 반응하고 있어 그 과정에 대해 어떤 통제권를 획득한 것 같으며 해결 활동의 잠재적 결과에 대해 예측할 수 있었다. 그러므로 과제 14에서 P의 반성적 추상은 구조적 추상의 수준이다.

과제 15에서 P는 '선 그래프는 똑같은데 막대 그래프가 점점 증가하고 있다'고 하여 막대의 패턴을 규명하였다. 계단의 영역이 점차 사선 밑의 넓이에 근접하게 된다고 믿고 있다. 여기에서 P는 실무한 개념 수준에 도달하고 있음을 알 수 있다. '사선과 계단 사이의 여분 없이…'라고 이어 반응하는 것으로 보아 P의 반응은 잠재적 결과를 예측할 수 있어서 구조적 추상의 수준을 보여준다

카. 과제 16에서 P의 활동.

과제 16에서 P는 과제에서 수열의 규칙을 찾아내고 있었으므로 선행 활동들에 대해 반성하고 있는 듯 하였다. '위의 연속된 수들 중에서 어느 것이 마지막 값에 도달합니까'라는 질문에 P의 대답은 '수는 무한하기 때문에 어느 수가 마지막 값에 도달한다는 것은 불가능하다. …… 계속되기 때문이다. 하지만 첫 번째 수열은 감소하면서 1에 가까이 가고 두 번째는 증가하면서 1에 가까이 간다. 세 번째는 감소하면서 0에 가까워지고 네 번째는 증가하면서 1에 가까워진다. 다섯 번째는 1에서 시작해서 감소하면서 0.5에 가까워진다'라는 반응을 보여 실무한 개념 수준을 획득한 것으로 보인다. 선행의 과제 해결활동에 종속하면서도 상당히 구조적인 방식으로 반성할 수 있는 것 같다. P는 자신의 해결활동에서 잠재적 과정을 표상하고 예상해낼 수 있었으므로 구조적 추상 수준에 있다고 추론된다.

타. P의 해결활동 요약

P는 무한개념 발달수준에서의 이행을 보여주었다. 과제1에서 과제3까지를 하는 동안 정적인 무한개념 상태인 것으로 나타났으나 과제 11에서 16에 있어서는 실무한 개념 상태로 보인다. P의 해결활동에 대한 관찰에서 점차적으로 보다 높은 수준의 반성적 활동을 관찰할 수 있었다. P는 자신의 선행해결활동에 대해 반성하기 쉬웠으며 이것을 잠재적인 해결 활동을 표상하고 예측하는 수단으로 사용하고 있다. 모든 과제에서 나타나지는 않았지만 P에 있어서 자신의 해결 활동은 하나의 반성의 대상이 되었다. 이러한 활동을 반성함에 따라 P는 이 해결활동에 대해 조작을 수행하기 시작하였다. 선행경험과 해결활동을 사용해서 P는 잠재적인 해결활동을 예측할 수 있었다. P는 과제의 초반부인 과제1과 2를 할 때만 해도 가장 낮은 반성적 추상의 수준인 도구적 수준을 보여주었다. 그러나 과제의 후반부인 과제11에서 과제16을 해결하는 동안에는 반성적 추상의 고차적인 수준인 표상에 대한 반성 및 구조적 추상 수준이 계속해서 나타났다. 즉, P가 실무한 개념 수준을 보일 때 반성적 추상의 고차적인 수준인 표상에 대한 반성 및 구조적 추상 수준을 나타냈다.

2. P와 정적 무한개념에서 가무한 개념이해 수준으로 이행한 L의 활동 비교

L의 과제 수행 활동은 정적 무한개념에서 실무한 개념이해 수준으로 이행한 P의 사례와 비교하기 위해 검토했다. L은 대학교 2학년생으로 교직과목을 이수하고 있으며 인문계 고등학교에서 수학을 배운 이후 대학에서는 수학과 관련된 과목을 이수한 적이 없는 여학생이었다. 고등학교 때에 수열과 미적분학을 배웠다. 3주 동안 총 5회의 회기를 거쳐 L은 과제의 수행을 완료했다. L이 문제를 모두 푸는 데에는 대략 130분 정도가 걸렸다.

L의 개념 발달 수준은 무한개념에서 정적 수준에서 조작하고 있는 것으로 보인다. L의 반응은 유한성에 머물러 있었다. 무한과정과 관련된 잠재적인 해결활동에 대해 반성하는 어떤 능력도 초기에는 없었다. 그러나, L은 과제를 해결해 나가면서 보다 높은 개념 이해 수준으로 발달하고 있었다. 과제를 마쳤을 때 L은 외현적으로는 역동적 무한 개념인 가무한의 이해 수준으로 진전해 있는 듯 보였다. L은 무한에 대해 말하고 정적이 아닌 무언가로 존재하는 하나의 과정으로 지각하기 시작했다.

가. 과제 1과 2에서 P와 L의 활동 비교

삼각형의 종이를 접는 과제 1에서 L의 반응은 사례 P와 마찬가지로 '도구적'이다. 반성적 활동은 거의 없다. L은 이전의 어떤 경험과도 관련짓는 것을 보이지 않는다. 오히려 작은 삼각형을 만드는 방법에 고착되고 있었다. 삼각형을 계속 접은 후에 무엇이 될 것인가라고 물었을 때, L은 전적으로 대상에만 초점을 맞추고는 잠재적 활동의 결과를 예측할 수 없었으며 그것이 적어지게 될 것이라는 것 이상은 보여주지 않았다. 또한 계속 접는 것은 불가능하다고 제안하였다.

종이를 접어 중심부의 오른쪽에 맞추도록 하는 두 번째 과제에서 이러한 접기 과정이 계속되겠는가를 물었을 때, L은 '무한히 반복할 수 없을 것 같다'고 하였다. 그러나 계속해서 "정말로 큰 종이로 접는다면 아마도 내가 죽기 전까지 계속해서 접을 수도 있겠지만 그렇게 까지 할 필요성을 느끼지 못했으므로……. 그리고 그렇지 않다고 해도 어느 순간이 되면 더 이상 이 행동을 할 수 없을 때가 올 것 같다"라고 반응하고 있다. 그러나 해결활동의 결과를 예상할 수는 없었다. 과제2에서 L은 도구적 수준이나 재인수준에서 조작했고 두 번째 과제를 해결하기 위해 과제1에서의 자신의 방법을 반복하였다. 과제1과 과제2의 해결 동안 P와 L은 같은 해결 방법을 사용했다.

나. 과제 3과 4에서 P와 L의 활동 비교

과제 3에서 L은 하나의 원에 거의 붙으려는 모습으로 변해간다고 하였다. L은 기계적이면서도 어떤 반성적 활동도 보이지 않았다. 과제 6의 다각형을 구축하는데 있어서 '계속 도형을 만들어 갈 수 없을 것 같다'는 L의 반응은 반성적 활동의 수준이 여전히 낮다는 것을 제안하고 있다. 기껏해야 재인수준에 있다는 점을 제안하고 있다. 그러나 계속 만들어 가는 경우 '어떠한 일이 일어납니까?'라는 질문에 '선분들이 점점 짧아지면서 원쪽에 가까워진다. 확실히 볼 수는 없었지만 결국 원과 같이 될 것이라고 추측할 수 있다'라고 계속해서 반응하였는데 이는 L이 과제에 반응할 때 자신의 물리적 표상을 사용하고 있다는 것을 추론할 수 있어서 '표상의 지각적 표현에 대한 반성'의 반성적 추상을 보여주어 P와 거의 같은 수준에 있다.

'이러한 과정을 무한히 반복할 수 있습니까? 어떠한 일이 일어납니까?'의 질문에서 '어쩌면 세심하게 노력한다면 거의 원이 될 때까지는 반복할 수 있겠지만 실제적으로 무한한 반복은 있을 수 없을 것 같다'고 반응하고 있어 L의 무한개념의 이해수준은 가무한이라고 볼 수 있다.

