

CBL 기반의 활동 중심의 실험학습이 함수 학습에 미치는 효과¹⁾

권 오 남 (이화여자대학교)

본 연구에서는 우리 나라의 학교 수학에서 실제적으로 CBL, CBR과 같은 실시간 테크놀로지와 MathWorld와 같은 소프트웨어를 활용한 활동 중심의 실험 학습의 가능성을 탐색하고, 이를 통하여 수학 학습의 기초가 되는 함수적 개념의 이해와 그 표상과의 연관성, 그리고 기존의 형성되어 있던 함수에 대한 오개념에 어떠한 영향을 미치는 지를 분석하고자 하였다.

I. 서 론

수학은 현대 학문의 거의 모든 분야에서 이용되고 있으며 각 분야의 연구 방법조차도 수학적이고 논리적이다. 건축물, 무기, 우주 장비, 컴퓨터 등 인간이 만들어낸 창조물뿐만 아니라 자연 현상의 혼돈 상태를 이해하려는 카오스 이론, 구체적인 자연현상에 근거를 두고 이론을 전개해 나가는 물리학이나 공학 등 수학을 이용한 예는 무궁무진하다. 따라서, 학교 수학에서도 학생들이 어떤 현실 상황의 규칙성을 발견하고 복잡한 함수의 관계성을 분석하며 실제적인 문맥과 추상적인 문맥 모두에서 변화로서의 수학을 이해할 수 있도록 지도되어야 한다.

그러나, 이러한 실생활에서 비롯된 자료들은 복잡하고 다양하기 때문에 기존의 지필 방식만으로는 실생활과 관련된 문제들을 수학화하여 해결하기 어렵다. 따라서, NCTM(2000)은 적절한 교육환경으로 테크놀로지를 활용한 탐구 학습을 제시하고 있다. 테크놀로지를 활용하는 탐구 학습에서는 학생들이 역동적 경험을 체험할 수 있으며 이를 통해 스스로 가설을 세우고 검증하며 이를 기반으로 또 다른 개념의 가설을 세울 수 있다. 또한 테크놀로지에서 얻은 그래프 등의 표상으로 가설을 정교화, 추상화할 수 있으며 학생들이 직관적 사고에서 조직적 사고로의 전이가 가능하게 한다(신은주·송정화·권오남, 2000). 따라서, 테크놀로지를 통해 정보를 모으고 데이터를 분석하는 활동은 실세계에서 쓰이는 복잡한 수치와 다양한 기호 조작을 가능하게 하여 형식 수학과 실세계 사이의 연결성을 발견하는데 효과적이다(Schoenfeld,

1) 이 논문은 2000년도 Texas Instruments 의 지원에 의하여 연구되었음. 프로그램 개발과 수업 적용실험에 도와준 연구보조원 신희중학교 김래영교사, 상도중학교 최선준 교사, 강신중학교 정호선교사에게 감사를 표한다.

1988).

테크놀로지 중 자료를 수집하고 분석하며 이러한 과정을 손쉽게 다룰 수 있는 도구로 Microcomputer-Based Laboratory(MBL), Calculator-Based Laboratory(CBL), Calculator-Based Ranger(CBR) 등의 실시간 테크놀로지를 생각할 수 있다. 이는 다양한 프로브(probe)와 컴퓨터 또는 그래픽 계산기 등을 이용하여 실생활의 상황과 그래프를 연결시켜주는 수학의 내적·외적 연결성을 향상시켜주며 학교 수학과 실세계 수학과와의 장벽을 없애주는데 효과적이다(Lapp & Cyrus, 2000).

따라서, 본 연구에서는 우리 나라의 학교 수학에서 실제적으로 CBL, CBR과 같은 실시간 테크놀로지와 MathWorld와 같은 소프트웨어를 활용한 활동 중심의 실험 학습의 가능성을 탐색하고, 이를 통하여 수학 학습의 기초가 되는 함수적 개념의 이해와 그 표상과의 연관성, 그리고 기존의 형성되어 있던 함수에 대한 오개념에 어떠한 영향을 미치는 지를 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

(1) 함수적 개념과 지도상의 문제점

함수적 사고는 대수와 기하를 관련지어 주며 수학적 사고 전체의 바탕에 놓여 있는 기본적인 핵심적 관점이다. 그러나, 함수 개념이 다양한 기원과 특성을 갖는 여러 가지 측면을 내포해야 함에도 불구하고 학교 수학에서 제시되는 함수 개념의 정의는 그렇지 못하며 함수 학습 또한 학습자의 경험에서부터 형성된 개념이 아닌 추상화된 결과로서 제시되고 있어 실제적인 다양한 현상에 적절히 적용되지 못하고 있다(우정호, 1998). 함수의 기본이 되는 변수 개념에 있어서도 학생들은 방정식의 풀이를 형식적 조작을 통해 해결했다 하더라도 그 뜻을 이해하지 못하거나 오개념을 갖는 경우가 종종 나타난다(Küchemann, 1981). 이는 변수의 다양한 역할을 이해하지 못한 채 실질적 경험 없이 반복적인 기계적 기호 조작을 하게 됨으로써 이에 대한 개념적 지식이 성립되지 못하였음을 의미한다.

따라서, 학교 수학에서의 함수 교육은 학생들이 실생활의 자료들을 토대로 변하는 대상에 대한 풍부한 경험을 하게 함으로써 변수개념의 '발생상태'로 돌아가서 그 개념 발생의 맥락과 연결되어 있는 관계를 이해하게 되고 이를 바탕으로 변수를 의미 있게 사용할 수 있는 기회를 얻도록 변화되어야 한다(김남희, 1997).

또한 학생들이 주변의 다양하고 복잡한 환경에서 얻어진 자료들을 수학적 표상으로 나타낼 수 있어야 한다. 특히 수학적 표상 중 시각적 효과가 큰 그래프는 다양한 학문에서 수학적 적용을 활발하게 하며 얻어낸 다양한 정보를 이용하여 필요한 자료를 추론하고 연역할 수 있도록 해 준다. 또 이것은 현실 상

황의 규칙성을 발견하고 분석하는데 효과적이며 함수적 관계성을 분석하고 해석하는데 강력한 도구로 제시되고 있다(Norman, 1993; Romberg et al, 1993).

그러나, 현재의 지필식 학습은 학생들이 그래프 전체의 개형을 이해하기보다는 복잡한 계산이나 대수식의 기계적인 풀이만을 학습하도록 구성되어 있으며 실생활에서 얻을 수 있는 다양한 자료와는 동떨어진 제한된 정형화된 함수만을 학습하도록 하고 있다. 이로 인해 학생들은 비형식적인 경험을 추상적인 수학으로 연결·확장시키는데 많은 어려움을 가지게 된다. 예를 들면 학교 수학에서 시간에 대한 속도, 거리 등 연속적으로 변하는 자료들을 다루기 어렵기 때문에 주로 불연속적인 실생활 자료들로부터 수학적 개념을 학습하게 됨으로써 학생들은 연속적인 변수를 불연속적인 변수로 취급하여 자료의 본질을 오인하게 되기도 한다(김남희, 1997). 또한, 학생들은 이러한 지필식 학습 과정을 통해 두 변수 사이의 관계를 표현한 그래프를 하나의 대상으로 인식하여 '그림으로서 그래프'를 보거나 거리-속도 그래프에서 그래프를 모양으로 그대로 인식하는 '모양으로서 그래프'를 보는 오개념을 갖게 되기도 하며 동일한 상황에 대한 거리-시간의 그래프를 속도-시간의 그래프와 동일한 것으로 인식하는 '기울기와 높이'에 대한 오개념을 가져오기도 한다(Lapp & Cyrus, 2000).

학교 수학에서 함수 학습에서 발생하는 이러한 문제점들을 극복하기 위한 새로운 대안으로서 학생들이 직접 경험하며 시행착오를 통해 수학적 개념을 확립해 나갈 수 있도록 구성된 활동 중심의 실험 학습이 제시되고 있다. 실험 활동을 통한 학습 과정 속에서 학생들은 학습에 적극적으로 참여하고 수학적 아이디어를 가진 자신의 경험 영역을 확장시키며 수학적 아이디어에 대한 개념적 이해와 직관을 개발할 수 있다(신은주·송정화·권오남, 2000). 또한 학생들에게 다양한 역동적 상황을 탐구하는 경험을 가능하게 하며 수학을 스스로 발명·발견하게 하고, 수학적으로 사고하여 도전적인 문제를 해결하도록 학습자의 능력을 증폭시켜 줄 수 있다(Pomerantz, 1997).

(2) CBL의 활용

학생들이 직접 실제 자료를 얻어내어 경험을 통하여 학습하는 활동 중심의 실험 학습을 가능하게 하는 강력한 도구로 테크놀로지를 들 수 있다. 테크놀로지는 지필 방식의 계산 위주 학습법의 한계를 극복하여 수학 내적 영역과 외적 영역을 연결시켜주는데 효과적인 역할을 할 수 있으며, 경험적으로 자신의 가설을 실험하여 자신이 행한 것을 발견하고 증명한 것에 대해 사고할 수 있도록 하고, 이러한 탐구를 통해 직관적인 사고에서 조직적인 사고로서의 전이를 용이하게 한다(Engbresten, 1997; Schoenfeld, 1988; 신은주·송정화·권오남, 2000).

그 중에서도 Microcomputer-Based Laboratory(MBL), Calculator-Based Laboratory(CBL),

Calculator-Based Ranger(CBR)는 다양한 프롭(probe)과 컴퓨터 또는 그래픽 계산기(Graphic Calculator) 등을 이용하여 자료를 모으고 수집된 자료를 분석하여 여러 가지 형태의 수학적 표상으로 표현하는 실시간 테크놀로지이다. 이것은 학생들이 수학적 개념을 학습할 때 그에 관련된 실험을 가능하게 하고 자신의 움직임 등에 대한 여러 가지 변화 상황이 컴퓨터 화면상에 그래프로 표현되는 것을 즉각적으로 지켜 볼 수 있으며 이를 계속적으로 반복 실험할 수 있도록 한다. 실시간 테크놀로지를 활용한 학습 방법은 학생들이 수학 개념을 양적인 방법으로 이해하기보다는 질적인 방법으로 이해하도록 하며 협동적인 학습을 통해 학생들이 기존에 가지고 있던 지식을 이끌어 내어 또 다른 지식에 적용할 수 있도록 하는 효과적인 매개물의 역할을 하고 있다(Michael, 1995).

그러므로 실시간 테크놀로지를 활용한 학습 방법은 지필식 방법보다 학생들이 어떠한 상황에 대해 관찰하고 예측하며 추론하는 인지적인 능력을 향상시키는데 좀 더 효과적이다(Brasell, 1987). 학생들이 그래프 학습에서 좀처럼 이해하기 힘든 기울기와 높이의 개념 정의, 기울기와 높이의 변화에 따른 개념, 주어진 그래프가 의미하고 있는 상황에 대한 이해 등도 좀 더 쉽게 이루어지도록 하는 환경을 제공해 준다(Mokros & Tinker, 1987). Michael(1995)은 실시간 테크놀로지로 학습한 그룹이 전통적인 수업 방식으로 학습한 그룹보다 수학의 개념적인 변화를 더 유능하게 확대시켜 나가며, 수학적 개념을 학습하는데 도움이 되는 그래프를 좀 더 효과적으로 해석·사용하고 이러한 개념들의 이해를 새로운 문제 상황에 더 잘 적용한다고 보았다. 또한 실시간 테크놀로지를 이용하면 수집된 자료를 즉시 적절한 표상으로 표현할 수 있기 때문에 학생들은 발생된 어떤 실제 상황에 대해 단지 그림으로 보기보다는 실세계의 관계를 더 잘 이해할 수 있으며, 학생들의 인지적인 면과 정의적인 면의 향상 모두에서 중요한 역할을 한다(Barclay, 1985; Brasell, 1987). 학생들이 직접적으로 경험한 구체적인 상황과 그러한 경험에서 발생하는 여러 가지 표상간의 관계를 이해하는데 있어서 실시간 테크놀로지의 즉각적인 표상의 표현 기능이 핵심적인 역할을 하고 있는 것이다. Brasell(1987)의 연구에서도 자료를 표현하는 그래프가 제시되는 시간에 차이를 두어 이에 따른 그래프와 실생활의 상황을 연결하는 학생들의 능력을 비교·분석하였는데 표상이 표현되는데 걸린 시간이 길수록 학생들의 능력 향상의 정도는 낮아지는 것을 발견할 수 있다.