과제4에서 '이러한 방법으로 도형을 계속 만들어 갈 수 있습니까?'라는 질문에 '계속 만들어 갈 수는 있겠지만 거의 원에 가까워져 버려서 원과 외접하는 선들을 구분할 수 없을 것 같다' 이후에 '변의 수가 증가하여 짧아진 선들은 점점 원에 가까워지고 있다'라고 반응한 데에서 미루어 볼 때 선행해결 활동을 현재의 과제에 적절한 것으로 규명하고 있는 것 같다. L의 과제4의 반응은 P와 마찬가지로 과제3의 반응과 유사하며 선행 활동의 구성에 의존하고 있다. 여기에서 반성적 추상의 수준은 '재인'과 '표상의 지각적 표현에 대한 반성'을 추론해 볼 수 있다. 그러나 '이러한 과정을 무한히 반복할 수 있습니까?'라는 질문에 '아마 무한히 반복할 수도 있을 것이지만 현재 우리가 살아가는 이곳에서 인간의 힘으로 끝까지 가는 것은 무리일 것 같다'라고 응답하였으므로 가무한 개념 이해수준에 있다고 볼 수 있다.

다. 과제 5와 6에서의 P와 L의 활동 비교

'이러한 과정을 무한히 반복한다면 어떠한 일이 일어날까요?'라는 질문에 '계산상으로는 분명 내가 찍은 마지막 이등분 점 아래에 더 낮은 단위의 점이 존재하지만 나는 찍을 수 없으므로 무한히 반복

할 수는 없을 것 같다'라고 반응하였는데 L의 반성 활동 수준이 매우 낮은 것 같다. 해결활동의 잠재적 결과에 대해 반성하는 시도에서 L은 그 모델이 어떤 선행의 방법도 참조로 하지 않고 순전히 현행의 과제에 제한되어 버렸다. 이것은 반성활동의 도구적 수준을 제안하고 있다. 과제가 끝점을 향한 잠재적 움직임에 대해 묻기 위해 재진술되었는데도 L의 반응은 유한한 용어로 진술되었다. 이 과제에서 L은 정적인 무한 개념 이해 수준을 보여 주었다. 이는 P가 과제5에서 무한히 이 과정을 반복한다면 어떠한 일이 일어날까라는 질문에 '점'이 될 것이라고 반응하면서 이 과정을 완수해 내지 않고도 그 결과를 예측해내서 '구조적 추상'의 반성적 추상 수준을 보인 것과는 상당한 대조를 이룬다.

6번 과제를 수행할 때 L은 '벽을 향해 계속 걸어갈 수 있습니까?'라는 질문에 '아마 불가능하겠지만 이론상으로는 벽에 내 몸이 닿을 때까지는 계속 걸어갈 수 있을 것이다'라고 반응하고 있어 여전히 정적인 무한 개념이해 수준에 있음을 보여 주고 있다. 과제가 지니고 있는 잠재적 과정에 관심을 가지는 것 같아 보이다가도 L은 현재 상황의 유한성 안에 제약되어 버린다. 과제 6에서 L도 과제에서 제공되는 지시를 통해서만 수행하고 있었으며 P과 마찬가지로 도구적 수준(IL)에 있었다.

라. 과제 7에서 P와 L의 활동 비교

과제 7에서 L은 시간과 거리에 관련된 정보를 통합할 수 없는 것 같았다. L은 이전의 과제들이나 방법에 대해 어떤 관련도 짓지 않는 것 같으며 어떠한 반성도 관찰해낼 수 없었다. '이 과정을 무한히 계속할 수 있습니까? 어떠한 일이 일어나고 있습니까?'라고 물었을 때 '무한히 계속할 수는 없을 것 같다. 우리 둘 다 사람인데 지치지 않을까? 아무리 힘이 좋은 사람이라도 계속해서 뛰지는 못할 것이다. 그리고 아마 누군가가 계속해서 뛰라고 한다면 난 아예부터 시도부터 하지 않을 것 같다'라고 반응하였다. L은 문제가 묻고 있는 현실적 제약을 벗어나려고 하지 않았으며 문제가 묻고 있는 잠재적인 과정과 결과에 대해 어떠한 관심도 두지 않았다. 이에 반에 P는 L과 마찬가지로 실제적인 지각에 제한을 받고 있으나 과제 7의 상황을 물리적 표상을 그려내고 있어 표상의 지각적 표현에 대한 반성 수준에 있다고 볼 수 있다. 그러나 L은 과제7의 상황에 대해 어떠한 물리적 표상도 사용하지 않으면서 문제의 지시에 제한 받고 있어 도구적 수준에 있다고 볼 수 있다.

마. 과제 8에서 P와 L의 활동 비교

8번 과제는 L이 반성 행동을 하도록 자극을 하지는 않는 듯 하다. 그녀의 구성은 매우 도구적인 반성행동의 수준을 포함하는 것처럼 보인다. '점점 작은 원들 반지름과 가까워지는 원들이 생겨난다. 근데 솔직히 말해서 문제 자체가 조금 이해가 가지 않는다. 무슨 일들이 저 원들 사이에 일어나고 있다는 뜻인가?'라는 그녀의 대답은 선행의 연속된 과제들이나 방법들과 연관해서 어떤 관계나 또는 어떤 반응도 유도하지 않았다. 과제 8의 과정을 '계속하게 됨에 따라 어떠한 일이 일어납니까?'라는 물음에 '원이 반지름에 거의 닿을 듯 작게 만들어질 것이다'라고 반응하고 있지만 L은 여전히 정적

개념이해 수준에 있는 것 같다. 한편 P는 8번 과제에 대한 자신의 활동을 통해 표상의 지각적 표현 수준에서 구조적 추상 수준까지 보여주고 있어 L의 활동과 확연한 대조를 이루고 있다.

바. 과제 9에서의 P와 L의 활동 비교

과제 9에서 L은 '일정한 양으로 더해지거나 나누어져 있고…'라고 반응하면서 수열의 어떤 규칙을 발견해낸 것 같다. 그리고 '0.999가 1과 어쩌면 같다라고 표현할 수 있다'라고 응답하고 있는데 이러한 답의 수준은 L의 무한개념 이해 수준을 한층 높게 볼 수 있다는 근거를 제공한다. 이 응답으로 보아서는 실무한 수준이라고 할 수 있다. 그러나 연이어서 나온 L의 대답은 '무한히 내가 할 수 있는 한 까지는 만들 수 있을 것이다. 근데 내가 인간인 이상 무한이란 것이 존재할 수 있을까 의문이 생긴다'라고 함으로써 현실적 제약에 지나치게 매달린다는 것을 계속해서 보여 주고 있다. 그러나 과제 9에서 L은 P와 거의 유사한 반응을 보여주었으므로 마찬가지로 반성적 추상의 수준은 구조적 추상 수준이라고 할 수 있다.

사. 과제 10에서 P와 L의 활동 비교

10과의 첫 번째 과제에서 L은 수의 연속을 고려하고 있다. '선분에 거의 다닥다닥 붙어 있으며 조금씩 그 숫자가 커지고 있다'라고 반응한다. 두 번째와 세 번째 및 네 번째 과제에서 L은 수열의 규칙을 결정할 수가 있었다. 선행 과제에서의 해결활동에 대해 내면화된 방법을 엿볼 수 있으므로 '표상에 대한 반성 수준'이라고 볼 수 있다. 네 번째 과제에서 L은 '여기 뒤에 누구도 쓰지 않는다면 이 수열들이 멈추어 있는 것이 아닐까? 다만 계속되는 것이라고 우리들이 느끼는 것이 아닐까?'하고 반문하고 있다. 비록 L이 이미 무한과정의 잠재적인 결과를 예언했을지라도 그녀는 여전히 연속적인 과제들을 유한한 비교에서 묘사한다. 10과의 과제에서 L은 가무한의 개념이해 수준에 있는 것 같다. P는 10과의 과제들에서 아주 구체적인 규칙들을 발견해내는데 몰두 하였으나 L은 과제를 가지고 오랫동안 다루고 있으면서도 구체적인 규칙들을 쓰는 데는 관심을 보여주지 않았다.