본 연구에서는 이러한 실시간 테크놀로지를 활용하여 학생들이 직접 실제 자료들을 수집·분석하는 활동 중심의 실험학습을 통해 함수 개념의 형성과정과 그래프로의 표현방법의 변화를 관찰하고 이 과정에서 발생할 수 있는 인지적 장애가 무엇인지를 살펴보고자 한다.

(3) 연구 문제

이 연구의 목적에 따른 세부적인 연구 문제는 다음과 같다.

1. CBL을 활용한 활동 중심의 실험학습을 통해 학생들이 함수 개념을 어떻게 형성해 나가고 이를 그래프로 어떻게 표현하는가?
2. CBL을 활용한 활동 중심의 실험학습을 통하여 학생들이 기존에 갖고 있던 오개념이 어떻게 변화되어 가는가?
3. CBL을 사용하면서 학생들이 함수 개념을 형성하고 이를 그래프로 나타내는데 어떠한 인지적 장애가 발생하는가?

III. 연구방법 및 절차

(1) 연구대상

본 연구는 CBL을 기반한 활동 중심의 실험 학습을 통해서 학생들이 어떻게 함수 개념을 형성해 나가고 있으며 이를 수학적 표상인 그래프로 어떻게 표현하는지를 살펴보고자 한다.

연구 대상은 서울에 소재 하는 K중학교 1학년 남·녀 학생 총 15명으로 하였다. 이들은 「수학사고력반」이라는 클럽 활동반에 자발적으로 참여한 학생들로 이전의 수학 수업 시간에 컴퓨터나 계산기 등의 테크놀로지를 사용해 본 경험이 전혀 없었고 수학에 대한 관심이 높은 편이다.

제 7차 교육과정에 의하면 초등학교에서는 '규칙성과 함수'라는 영역에서 규칙성을 흥미 있게 접할 수 있는 다양한 패턴을 제시하고 있으며 이를 바탕으로 비례 관계를 학습하고 있다. 그러나 규칙성과 함수에 대한 형식적인 내용이나 변수와 변역의 개념에 대한 학습 활동은 중학교 단계에서 학습하도록 하고 있다. 특히, 중학교 1학년 단계에서는 초등학교 때에 학습한 여러 가지 변화 관계를 이용하여 함수 개념을 도입하고, 이들을 좌표 평면에 그래프로 나타내는 활동을 기반으로 수학의 조화로운 규칙성을 발견하고 사물의 관계를 이해할 수 있도록 하고 있다(교육부, 1999). 이러한 교육과정 아래에서 이들은 초등학교 정규 수업 시간에 단순한 예시들을 통해 대응 규칙 찾기, 꺾은 선 그래프로 나타내는 해석 문제, 대응표를 통해 그래프로 그리기 등 함수와 관련된 내용들을 학습하였다. 하지만 함수 개념의 형식적인 도입, 좌표 평면을 이용한 그래프 활용, 문자를 사용하는 대수화 과정 등은 아직까지 학습되지 않았으며 다양한 문제 상황에 따른 변수에 대한 학습이나 변하는 상황을 변수로 파악하는 학습은 제시되지 않았다(김남희, 1997; 정영옥, 1998).

(2) 연구 절차

본 연구는 2000년 4월부터 11월까지 약 6개월간 매달 1회씩 진행되었다. 실험에 참가할 학생과 사전 모임을 가져 실험의 목적과 과제 학습을 충분히 설명한 후, 함수와 그 그래프, 거리와 속도 개념에 대한 사전 검사를 실시하여 학생들의 기본적인 수학 능력을 측정하였다.

이 후 CBL을 기반으로 한 활동 중심의 수업을 하는 동안에 학생들의 함수 개념과 이를 그래프로 표현하는 과정을 보기 위해서 5명을 한 조로 구성하여 모두 3개의 조가 각각 조별 활동을 통해 총 6개의 과제를 해결하였다. 활동 과제는 실제 생활에서 학생들이 경험할 수 있는 내용을 기반으로 직접적으로 실험하면서 여러 변수들 사이의 관계와 그에 따른 그래프를 예측·해석·확인해 볼 수 있도록 하였다. 하나의 활동 과제를 학습하는데 있어서 소요된 시간은 조별로 일정하지는 않지만 대략 3시간에서 4시간 정도 걸렸다.

마지막으로 이러한 활동 과제를 마친 후 학생들에게 사전 검사에서 실시한 내용과 동형 검사로 사후 검사를 실시하여 학생들의 함수 개념과 이를 그래프로 표현하는 능력에 대한 이들의 변화 정도를 파악하고자 하였다.

(3) 활동 과제

총 6개의 과제로 구성되어 있는 본 연구의 활동 과제는 실생활에서 학생들이 경험할 수 있는 내용을 기반으로 함수적 개념을 형성하고 변화해 나가며 그리고 이를 그래프로 표현하고 그려진 그래프를 해석해 나갈 수 있도록 구성되어 있다.

활동 과제1<나처럼 해봐요~ 요렇게!>는 학생들이 자신들의 움직임에 의해 시행착오를 겪으면서 시간에 따른 거리의 그래프를 학습하는 활동으로 그래픽 계산기와 CBR을 사용하였다. 학생들은 학습지의 지시에 따라 CBR 앞에서 움직이면서 그래픽 계산기의 화면에 나오는 그래프를 보고 시간에 따른 거리의 그래프를 학습하였다. 실험을 통해 자신의 움직임에 대한 출발점, 거리, 속도, 방향 등을 바꾸어 그에 따른 그래프 모양의 변화를 관찰하였는데 이를 통해 그래프 개형의 오목, 볼록, 증가, 감소 등의 모양이 어떠한 현실 상황과 관련되어 있는지를 파악하였다. 이를 통해 학생들은 움직임에 따른 시간에 따른 거리 개념을 직접적인 경험을 통해 학습하고 수학화하여 이러한 개념을 다시 자신들의 상황으로 해석하는 기회를 가질 수 있는 것이다.

활동 과제2<빠르기와 그래프>는 시간에 따른 속도 개념과 그 그래프를 학습하는 활동으로 이 과제에서는 속도를 일정하게 할 수 있는 장난감 미니카와 CBR, 그래픽 계산기를 사용하였다. 학생들은 학습지

에서 제시된 움직임의 상황에 대한 속도 그래프를 우선 예상하고 이를 CBR을 통해 장난감 미니카를 움직여 봄으로써 자신의 예상을 확인하여 수정해 나갔다. 학생들은 이러한 움직임을 이용한 실험을 통해 속도의 개념과 그 그래프를 좀 더 쉽게 이해할 수 있었으며 CBR의 거리 그래프와 속도 그래프의 즉각적인 변환 기능에 의해 거리와 속도의 관계를 직관적으로 이해할 수 있었다.

활동 과제3<빨간색 허수아비와 푸른색 개구리>는 'Mathworld'라는 소프트웨어를 사용하여 거리와 속도 개념의 관계를 학습하는 활동이다. 우선 학생들에게 색깔 지정, 이름 바꾸기, 출발 지점 다르게 하기 등의 'Mathworld' 소프트웨어의 간단한 조작법을 알려주고 학생들은 이를 사용하여 여러 가지 상황을 만들어 보고 시뮬레이션을 해보는 등의 활동을 하였다. 또한 자신들이 원하는 거리 그래프를 만들면 바로 옆 화면에 그에 따른 속도 그래프가 그려지는 기능을 통해 학생들은 거리 그래프와 속도 그래프의 관계를 좀 더 심도 있게 파악할 수 있었다.

활동 과제4<빛의 세기와 거리의 관계>는 시간, 빛의 세기, 거리 등과 같이 두 가지 이상의 변수들의 관계를 파악하도록 구성하였다. 시간과 거리와의 관계에 대한 그래프를 보고 움직임을 예측하고 시간과 빛의 강도의 관계에 대한 그래프를 추측하도록 하도록 하였다. 또한 시간과 빛의 강도의 관계에 대한 그래프를 보고 움직임을 예측하고 시간과 거리와의 관계에 대한 그래프를 추측하도록 하였다. 이러한 과정을 통해 빛의 강도와 거리와의 관계는 어떠한 움직임에 대해서도 반비례의 관계를 유지하고 있다는 것을 학생들이 스스로 파악할 수 있도록 구성하였다.

활동 과제5<아름다운 소리를 찾아서>는 학생들의 각자의 목소리를 통해 목소리의 차이가 진동수와 주기의 차이라는 점을 학생들이 직접 경험할 수 있도록 구성되었으며 여러 가지 목소리에서 일정한 진동수와 주기의 관계가 이루어진다는 것을 학생들이 여러 번의 시도를 통해 스스로 찾아 볼 수 있도록 하였다. 실험을 통해 학습한 수학적 개념을 학생들이 직접 이용하여 '학교종이 땡땡'이라는 음악을 학생들이 직접적으로 빈 병에 물을 채워 연주할 수 있도록 하였다. 이를 통해 학생들은 수학 학습이 어떠한 개념의 학습에서만 끝나는 것이 아니라 실생활과 깊이 연관되어 있다는 사실을 직접 체험할 수 있게 되었다.

활동 과제6<일상 생활 속에서의 그래프>는 그래프로 표현되어 있는 여러 가지 실생활의 상황을 해석하고 모델링 할 수 있는 기회를 학생들에게 제공하고 있다. 주어진 그래프를 보고 적당한 일기예보를 학생들이 만들어 보게 하거나 국기 게양대에서 애국가가 나오는 동안 국기를 게양하는 것을 그래프를 보고 여러 가지 상황을 만들어 보도록 하고 있다. 이 과정에서는 직접적인 실험을 통하기보다는 어떠한 상황을 예측하여 학생들이 이에 적절한 이야기를 만들어 보고 주어진 그래프에서 문제에 적절한 답을 이끌어 낼 수 있도록 하였다.