아. 과제 11에서 P와 L의 활동 비교

L은 과제11을 연속하는 숫자들과 관련짓고 있으며 그녀가 그 숫자들을 물리적인 표상으로 사용하고 있기 때문에 '표상의 지각적 표현에 대한 반성' 수준에서 조작하고 있는 것 같다. 그러나 L은 이 활동의 잠재적인 결과를 예측해낼 수는 없었다. '이 공이 얼마나 계속 움직일까요?'라는 질문에 '공을 튀겨 보면 보통 아래 위로 튀다가 어느 정도의 시간이 지나면 사람이 건드리지 않으면 데구르르 구르다가 그것도 지나면 멈출 것이다. 얼마나 공이 움직일 수 있을지는 나도 잘 모르겠다. 그리고 공의 능력에 따라서는 움직이는 시간이 바뀔 수 있을 것이다. 아무튼 30cm이니까 그리 오래 걸리지 않을 것 같다'라고 반응하고 있었다. 이 반응에서 보아 L은 현실적 제약에 갇혀서 현재의 과제를 수행해내기 위해 선행 과제를 반성하는 접근을 해내지 못하고 있다. 이는 P의 반응과 거의 유사하다.

자. 과제 12에서 P와 L의 활동 비교

L은 과제12에서 벽에 수많은 일정한 열(줄)의 직사각형 벽돌이 증가하고 있는 도식을 보고 있다. L은 '네모 칸의 빗금이 너무 많아서 더 이상 그려질 수 없는 때가 되면 끝나지 않을까?'라고 반응한다. 이어 '그러므로 나의 결론은 계속 영원히 이러한 일이 반복될 수는 없다이다'라고 대답한다. L은 선행 활동을 재인하는 수준에 있는 것 같다. L은 열(줄)과 벽돌의 수가 어느 숫자까지도 증가될 수 있다는 것을 인정한다. 그러나 그녀는 현실적 제약을 뛰어 넘지 못하고 '정적인 개념 이해 수준'에 머물렀다. 과제 12에 대한 P의 반응도 L과 마찬가지로 실재를 벗어나지 못하기 때문에 활동의 반성이 방해되고 있는 것 같다.

차. 과제 13에서 P와 L의 활동 비교

'일어나는 상황에서 확신할 수 있는 연속된 수들이 있습니까?'라는 물음에 '있다고 하고 구체적인 수들을 규칙에 따라 배열해내고 있다. 이는 현실적 제약에도 불구하고 L이 선행 해결 활동의 내면화된 방법을 성취한 것들을 제안하고 있다. 그러므로 '표상에 대한 반성 수준'에서 조작하고 있다고 볼 수 있다. 그러나 '그림과 같은 과정을 계속 진행할 수 있습니까?'라는 질문에 '계속 진행한다는 것은 무리가 있다. 나중에는 너무 작아져서 그릴 수도 없을 것이다'라고 반응하고 있어서 현실적 제약 때문에 L의 무한 개념 이해 수준은 낮은 상태로 머물러 있었다. P가 과제 13에서 해결활동의 잠재적 과정과 결과를 예측하고 있는 것과는 상당한 대조를 보여 주고 있다.

카. 과제 14에서 P와 L의 활동 비교

과제 14에서의 주어진 질문에 대한 첫머리에서의 피험자의 대답은 '점점 줄어들고 있는 직각 삼각형'이다. 그와 같은 대답은 반성 행동이라는 관점에서 보면 도구적이다. L이 곡선을 고려하기 시작할 때, 반성행동의 수준은 증가한다. 그녀는 그 과제를 묘사하고 또 반성하기 위한 수단으로 명확한 수치를 가진 삼각형의 모서리들을 분류함으로써, 물리적인 모델 또는 표상을 창안해낸다. 이것은 L이 표상의 지각적 표현에 대한 반성 수준에서 활동하고 있음을 가리킨다. 그러나 '이런 과정을 무한히 계속 진행할 수 있을까요?'라는 질문에 '무한히 계속하는 것은 불가능할 것이다'라고 대답하여 L은 여전히 정적인 무한 개념 이해수준에 있다고 볼 수 있다. 이에 반해 P는 현실적 제약을 넘어서서 자신이 감각적으로 접근하지 못하는 단계를 예측해내고 있으며 실무한 개념 이해 수준과 구조적 추상의 고차적인 반성적 추상작용을 보여주고 있다.

타. 과제 15에서 P와 L의 활동 비교

과제 15에서 L은 '선분에 사각형들이 일정한 크기로 그려가고 있는 것이 보인다. 삼각형 모양과 같은 선분에 조그만 사각형들이 자꾸 생겨나고 있다. 계단의 수가 계속 증가되면 사각형은 계속해서 증가될 수 있을 것'이라고 반응하고 있다. L의 무한개념 이해의 수준이 가무한 수준을 뛰어 넘는다고

보기에는 아직 모호한 면이 있다. 계속해서 '계단의 길이를 계속해서 좁혀가면 계단길이가 좁아져서 거의 사선에 가까워질 것이다'라고 반응하고 있는데 여기에서 L은 과제의 활동을 통해 내면화된 해결 방법을 가지고 접근하고 있으며 잠재적인 해결활동을 표상하고 예측하고 있다. 그러므로 구조적 추상 수준에서 활동하고 있다. 그러나 L은 '고등학교 때 그런 식으로 해서 선분의 넓이가 구해진다고 배웠다'고 연이어 반응하고 있어 자신이 그 활동 속에서 구조적 추상 수준에 이르렀는지 아니면 고등학교 때 구분구적법을 기억해서 과제15에서의 반응을 보여주었는지 전후 과제에서의 활동과 비교해 보았을 때는 어떤 결론을 내리기가 곤란하다. 한편 P는 과제 15에서도 과제 13, 14에서와 마찬가지로 구조적 추상 수준에서 활동을 해내고 있다.

파. 과제 16에서 P와 L의 활동 비교

과제 16에서 L은 숫자들이 일정한 크기로 증가하고 있다고 반응하였지만 실제적인 규칙을 발견해 내려는 노력을 전혀 하지 않았다. '위의 연속된 수들 중 어느 것이 마지막 값에 도달합니까?'라는 물음에 '이 중 어떤 것도 마지막에 도달하는 일은 없을 것이다. 만약 이 중 어느 하나라도 도달한다고 말한다면 그 말은 자연수에 끝이 있다는 말과 같을 것이며 그것은 옆의 수들 모두가 마지막 값이 있다는 것과 같은 소리가 되고 말 것이다. 그러므로 저 숫자들은 특별한 제재가 없는 한 누군가가 계속 계산할 수 있게 된다'라고 반응하고 있어 L이 가무한의 개념이해 수준에 있음을 여실히 알 수 있다. 한편 선행의 해결활동에서 내면화된 방법을 성취한 것을 엿볼 수 있으므로 '표상에 대한 반성 수준'에서 조작했다고 볼 수 있다. L의 반응에 비하면 P는 연속되는 수들과 그 수들의 극한을 찾아냈으며 선행 해결 활동에 의존하면서도 구조적인 방식으로 반응했으며 구조적 추상 수준을 보여 주었다.

3. 무한개념 이해수준과 이행

과제를 해결해 나가는 초기에 사례 P와 L는 여러 해결방법을 공유했다는 점이 나타났다. 그러나 P는 무한의 정적 개념이해에서 실무한 개념이해 수준으로 이행한 반면에 L은 그렇게 할 수 없었다. P와 L의 문제 해결 활동들은 반성적 추상 수준에 따라 분류할 수 있었다. 또한 무한 개념이해 수준 면에서 활동을 기술하는 것이 유용하였다.

L이 과제1에서 16을 해나갈 때에 보여 준 반성적 추상은 P의 활동에 비교해서 전반적으로 보다 낮은 수준을 보여 주었다. L은 과제 9에서와 15를 제외하고는 과제를 해결할 때에 현실적인 제약을 넘어서려는 시도를 전혀 하지 않았으며 문제해결활동을 정신적으로 꿰뚫어 보려고(run through) 들지 않았다. L은 반성적 추상을 통한 사고의 진전이 P에 비해 뒤떨어졌기 때문에 무한을 하나의 대상으로 지각할 수 없었고 그리하여 실무한으로의 이행을 완성할 수 없었다.

P는 초기에는 반성적 추상의 도구적 수준에서 해결활동을 시작했으나 점차 과제를 진전해 나가면서 L과는 달리, 자신의 아이디어를 가지고 활동해낼 수 있었으며 과제에서 실무한의 의미를 발달시

킬 수 있었다. P가 과제를 해결해나가면서 가무한에서 실무한 개념으로의 이행을 보여주었을 때 구조적 추상과 같은 고차적인 반성적 추상을 추론해낼 수 있었다. 이러한 증거들은 Cifarelli(1988), Petty(1996), Goodson-Espy(1998)의 결과와도 일치한다. P와 L의 활동 결과는 정적 무한 개념이 가무한 개념보다 선행되고 가무한 개념이 실무한 개념보다 선행된다는 Robert(1982), Sierpinska(1985), Petty(1996)의 주장을 확인시켜 준다.