<표1> 각 차시별 학생들의 활동 과제 내용

차시	제목	학습 목표	도구
1	.	사전 검사	.
2	나처럼 해봐요~요렇게!	자신이 직접 움직여서 거리 그래프를 만들어 보자	CBR, 그래픽 계산기
3	빠르기와 그래프	여러 가지 종류의 장난감을 이용하여 속도 그래프를 만들어 보자	CBR, 여러 가지 종류의 장난감 자동차, 공
4	빨간색 허수아비와 푸른색 개구리	컴퓨터 시뮬레이션을 통해 빨간색 허수아비와 푸른색 개구리를 움직여 속도와 거리 그래프를 만들어 보자	MathWorld소프트웨어
5	빛의 세기와 거리의 관계	장난감 차와 진동을 이용하여 빛의 세기, 거리, 시간과의 관계를 나타내는 그래프를 만들어보자	CBL, CBR, Light 프롭, 손전등, 고무 밴드, 상자
6	아름다운 소리를 찾아서	자신의 목소리를 이용하여 진동수와 주기의 관계를 그래프로 만들어 보고 콜라병을 이용하여 '학교종이 땡땡'을 연주해 보자	CBL, 그래픽 계산기, 마이크로폰, 물, 콜라병, TUNE 프로그램
7	일상 생활 속에서의 그래프	일상 생활 속에서의 상황을 그래프로 만들어 보고 주어진 그래프에서 적절한 상황을 상상해 보자	.
8	.	사후 검사	.

(4) 실험에서 사용한 테크놀로지

본 연구에서는 학생들이 활동 과제를 효과적으로 수행하도록 하기 위해서 CBL과 그래픽 계산기, CBR, MathWorld 소프트웨어를 사용하였다.

CBL은 수학 및 과학 학습에 있어서 활동 중심의 실험 학습을 가능하게 하는 환경을 제공하는데 매우 효과적인 도구이다. CBL은 자료를 수집하기 위하여 연결하는 프롭의 종류에 따라 움직임, 측정, 온도, 빛, 산성도, 힘, 심전도, 소리, 용존 산소량, 전압 등 다양한 자료들을 직접적인 실험을 통해 얻을 수 있게 해준다. 여기서 얻어진 자료를 그래픽 계산기에 연결하면 학생들은 이를 통해 자료들을 미분하거나 최소값, 최대값, 평균, 표준편차를 계산할 수 있으며 그래프를 부드럽게 연결해 볼 수 있고 필요에 따라 그래

프를 잘라서 그래프의 일부분을 보고 작은 움직임을 확대해서 분석해 볼 수 있다(김래영, 1999; Brunenungsens & Krawiec, 1998). 본 실험에서는 CBL의 기능 중 마이크로폰과 Light 프로를 사용하여 소리, 빛에 관한 실제적인 자료들을 수집하여 이를 통해 찾아볼 수 있는 여러 변수들 사이의 특징들을 탐구해 보도록 하였다.

CBR은 CBL의 여러 쓰임 중에서 '움직임'만을 떼어서 쓰기 쉽도록 만든 것으로 수학 교육에서는 거리, 속도, 가속도 등 움직임에 관한 그래프와 여러 변수의 관계를 파악하는데 간편하게 활용할 수 있도록 만든 도구이다(권오남·김래영·박지현·정호선, 1999). CBR은 그 속에 내장되어 있는 프로그램인 'Ranger'를 그래픽 계산기에 연결하여 학생들이 직접적으로 움직인 실제 시간에 대한 거리, 속도, 가속도를 측정 할 수 있으며 하나의 상황에 대한 실험을 통해 얻어진 거리 그래프를 속도 그래프, 가속도 그래프로 쉽게 변환시킬 수 있는 기능을 가지고 있다. CBR은 이로부터 50cm 이상 6m 이하, 좌우 각각 10° 사이에서 일어나는 움직임을 감지하므로 평평한 위치에 놓아두어야 하며 너무 가깝거나, 너무 멀리 움직이지 않도록 한다.

Mathworld 소프트웨어는 거리 개념과 속도 개념을 형식적으로 깨닫지 못할 지라도 거리와 속도의 그래프를 소개하고 이에 따른 실제 경험을 할 수 있도록 구성되어 진 것이다. 이것은 CBR과 달리 학생들이 직접 움직여 보는 실험을 통해 학습하는 것이 아니라 그래프로 표현된 상황들을 컴퓨터 화면상에 캐릭터들이 1차원적으로 움직여 학생들에게 시각적으로 보여주고 있다. 또한 CBR에서는 하나의 실험에서 그래프, 대수식, 표 등의 여러 가지 표상으로서의 표현에 초점을 맞추고 있는데 반하여 이것은 거리 그래프, 속도 그래프, 가속도 그래프 등의 서로 다른 관점을 기반으로 동일한 움직임을 탐구하는데 초점을 맞추고 있다. 이것은 대수적 방정식을 학습하지 않은 학생들에게도 움직임에 대한 그래프를 학습할 수 있는 기회를 제공할 수 있으며 시뮬레이션을 통해 다양한 그래프를 만들고 자신의 가설을 시험해 볼 수 있으며 그래프들 사이의 상호 작용에 해당하는 경험을 체험할 수 있는 역동적인 학습을 가능하게 한다(최선준, 1999).

(5) 자료 수집

본 연구에서 학생들의 과제 학습에 대해 작성된 관찰 일지와 학생들이 작성한 과제 학습지, 학생들의 함수 개념에 대한 그래프 개념(GIST; Graphing Interpretation Skill Test)과 거리와 속도 개념에 대한 검사지(MCT; Motion Content Test) 등을 분석 자료들로 삼았다.

관찰일지는 연구자들이 학생들의 실험 도우미로 참여하여 관찰한 각 과제에 대한 학생들의 반응과 테이프 리코더에 녹음된 학생들의 활동 진행과정을 분석하여 작성하였다. 학생들이 작성한 과제 학습지는

활동 과제를 수행하는 동안 학생들에게 제시된 활동지에 학생들이 조별 토론을 통해 얻어진 결론이나 활동 과정 등을 학생이 직접 서술한 것이다. 학생들이 가지고 있는 일반적인 함수·그래프 개념과 거리와 속도 개념에 대한 검사는 과제 활동 수업 전과 후에 사전검사와 사후검사로 실시하였다. 이 검사지의 문항 구성은 Michael(1995)의 GIST와 MCT 문항을 수정 보완하여 사용하였다.

IV. 연구 결과

(1) 연구 문제 분석

[연구문제1] CBL을 활용한 활동 중심의 실험학습을 통해 학생들이 함수 개념을 어떻게 형성해 나가고 이를 그래프로 어떻게 표현하는가?

가. 기본적인 함수개념 형성

본 연구는 CBL을 활용한 활동 중심의 실험 학습이 형식화되기 이전의 함수 개념 학습에 많은 변화를 가져왔음을 보여주고 있다. CBL은 다양한 실제적 상황에 대한 학생들의 직접적인 실험을 가능하게 해주었으며 이를 통해 학생들은 직관적으로 실세계의 종속 관계의 특성을 인식하였고, 이러한 관계를 여러 가지 표상으로 표현하고 해석할 수 있었다.

예를 들면, 활동 과제1에서 학생들은 주어진 그래프를 보고 그와 같은 모양의 그래프를 그리기 위해 출발하는 위치, 속도, 움직이는 방향 등을 변화시키면서 직접 움직여 보았다. 이러한 과정에서 학생들은 자신들의 움직임과 그래프와의 관계를 직관적으로 이해하였으며, 이를 통해 비형식적인 함수 개념을 형성하였다. 다음은 2조 학생들이 함수의 개념을 직관적으로 이해하는 과정을 관찰한 결과이다

교사: 자~ 이 그래프<그림1-a>를 얻으려면 어떻게 움직여야 할까?

학생A: 원을 그리면서 움직이면 될 것 같은데요?

교사: 그림 한 번 실험해 보자...

학생B: 어~ 이상한 모양의 그래프<그림1-b>가 그려지네..

학생A: 직선 모양의 그래프는 똑바로 걸어가면서 만들었으니까 원모양의 그래프는 원 모양을 만들면서 걸으면 될 것 같은데 왜 이러지?

학생C: 아니야... 곡선 모양의 그래프도 걸을 때는 곡선으로 걷지 않고 똑바로 속도를 다르게 해서 걸

어가면서 만들었잖아...

학생B: 그런데... 이 모양은 동시에 두 사람이 있어야 할 거 같아.

학생D: 왜?

학생B: 이 곳에서는 선이 두 군데에 있잖아...

학생E: 그럼 같은 곳에서 두 사람이 반대 방향으로 걸으면 되지 않을까?

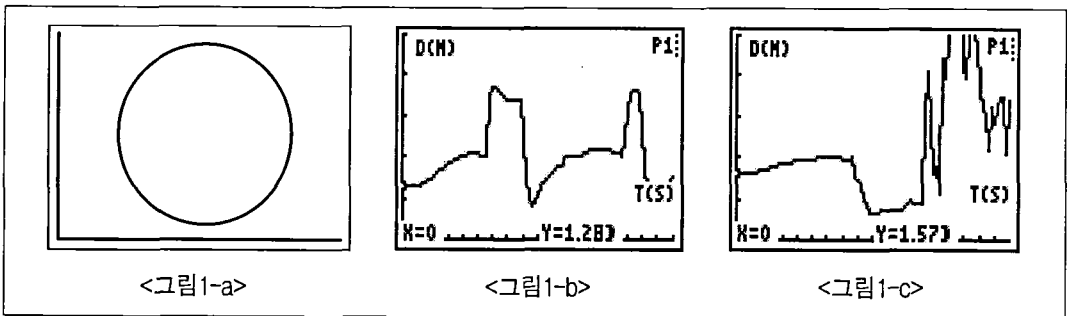
학생A: 그래... 한 번 해보자...

학생E: 그래도 이상해<그림1-c>

학생C: 아.. 생각났어!... 이 기계는 한꺼번에 두 사람을 감지하지 못하잖아.. 그러니까 그래프가 이상하게 그려지지...

학생A: 그럼 이건 어떻게 그리지?

학생C: 이 그래프는 이 기계로는 그릴 수가 없어...



<그림1> CBR을 활용한 원 모양의 그림 그리는 과정

학생들은 <그림1-a>을 만들어 가는 과정에서 자신의 움직임을 정확하게 그래프로 표현되게 하기 위해서는 하나의 시간 변수에 하나의 거리 변수가 대응되어야 한다는 것을 CBR을 사용한 활동을 통해 직접적으로 체험하였다.

또한 활동 과제2에서 학생들은 속도가 다른 여러 가지 종류의 장난감 차를 움직여 보고 이에 따른 그래프를 확인해 가는 과정에서 거리의 변화를 속도 그래프가 나타내고 있다는 사실을 확인할 수 있었으며 이러한 발견을 통해 비형식적인 미분함수 개념을 확립할 수 있었다. 다음은 2조 학생들이 CBR을 통해 거리와 속도의 개념을 학습하는 과정을 관찰한 결과이다.

교사: 자동차를 CBR 앞에서 지시대로 움직여 보고 그래프를 그려보자

학생A: 우선 느린 속도로 조정해서 움직이면 이렇게(그림<2-a>, 그림<2-b>) 그려지는데요

학생B: 빠른 속도로 조정하면 좀 달라지네(그림<2-c>, 그림<2-d>)

교사: <그림2-a>와 <그림2-c>의 차이점을 말해볼까?