P와 L의 사례를 통해 Petty(1996)의 무한과제를 푸는데 있어서 개념 수준의 이행이 있으며 이 이행과정에 반성적 추상이 그 구성적 역할을 해내고 있음을 확인해 냈다. 이러한 결과는 Cifarelli(1988)가 반성적 추상이 수학 문제해결 활동을 특징지우는 학습과정(learning process)이며 평가해낼 수 있다는 점을 재확인해 주었다. 무한과제를 풀어가는 능동적인 수학학습과정에서 개별 학습자의 개념적 지식의 재조직화에 반성적 추상이 개입되며 활동하는 개인에 따라 다른 수준을 보여 줄뿐만 아니라 개념적 지식의 수준이 높아지는 데에 보다 고차적인 반성적 추상 활동의 계열이 나타났다. 즉 Goodson-Espy(1995)가 지적한 대로 Cifarelli(1988)의 반성적 추상의 수준은 학습자의 문제해결 활동을 분류할 수 있는 하나의 지침으로 사용될 수 있을 것으로 보인다. 이는 Glasersfeld(1987)가 반성적 추상이 구조적인 지식의 발달에 기여한다고 밝힌 바에 의해서도 정당화될 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 논의

이 연구에서 반성적 추상이 문제 해결 과정에서 학습자의 무한 개념이해의 진전이 일어난다는 점을 관찰·추론해낼 수 있었다. 또한, 학생들이 개념 관련 문제를 해결해 나가는 동안 각기 다른 반성적 활동수준을 보인다는 것을 알아냄으로써 무한 개념이해 수준에서의 고차적인 이행이 이루질 수 있는가와 없는가에 대한 기초적인 설명을 제공하였다. 이 연구에서 제기한 연구문제에 대한 결론은 다음과 같다.

첫 번째 연구문제인 '개별 학습자의 무한 개념이해에서 반성적 추상은 어떠한 역할을 하는가?'에 대해서, 개별 학습자의 무한 개념이해에는 반성적 추상이 작용하며 자신의 활동이 계속 진행됨에 따라 보다 심화된 개념적 이해를 결과로 낸다. P와 L의 사례 비교에서 나타난 바에 따르면 모든 학습자들이 같은 과제를 다룬다고 해서 동일한 개념수준에 이르는 것이 아니지만 어느 개념 수준에 도달하든지 간에 반성적 추상 작용을 통해 유의미한 학습활동이 일어난다는 증거를 얻었다. 보다 수준 높은 무한개념의 이해가 일어나려면 학습자는 반성적 추상의 보다 높은 수준-표상 수준(post re-presentational levels of reflection)-을 넘어서야 함을 보여주고 있다. 학습자는 자신의 선행 해결 활동의 구조를 내적으로 반성하기 때문에 명백한 진전을 보여주었다. 이는 Cifarelli(1988), Goodson-Espy(1998)의 연구결과에서 드러난 바와 같은 맥락에 있다.

구조적 자각수준은 학습자가 표상 활동에서 스스로 거리를 둘 수 있는 것으로 보일 때, 그리고 유사한 구조를 가진 보다 많은 과제에 직면했을 때 일어났다. 이러한 진전은 반성적 추상의 수준과 개

개인들의 점차적인 개념발달을 보여 주고 있다. 무한을 개념화하는 활동은 해결활동의 잠재적인 결과가 아니라, 해결활동으로서 실제화된 실체이다. 예를 들면 과제 5에서 선분할의 무한한 분할을 볼 때, P는 자신의 잠재적 해결활동에 대해 반성하는 활동을 통해 점 개념을 사용할 능력을 보여주고 있다. P로서는 해결활동을 수행할 때 이러한 점 개념은 무한과정의 결과라는 것을 인식하게 되고 이러한 변화는 자신의 패러다임을 변경하거나 변화시킬 것을 필요로 하게 된다(Kuhn, 1970). 패러다임에서의 이러한 변화는 자신의 활동에 대해 스스로 조정하는 보다 고차적인 수준의 반성적 추상의 결과로 보인다.

따라서, 무한개념을 이해하려면 대상의 관찰 가능한 내용을 넘어서서 선행 활동의 구조를 머리 속으로 떠올리고, 그 활동을 다음 활동에 연관짓고 재조직하는 과정을 통해야만 한다. 그 결과로 무한대, 점, 선과 같은 추상화된 개념적 실체를 결과로 내놓을 수 있게 되는 것이다. 이 연구의 결과에서 Fishbein(1979), Gelman과 Evans(1981), Stern(1994)이 주장한 대로 무한개념은 외적 대상을 직접 관찰하거나 조작하는 것으로는 이해가 불가능하고 개개인의 활동의 내적 조정을 통해서만이 가능하다는 점을 찾아볼 수 있다. Staub와 Stern(1997)도 무한개념은 구체적인 세계에 대한 유추로는 이해할 수 없다고 한 바 있다. 그래서 반성적 추상은 무한개념 이해에서 더 분명하게 드러났다.

두 번째 연구문제인, '무한 개념이해 수준에서의 발달적 차이는 반성적 추상의 차이로 설명할 수 있는가?'에 있어서는 사례P와 L의 비교를 통해 무한 개념이해 수준에서의 발달적 차이는 반성적 추상의 수준 차이일 것으로 보는 것이 가능하다고 볼 수 있다. P와 L은 초기에 정적 무한 개념이해 수준에 있었다. 두 명 모두 과제를 통해 진전해 나갈 때 여러 해결방법을 공유하였다. 그러나 P는 정적 무한개념 이해수준에서 실무한 개념수준으로 이행했으며, L은 정적 무한개념 이해수준에서 실무한 개념 수준보다 낮은 가무한 개념이해 수준에 있었다. P와 L의 문제해결 활동은 반성적 추상 수준에서 차이가 드러났다. P는 과제1에서 16을 해 나가는데 각각 도구적 수준, 재인수준, 표상의 지각적 표현에 대한 반성, 구조적 추상 수준을 보여 주었으며 후반부인 과제 13부터 16에 와서는 계속해서 구조적 추상인 것으로 나타났다. 이 과정에서 P는 정적인 무한 개념에서 실무한 개념으로 진전해 있었으며 16개의 과제를 수행하면서 P는 7번의 구조적 추상 수준을 보여 주었다. 한편, L의 과제수행에서는 도구적 수준, 재인, 표상의 지각적 표현에 대한 반성이 주로 나타났으며 2번의 구조적 추상 수준을 보였다. L은 초기에 과제를 풀면서 나타나는 무한과정에 대해 반성하는 것 같지 않았으며 자신의 생각을 현실적 상황에 맞추어 버리는 경향이 있었다.

즉 P는 활동에 관해 생각해 감으로써 보다 높은 수준의 반성적 추상을 깨달을 수 있었기 때문에 초기에는 낮은 정적인 개념이해 수준이었지만 과제의 중반을 지나면서는 실무한의 개념이해 수준에 도달할 수 있었다. 이러한 이행에는 L보다 고차적인 반성적 추상이 작용하였으며 이는 P의 과제에 대한 활동으로부터 발달하였다. 이에 반해 L은 활동에 대한 반성보다는 현실적 제약에 더 초점 맞추는 경향이 있어서 반성적 추상이 더 고차적인 수준으로 넘어가지 못하였고 결과적으로 개념이해 수준도 정적 무한개념 이해에서 가무한 개념이해 단계로 이행하는데 그쳤다.

낮은 수준의 반성적 추상 수준에서 조작했던 학습자는 무한 개념의 이해 수준이 낮다는 점이 드러났다. 이 수준에서 조작하는 학습자는 과제가 끝날 때까지 무한과정을 조작할 수 있거나 혹은 수학적인 대상으로 다룰 수 있는 것으로는 전혀 사용하지 않았으며 무한과정을 대상으로 지각할 수 없으며 단지 무한과정을 인정하는데 멈추어 버렸다. 그리하여 실무한 개념수준으로의 이행을 방해받게 된다. 자신의 활동에 대한 반성의 수준이 높았던 학습자는 활동이 진행됨에 따라 무한과정을 단지 존재하는 것으로 보는데 그치지 않고 이 무한과정의 결과를 예측할 수 있으며 이를 하나의 대상으로 볼 수 있었다. 즉, 무한 개념이해 수준에서의 발달적 차이는 과제를 해결하는데 있어서 개입된 학습자의 반성적 추상의 차이로 설명할 수 있다고 결론 내릴 수 있다.