학생C: <그림2-c>가 경사가 급해요... 그럼 속도가 빠르면 속도가 느린 것 보다 경사가 급하게 그려지는 거네요

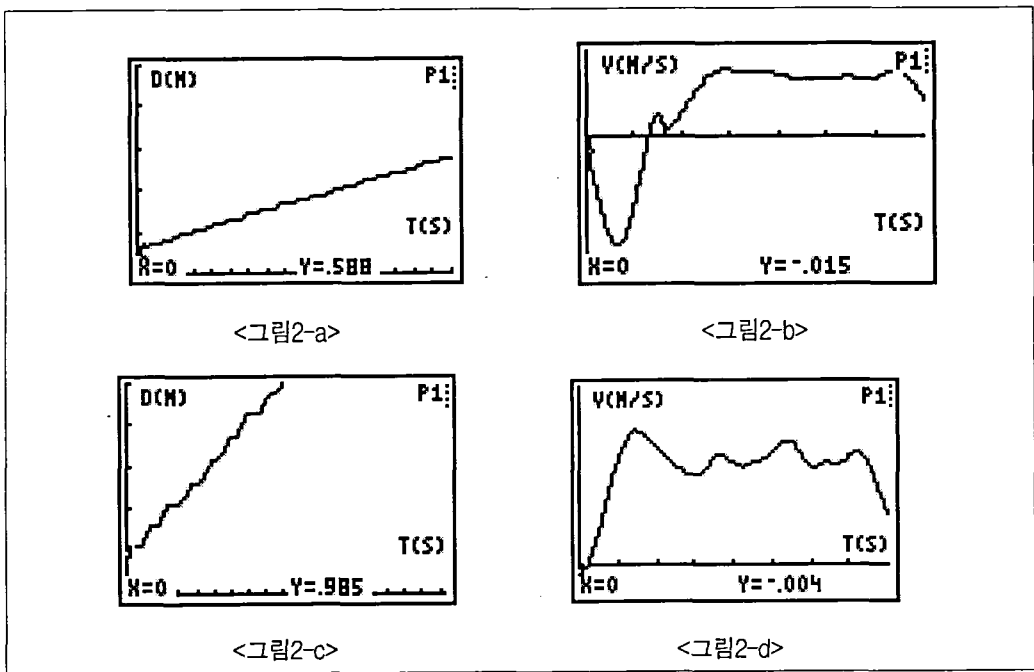
교사: 그림 <그림2-b>와 그림<2-d>의 차이점은 뭐지?

학생D: <그림2-d>가 더 위에 있어요.... 거리 그래프에서 경사가 급한 것이 속도 그래프에서는 더 위에 그려지네요

학생B: 그럼 거리에서 변화가 속도를 나타내고 있다는 말이잖아...

학생E: 두 종류의 속도 그래프가 모두 거의 가로축에 평행하게 그려지니까 각각의 거리의 변화도 일정하다고 할 수 있겠다... 그렇죠?

학생A: 아... 그래서 거리 그래프는 직선 모양으로 그려지는구나..



<그림2> CBR을 활용하여 거리 그래프와 속도 그래프 그리는 과정

학생들은 실제로 움직이는 상황의 관찰을 통해 속도가 느린 자동차와 속도 빠른 자동차의 차이점을 경험하고 이들의 움직임을 통해 그려지는 그래프들의 차이점을 하나하나 발견해 나가면서 거리와 속도 개념의 관계를 비형식적으로나마 이해하고 학습할 수 있었다. 또한 이러한 실험과 즉각적인 확인 과정을 거치면서 학생들은 초반에는 그래프의 전체적인 모양을 관찰하다가 후반에는 그래프의 특수한 좌표에 대한 국소적인 관찰을 하였다. 이러한 과정에서 학생들은 함수의 개념을 직관적으로 이해할 수 있었으며 현실세계의 종속적인 변화 관계를 좀 더 쉽게 이해할 수 있었다.

나. 실제 현상과 그래프의 관계

본 연구에서는 CBL을 통한 다양한 경험을 기반으로 하는 학습이 여러 가지 실제 현상을 수학적화 하는 과정에 좀 더 쉽게 접근할 수 있도록 한다는 것을 보여주고 있다. 불규칙적인 것, 규칙적인 것, 연속적인 것, 이산적인 것 등 다양한 현상을 직접 학생들이 경험하고 체험함으로써 비례성과 주기성, 증가와 감소 등의 특징을 좀 더 쉽게 이해할 수 있었다. 학생들이 생활 속에서 「~하면 할수록 ~한다」라는 표현을 많이 사용하고 있는데 CBL을 활용한 실험 학습은 이러한 패턴을 가지는 현상들이 매우 다양하다는 사실을 직접 경험할 수 있도록 하며 CBL은 이러한 다양한 현상들을 수학적 표상으로 표현할 때 각각의 특징을 보다 쉽게 구분할 수 있도록 해 준다.

예를 들면, 활동 과제3에서 학생들은 등속도 운동과 가속도 운동의 차이점을 Mathworld 소프트웨어의 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 체험하였으며 이를 현실 상황과 연결된 그래프를 이용하여 확인하였다. 학생들은 속도 그래프에서 가로축에 평행인 그래프, 직선 그래프, 곡선 그래프의 차이점을 거리 그래프의 모양과 비교하고 이 상황에 대한 시뮬레이션을 통해 확인하면서 이해하였다. 다음은 3조 학생들이 등속도 운동과 가속도 운동의 차이점을 이해하는 과정이다.

교사: 개구리가 앞으로 점점 빠르게 움직이려면 속도 그래프를 어떻게 조절하여야 할까?

학생A: <거리 그래프를 조절하면서> 이렇게 그려서 해보자<그림3-a>

학생B: <프로그램을 작동시킨 후> 개구리가 점점 빨라지는 것 같지 않은데?

학생C: 맞아... 그냥 같은 속도로 앞으로만 가고 있잖아..

학생D: 속도 그래프도 그냥 가로축에 평행이야...<그림3-b> 속도는 변화가 없는 거 같아....