즉, 이 연구에서 개념이해에 나타나는 내적인 정신적 과정을 규명해 보았다는데 큰 의의가 있다. 불행하게도 수학교육 연구들에는 학습자가 문제를 해결하거나 과제에 직면하였을 때 학습하는 것의 본질에 대해 다룬 연구는 드물었다. 이 연구의 결과는 지식의 구성과 관련해서 일어나는 학습의 과정을 기술해 주고 있다. 이 연구의 결과를 수학교육과 개념발달 분야에 적용해 볼 때, 한 층 더 나아간 학습이 이루어지려면 학습자가 활동을 하고 그 활동에 대해 반성하도록 하며, 자신의 개념적 지식을 재조직할 기회를 제공하는 것이다. 이러한 유형의 방법은 시간이 많이 드는 반면에, 학생들 자신의 학습과 그 이상을 넘어서도록 돕는데 유용한 수학적 개념의 이해를 발달시키도록 돕는다 (Goodson-Espy, 1998). 학습자들에게 수학적 개념 학습은 완벽한 이해라기보다는 그들의 발달 수준이나 체계에서 이해할 수 있는 논리적 지식으로 개념을 재구성하는 것으로 보아야 할 것이다. 이러한 측면은 개념 학습에서 모든 활동은 학습자 주도적으로 진행되어야 함을 시사하고 있다. 교육목표에서 설정한 특정 개념을 주입식으로 학습하도록 할 때 그 개념에 대한 이해는 실제적으로 어렵다는 것을 염두해 두어야 한다. 특히, 상위 개념일수록 더욱 그러하고, 이러한 개념이 완전히 이해되기까지는 많은 시간이 필요하다. 우리가 항상 고려해야할 사실은 지식 구성이 눈으로 볼 수 없는 내생적(endogeneous)인 과정이라는 것이다. 특히 수학적 지식은 언어를 통해 전달될 수 없으며 개인의 경험을 통한 추상의 과정에 의해 구성되는 것이다. 개인은 특정한 자신의 경험세계에 잘 대처하고 적응하기 위한 지식을 구성한다. 지식은 인간이 구성한 것이며 그것이 인간이 알 수 있는 전부이다. 수학적 지식의 확실성은 수학적 지식의 적합성, 적응성으로 대치되어야 한다(강인애 외, 1999).

사례 P와 L이 과제를 해결할 때 보여주는 활동에서 반성적 추상의 과정을 다시 재고해 보면 첫째, 자신이 행하고 있는 것이 무엇인가에 대한 인식이 있어야 한다는 점이다. 둘째는 자신의 행위에 대한 반성이다. 셋째는 연속된 과제수행에서 자신의 행위에 대한 반성을 다시 반성하는 것이다. 행하고 있는 것이 무엇인가에 대한 인식을 하는 것은 인위적으로 일어나는 것이 아니며 우리의 지적인 활동 속에서 드러나는 것이다. 또한 반성적 추상의 의미를 보다 이해하기 위해서는 행위 혹은 활동에의 반성(reflection in action)에 대해 생각해 보는 것이 필요하다. 이 연구의 결과에서 나타난 행위에서의 반성은 경험을 통한 바로 그 상황에의 적용과 관련되어 있다. 이 연구를 통해 현행과제에서의 성공과 실패의 방향은 선행 활동과 그에 대해 재방문하는 데 의존적이라는 점을 알아냈다. 이는 행위

에 대한 반성을 의미한다. 이러한 반성은 여기에서 멈추지 않고 행위에의 반성과 행위에의 반성에 대한 반성으로 계속된다. 이 반성의 과정은 Piaget가 말하는 반사와 재조직으로 이루어지는 것이다.

그렇다면 어떻게 반성해 보도록 할 수 있는가? 우선은 어떤 형태로든 자신의 행위를 반성해 볼 기회를 제공해야 한다. 이 반성의 과정에서는 관찰가능한 혹은 '주어진 정보를 넘어서는' 사고가 필요하다. 또한 내생적인 지식의 위계화가 이루어질 수 있어야 할 것이다. 내생적인 지식의 위계화란 Staub 등(1997)의 개념적 재구조화, Ohlsson 등(1997)의 추상의 어셈블리, Bickhard(1991)의 지식의 위계적 발달과 같은 의미로 추상의 반성을 통해 새로운 추상의 창출이 일어나도록 고무되어야 한다. 또한 반성적 추상이 일어나기 위해서는 반복순환적 경험(recursive experience)이 필수적이다. 예를 들어, 무한소를 지각하는 사람은 특정한 유목을 '반복순환적'으로 인식해야 한다. 이전 유목의 반복으로서 2차 혹은 그 이상의 유목을 재인하는 반성만이 두 개 이상의 동일한 종류의 단위들이 복수로 존재하고 있음을 학습자가 깨달을 수 있게 만든다(윤정륜 · 전명남, 2000).

그렇다면 어떻게 반성해 보도록 할 수 있는가? 우선은 어떤 형태로든 자신의 행위를 반성해 볼 기회를 제공해야 한다. 이 반성의 과정에서는 관찰가능한 혹은 '주어진 정보를 넘어서는' 사고가 필요하다. 또한 내생적인 지식의 위계화가 이루어질 수 있어야 할 것이다. 내생적인 지식의 위계화란 Staub 등(1997)의 개념적 재구조화, Ohlsson 등(1997)의 추상의 어셈블리, Bickhard(1991)의 지식의 위계적 발달과 같은 의미로 추상의 반성을 통해 새로운 추상의 창출이 일어나도록 고무되어야 한다. 또한 반성적 추상이 일어나기 위해서는 반복순환적 경험(recursive experience)이 필수적이다. 예를 들어, 물리학의 파동을 지각하는 사람은 특정한 유목을 '반복순환적'으로 인식해야 한다. 이전 유목의 반복으로서 2차 혹은 그 이상의 유목을 재인하는 반성만이 두 개 이상의 동일한 종류의 단위들이 복수로 존재하고 있음을 학습자가 깨달을 수 있게 만든다(윤정륜 · 전명남, 2000).

이러한 연구성과에도 불구하고 몇 가지 제한점이 있다. 연구결과 면에서 P와 L의 사례에서는 반성적 추상의 수준 가운데 도구적 수준, 재인수준, 표상의 지각적 표현에 대한 반성수준, 표상에 대한 반성 수준, 구조적 추상수준의 다섯 가지 유형만을 발견했고 구조적 자각 수준은 찾아 볼 수 없었다는 한계가 있다. 연구방법 면에서 문제해결에 관여하는 동안 피험자들이 쓴 증거(written evidence)에만 의존했다는 점이다. 이러한 접근은 문제해결자가 해결과정 동안 생각이 나는 모든 것을 언어화하고 쓰도록 요청하는 방법인데, 이러한 중재는 문제해결 행위를 변경시킬 가능성이 있어서 이러한 방식으로 수집된 자료가 타당하지 않을 가능성이 있다는 점 또한 배제시킬 수 없다. 이 외에도, Goodson-Espy(1998)는 반성적 추상은 문제에 대해 피험자가 활동하는 동안의 보다 짧은 '타임플레임(timeframe)'에서 일어난다는 것을 지적한 바 있다. 이에 반해 개념이해는 점차적 유형으로 오랜 시간에 걸쳐 지속되면서 일어난다는 점에서 연구 수행 동안에 개념발달을 관찰해 내기가 어렵다는 점이다.

또한 사례P와 L의 활동에서 나타나는 반성적 추상은 연구자가 추론해 냈을 뿐이므로 이를 촉진할 수 있는 방법에 대한 탐색이 요구된다. 이에는 두 가지 방법이 있다. 반성적 추상 자체에 대한 집중

적인 심화 연구와 또 다른 하나는 지금까지 밝혀진 반성적 추상을 가지고 이와 관련된 변인들을 밝혀 이들 간의 관계를 탐색해 보면 반성적 추상을 개발해 낼 수 있는 다른 길이 열릴 수 있을 것이다. 정적 무한 개념수준에서 실무한 개념으로 이행에 반성적 추상이 일어난다는 이 연구의 결과만으로는 무엇을 어떻게 해야만 반성적 추상이 잘 일어나겠는가에 대한 대답을 얻기는 어렵다.

오늘날 교수-학습 영역의 구성주의 연구는 인지발달에 대한 Piaget의 아이디어, 특히 개념화 능력이 정보의 단순한 흡수가 아니라 지적인 구성 활동을 통해서 성장한다는 주장에 강력한 영향을 받고 있다. Fosnot(1996)도 반성적 추상이 학습의 원동력이라고 주장하고 있다. 그러나 반성적 추상에 대한 보다 심층적 탐색은 그 과정이 내생적이라는 이유 때문에 너무나 미약한 상태로 머물러 있다. 이제 단순한 암기나 전문가에 의한 설명만으로는 학습이 이루어지지 않는다는데 교육학자들과 심리학자들의 의견이 일치되고 있다. 즉 인간이 의미의 구성자로서, 다양한 경험을 표상적인 방식으로 조직, 일반화하고자 하는 방식에 대한 보다 깊이 있는 탐색이 절실히 요구된다. 이밖에도, 무한개념의 이해에는 반성적 추상의 심적 작용도 있지만, 상상이나 창의성 혹은 직관 등의 심적 개입의 가능성이 있을 것이라는 점을 고려해 볼 수 있다. 무한개념의 이해에 작용하는 심리적 변인들의 영향력을 이론적 및 실증적으로 탐색하는 후속연구가 이어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

강인애 외, (1999). 왜 구성주의인가? - 정보화 시대와 학습자 중심의 교육환경. 서울: 문음사.

류희찬·조완영 (1994). 수학교육의 수업 원리로서의 반영적 추상화. 대한수학교육학회 논문집. **4(1)**. pp.237-253.

윤정륜·전명남 (2000). Piaget의 반성적 추상에 기초한 구성주의 학습의 원리 탐색. 경북대학교 사범대학부속 중등교육연구소. 중등교육연구, **46(2)** pp.45-58.

전명남 (2001). 아동 발달연구에 있어서 미시발생적 방법의 실과 허, 아동학회지, **22,(1)**, pp.97-107.

Barron, F. (1969). *Creative person and creative process*. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Baumgartner, E., Baumgartner, W., Borstner, B., Potrž, M., Shawe-Taylor, J. & Valentine, E. (Ed.). (1996). *Handbook: Phenomenology and Cognitive Science*. Dettelbach: Röll.

Bickhard, M.H. (1991) A Pre-Logical Model of Rationality. In Steffe, L. P. (Eds.). *Epistemological foundations of mathematical experience*. New York: Springer-Verlag.

Blackwell, A.M. (1940). A comparative investigation into the factors involved in mathematical ability in boys and girls. *British Journal of Eductional Psycholgy* **10**.

Boulet, G. (1993). *The constuction of the unit fraction concept*. Universitè de Montréal.

Cifarelli, V. (1988). *The role of abstraction as a learning process in mathematical problem solving*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Cobb, P. (1986). Clinical interviewing in the context of research programs. In G. Lappan & R. Even(Eds.), Proceedings of the eight annual meeting of PME-NA: Plenary speeches and symposium pp.20-26, East Lansing: Michigan State University.

Cornu, B. (1981). *Apprentissage de la notion de limite: Modeles spontanes at modeles propres,* Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp.322-326.

Davis, P.J., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience.* Boston, Massachusetts: Birkhauser Publishing Co.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In Steffe, L.P. (Ed.) *Epistemological foundations of mathematical experience.* New York: Springer-Verlag. pp.160-202.

Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior.* **5**, pp.55-92.

Fishbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in mathematics.* **10**. pp.3-40.

Fosnot, C. (1996). *Constructivism: Theory, perspectives, and practice.* New York: Columbia University.

Gelman, R., & Evans, R. (1981, April). *Understanding infinity: A beginning inquiry.* Paper presented at the Society for Research in Child Development, Boston, MA.

Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any theory of representation In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* New Jersey: Lawrence Erlbaum. pp.215-225

Glaserfeld, E. (1991a). Abstraction, re-presentation, and reflection: An Interpretation of experience and Piaget's approach. In Steffe, L. P. *Epistemological Foundations of Mathematical Experience.* New York: Springer-Velag.

Glaserfeld, E. (1991b). Knowing without metaphysics: Aspects of the radical constructivist position. In F. Steier (Ed.), *Research and reflexivity.* **2**. London: Sage.

Glaserfeld, E. (1995). sensory experience, abstraction and teaching. In. Steffe, L.P. & Gale, J. (Eds.). *Constructivism in Education.* Lawrence Erlbaum.

Goetz, J. & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research.* New York: Academic Press.

Goodson-Espy, T.J. (1995). *A constructivist explanation of the transition from arithmetic to algebra: The role of reflective abstraction.* (ERIC Documnets. 394796).

Goodson-Espy, T.J. (1998). The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: transitions from arithmetic to algebra. *Educational studies in mathematics*. **36,(3)**, p.219.

Glaserfeld, E. (1983). Learning as constructive activity. In J.C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.). *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp.41-68, PME-NA: Montreal, Canada.

Hamel, J.; Dufour, S. & Fortin, D. (1993). *Case study methods.* Qualitative Research Methods. **32.** London: SAGE publications.

Kami, C. & DeVries, R. (Eds.) (1988). *Number in preschool and kindergarten.* (김판희 · 김영선 역 (1997). 유아 수 교육론. 서울: 양서원).

Keppers, G.L. (1955). Is algebra a "tool subject"? *School Science and Mathematics*. **55.**

Kline, J. (1972). *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Cambridge, MA: M. I. T. Press.

Kommerell, V. (1928). Über mathematische Begabung. Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle. *Pädagogik*, **28**.

Krutetskii, V.A. (1976), *The psychology of mathematical abilities in school children* (J. Teller, Trans., J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1968).

Kuhn, T.S. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago, Illinois: University of Chicago Press.

Miller, P.H. & Coyle, T.R. (1999). Developmental change: Lessons from microgenesis. In Scholnick, E. K., Nelson, K., Gelman, S.A. & Miller, P.H. (Eds.) *Conceptual development: Piaget's legacy.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Ohlsson, S. & Lehtinen, E. (1997a). Introduction. *International Journal of Educational Research.* **27**, pp.3-4.

Ohlsson, S., & Lehtinen, E. (1997b). Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research.* **27,** pp.37-47.

Petty, J.A. (1996). *The role of reflective abstraction in the conceptualization of infinity and infinite processes*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Piaget, J.(1968/1970). *Structuralism.* New York: Basic Books.

Piaget, J. (1977). *Recécherches sur l'abstraction réfléchissante. l'ère partie: L'abstraction des relations logico arithmétiques. 2e partie: L'abstraction de l'ordre et des relations spatiales* [Research on reflective absraction. 1: The abstraction of logical-mathematical relationships. 2.: The abstraction of order and spartial relationships]. Parks: P.U.F.

Piaget, J. (1950a). *Introduction á l'épistémologie génétique; I. La pensée mathématique* [Introduction to genetic epistemology: 1. Mathematical thought]. Paris: P. U. F.(2e éd. 1973), p.75

Piaget, J. (1950b). *Introduction á l'épistémologie génétique; I. La pensée physique* [Physical thought]. Paris: P.U.F.

Piaget, J. (1950c). *Introduction á l'épistémologie génétique; I. La pensée biologique, la pensée psycholoque et la pensée sociologique* [Biological, psychological and sociological thought] Paris: P.U.F.

Piaget, J. (1975/1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development.* Chicago: University of Chicago Press.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, **3**, pp.307-341.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* **26**, pp.191-228.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* **22**, pp.1-36.

Sfard, R.F. (1989). Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. *Proceedings of PME 13*, Paris 3. pp.151-158.

Siegler, R.; & Crowley, K. (1991). The microgenetic method: A direct means for studying cognitive development. *American Psychologist* **46(6)**, pp.606-620.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemoolgiques relatifx a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, **6**, pp.5-67.

Silver, E.A. (1979). Student perception of relatedness among mathematical verbal problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, **10**, pp.195-210.

Silver, E.A. (1981). Recall of mathematical problem information: solving related problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, **12**, pp.54-64.

Staub, F.C. & Stern, E. (1997). Abstract reasoning with mathematical constructs. *International Journal of Educational Research*. **27(1)**, pp.63-75.

Stern (1994). *The Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter* [The development of mathematical reasoning in childhood] Post-doctoral thesis. University of Munich.

<부록> 무한 문제해결 과제(Problem of Infinity or Infinite process: P1)

제 1 과

삼각형의 종이를 가지고 다음 지시를 따르시오.

1. 삼각형을 반으로 접으시오. 필요하다면, 접히는 부분에 선을 그어도 좋습니다.
2. 두 번째도 반으로 접고, 세 번째도 다시 반으로 접습니다.
3. 할 수 있는 대로 가능한 많이 삼각형을 반으로 접는 것을 계속 하세요.

※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 이러한 방법으로 삼각형을 계속 만들어 갈 수 있습니까?
2. 어떠한 일이 일어납니까?
3. 삼각형을 계속 접을 수 있다고 가정한다면, 어떠한 일이 생길까요?
4. 접는 과정을 무한히 계속할 수 있습니까? 어떠한 일이 일어납니까?

제 2 과

사각형 모양의 종이를 가지고 다음 지시를 따르시오.

1. 직선자를 이용하거나 접어서 사각형의 중심을 정하시오.
2. 네 모서리 모두가 중심에 오도록 접으시오.
3. 가능한 한 많이 접으시오.

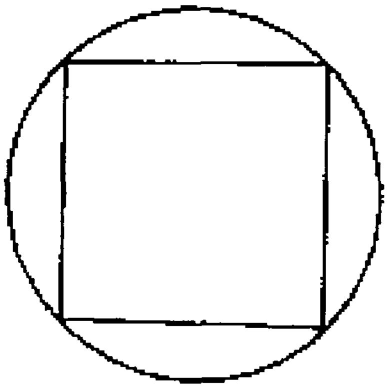
※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 이러한 방법으로 사각형을 계속 만들어 갈 수 있습니까?
2. 어떠한 일이 일어납니까? 당신은 어떠한 일을 볼 수 있습니까?
3. 사각형을 계속 접을 수 있다고 가정한다면 어떠한 일이 일어납니까?
4. 이 과정을 무한히 반복할 수 있습니까?

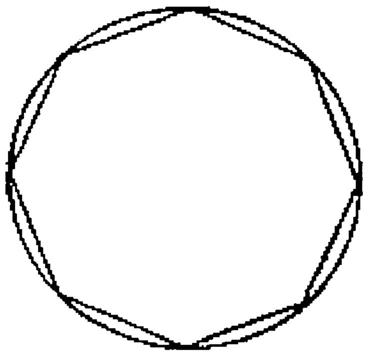
제 3 과

다음을 읽어 보시오.

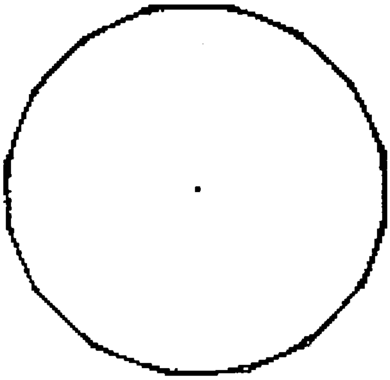
1. 사각형의 각 모서리가 원안의 둘레에 접하도록 원안에 정 4각형을 그려보면 다음과 같다



2. 과정 1. 처럼 원안에 정 8 각형을 그려 보면 다음과 같다.



3. 과정 1. 처럼 원안에 정 16 각형을 그려 보면 다음과 같다.



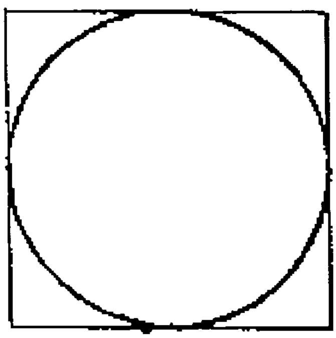
※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 이러한 방법으로 도형을 계속 만들어 갈 수 있습니까?
2. 어떠한 일이 일어납니까? 당신은 어떠한 변화을 볼 수 있습니까?
3. 변의 수가 증가할 때 어떠한 일이 일어납니까?
4. 이러한 과정을 무한히 반복할 수 있습니까? 어떠한 일이 일어납니까?

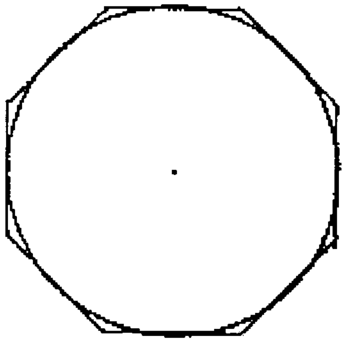
제 4 과

다음을 읽어 보시오.

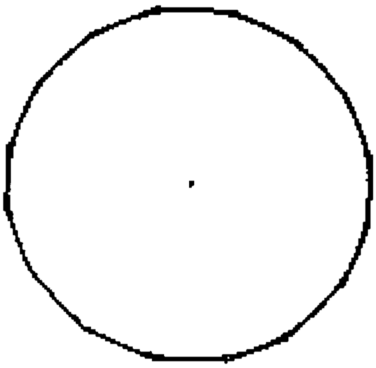
1. 원 밖에 네 변이 모두 원둘레에 접하는 정4각형을 그려 보면 다음과 같다.



2. 과정 1. 처럼 원둘레에 접하도록 정8각형을 그려 보면 다음과 같다.



3. 과정 1. 처럼 원둘레에 접하도록 정16각형을 그려 보면 다음과 같다.



※ 자 이제 질문에 답하시오

1. 이러한 방법으로 도형을 계속 만들어 갈 수 있습니까?
2. 어떠한 일이 일어납니까? 당신은 어떤 변화를 볼 수 있습니까?
3. 변의 수가 증가할 때, 어떠한 일이 일어납니까?
4. 이러한 과정을 무한히 반복할 수 있습니까? 어떠한 일이 일어납니까?

제 5 과

직선자와 종이를 가지고 다음 지시를 따르시오.

1. 10cm의 선분AB를 그리시오.

2. 이제 AB선을 이등분하고, 이등분점을 P1 이라 하시오.
3. 또, AP1선을 이등분하고, 그 이등분점을 P2 라 하시오.
4. 위와 같은 방식으로 계속하여 이등분 선을 만드시오.

※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 나뉘어진 부분의 길이가 매우 작아도 계속 나눌 수 있겠는가?
2. 어떠한 일이 일어납니까?
3. 이렇게 이등분하는 과정을 반복할 때, 무슨 일이 일어납니까?
4. 이러한 과정을 무한히 반복한다면 어떠한 일이 일어날까요?

제 6 과

이제 다음의 상황을 생각해보시오.
당신은 벽과 정면으로 10미터 거리에 서 있습니다.
이제 당신은 벽과 당신과의 거리가 반이 되도록 걸어갈 것입니다.
처음에는 5미터 다음에는 2.5미터 … 계속해서 걸어 갈 것입니다.

※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 벽을 향해 계속 걸어갈 수 있습니까?
2. 어떠한 일이 일어납니까?
3. 이러한 과정을 무한히 반복할 수 있다면 어떠한 일이 일어날까요?
4. 이러한 과정이 무한히 계속 된다면 어떠한 일이 일어납니까?
5. 당신은 언젠가 벽에 도달할 수 있을까요?

제 7 과

당신이 누군가와 달리기를 하려고 합니다.
당신은 상대방보다 2배나 빨리 달릴 수 있기 때문에
출발선에서 상대방을 당신보다 20미터 앞에서 출발하게 했습니다.
매 초마다 당신과 상대방 사이 거리의 반을 달릴 수 있다고 가정합시다.

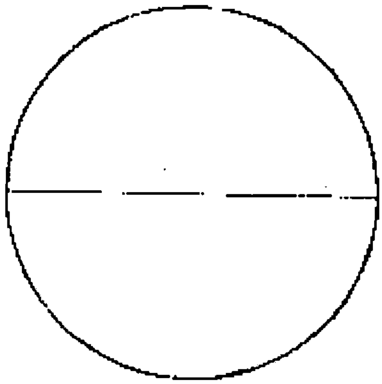
※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 이 과정을 계속한다면, 무슨 일이 일어나겠습니까?
2. 당신이 경주에서 이겼을 까요? 누가 이겼을 까요?
3. 결국에는 상대방을 따라 잡았을까요? 당신이 상대방을 앞질렀을까요?
4. 이 과정을 무한히 계속 할 수 있습니까? 어떤 일이 일어나고 있습니까?

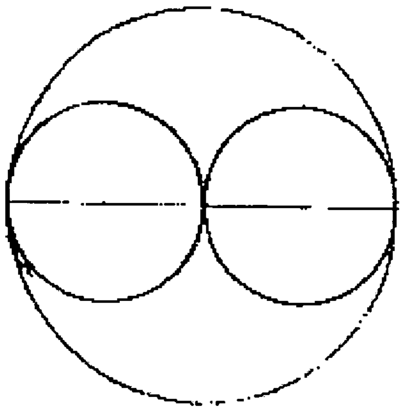
5. 이 과정을 무한히 계속한다면 어떻게 될까요?

제 8 과

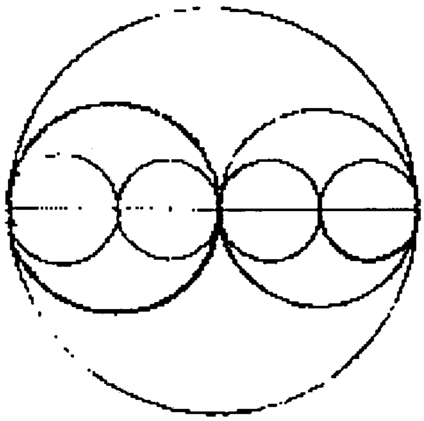
다음을 보시오.
만약 직경이 5cm인 원이 있다고 가정합시다.



다음 그 원을 직경이 2.5cm인 원으로 분할합니다.



그 원 안에서 계속해서 1.25㎝ … 인 원을 계속 만듭니다.



※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 어떤 일이 일어나지요? 무슨 일이 일어나는지 보입니까?
2. 이 분할 과정을 계속 할 수 있습니까?
3. 이런 과정을 계속함에 따라 어떤 일이 일어납니까?
4. 이런 분할 과정으로부터 얻어지는 기하학적인 도형은 무엇입니까?

제 9 과

다음과 같이 연속되는 수들에 대해 생각해 보시오.

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ……
2. $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16} \cdots$
3. 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, ……
4. 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ……
5. $0.\dot{9} = 0.999\cdots\cdots = 1$

※ 자 이제 질문에 답하시오.

1. 위의 연속되는 수들에 대해, 각각 어떤 상황이 일어나고 있는지 설명하시오.
2. 각각의 연속되는 수들은 무한히 계속 이어질 수 있습니까?

3. 각각의 연속되는 수들 다음에 이어질 두 항을 결정할 수 있습니까?
4. 각 연속되는 수들은 증가합니까? 감소합니까?
5. 위의 5번에 나타난 대로 $0.\dot{9}$ = 0.999…… = 1에 동의합니까?
6. 위의 5번($0.\dot{9}$ = 0.999…… = 1) 의 내용이 4번(0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ……)과 일치합니까?

제 10 과

1. 다음의 연속되는 수들을 생각해 보시오.

   $1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ \cdots$

   이 수열의 값을 그래프로 나타내십시오(수직선에 표시하세요).
   이 수열에서 어떤 일이 벌어지고 있습니까?
2. 다음의 연속되는 수들을 생각해 보시오.

   $100,\ 50,\ 25,\ \frac{25}{2},\ \frac{25}{4,}\ \frac{25}{8},\ \frac{25}{16}\ \cdots$

   이 수열을 수직선에 나타내시오.
   이 수열에서 어떤 일이 벌어지고 있습니까?
3. 다음의 연속되는 수들을 생각해 보시오.

   4, 3.5, 3.25, 3.125, 3.0625, …

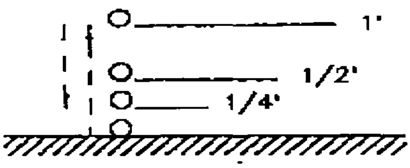
   이 수열을 각 항을 수직선에 나타내시오
   이 수열에서 어떤 일이 벌어지고 있습니까?
4. 다음의 수열을 생각해 보시오.

   A. 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, …
   B 1, -1, 1, -1, 1, -1, …
   C. 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, …
   D. $0,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

각각의 수열에서 어떤 일이 벌어지고 있습니까?

제 11 과

콘크리트 지면의 30cm의 높이에서 고무공이 떨어지는 상황을 생각해 보십시오

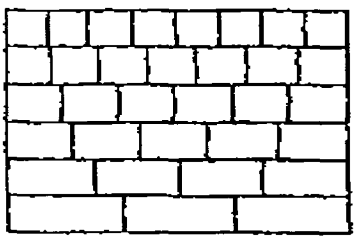


매번 공이 떨어진 높이의 반만큼 튀어 오른다고 가정해 보십시오. 공의 작용이 공이 도달한 높이의 연속적인 결과를 나타냅니다. 공의 작용을 위의 그림과 같이 나타냅니다.

1. 여러분은 무엇을 보고 있습니까? 어떤 일이 일어나지요?
2. 여러분이 확인할 수 있는 연속되는 수들이 있습니까?
3. 이 결과에서 어떤 일이 일어나고 있습니까?

제 12 과

다음 그림을 보고 다음 질문에 답하시오

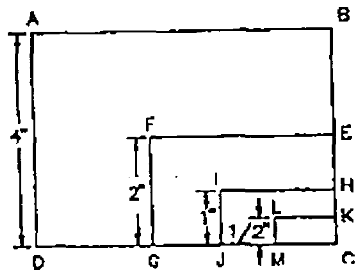


1. 당신은 무엇을 보고 있습니까? 어떤 일이 일어나지요?
2. 일어나는 상황에서 당신은 확신할 수 있는 연속된 수들이 있습니까?

3. 이 그림에서 어떤 일이 일어나고 있습니까?
4. 그림과 같은 과정을 계속 진행할 수 있습니까?

제 13 과

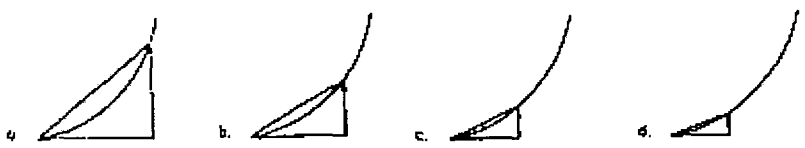
다음 그림을 보고 다음 질문에 답하시오.



1. 당신은 무엇을 보고 있습니까? 어떤 일이 일어나지요?
2. 일어나는 상황에서 당신은 확신할 수 있는 연속되는 수들이 있습니까?
3. 이 그림에서 어떤 일이 일어나고 있습니까?
4. 그림과 같은 과정을 계속 진행할 수 있습니까?

제 14 과

다음 그림을 보고 질문에 답하시오.



1. 당신은 무엇을 보고 있습니까? 어떤 일이 일어나지요?
2. 삼각형이 작아짐에 따라 어떤 상황이 전개될까요?
3. 삼각형이 작아짐에 따라 화살표는 어떻게 되나요?
4. 화살표가 일치될까요?
5. 어떤 상황에서 화살표가 일치할까요?

6. 이런 과정을 무한히 계속 할 수 있을까요?

제 15 과

다음 그림을 보고 질문에 답하시오.

1. 무엇이 보입니까? 어떤 일이 일어나지요?
2. 만약 계단의 수를 계속 증가시킨다면 어떤 일이 일어날까요?
3. 만약 계단의 수를 무한히 증가시킨다면 빗금친 부분의 넓이는 어떻게 될까요?
4. 무한히 계단의 수를 증가시킨다면 사선의 길이에 비례하여 계단의 길이는 어떻게 될까요?

제 16 과

여기 무한히 연속되는 수들이 있다.

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \cdots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \cdots$$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \cdots$$

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12}, \frac{8}{14} \cdots$$

※ 다음 물음에 답하시오.

1. 무엇이 일어나고 있습니까? 어떤 일이 벌어지고 있나요?
2. 위의 연속된 수들 중 어느 것이 마지막 값에 도달합니까?