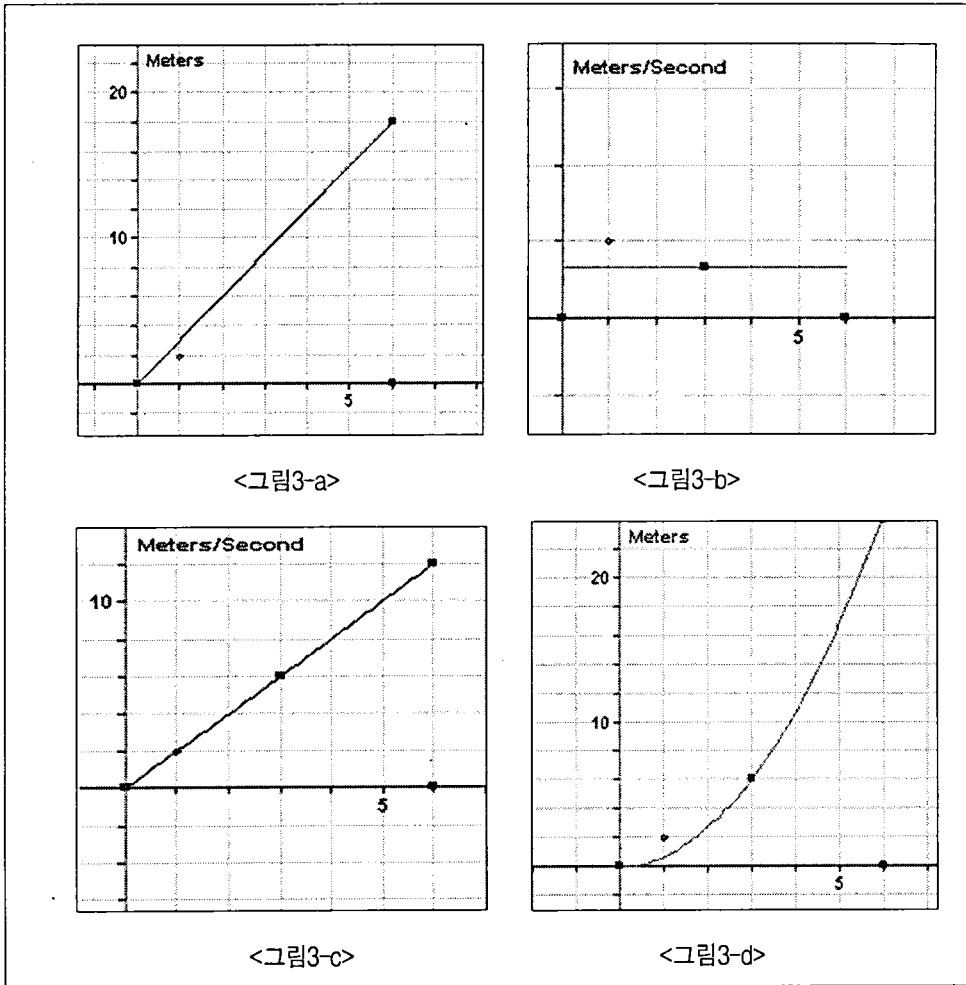
학생A: 그럼 어떻게 해야 하지?

학생E: 그럼 속도 그래프를 이렇게<그림3-c> 하면 어떨까?

학생B: <프로그램을 작동시킨 후> 점점 빨라진 것 같기도 한데....

학생A: 거리 그래프는 곡선의 모양이 나오네...<그림3-d>

학생B: 그럼 점점 빠르게 움직일 때는 거리 그래프가 곡선모양이구나...



<그림3> Mathworld 소프트웨어를 이용한 거리, 속도 그래프 그리는 과정

학생들은 초반에는 「점점 빨라진다」의 언어적 표현을 그래프 표상으로 표현하는 과정에서 <그림 3-a>와 <그림3-d>의 상황을 혼돈하였다. 그러나 이러한 혼돈 상태는 그래프의 시뮬레이션 과정을 통해 극복할 수 있었으며 이와 더불어 <그림3-a>와 <그림3-b>의 상황, <그림3-c>과 <그림3-d>의 상황이

동일한 상황임을 쉽게 이해하였다.

또한 활동 과제6에서 학생들은 주어진 그래프를 읽고 그리기, 그래프에서 증가 또는 감소, 직선의 성질을 해석하고 기술하기 등을 통해 주어진 그래프의 상황을 언어적인 표상으로 표현하고 또 반대로 언어적 표상으로 기술되어 있는 실제 상황을 그래프로 재해석하는 과정을 통해 실생활과 그래프를 좀 더 쉽게 연결하고 이용할 수 있었다. 다음은 1조 학생들이 주어진 상황에 알맞은 그래프를 상상해 보는 과정을 관찰한 결과이다.

교사: 지영이가 화장실이 너무 급해서 화장실까지 다녀오는 거리 그래프를 그려보자

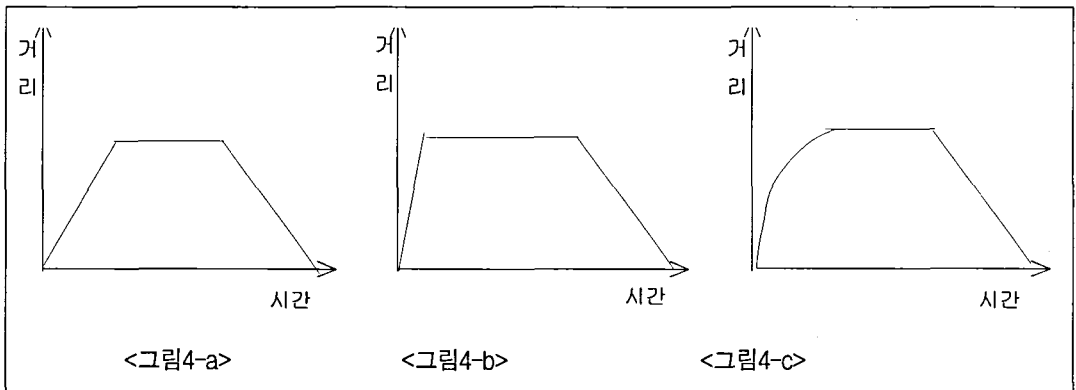
학생A: 이런 그림이 그려질거 같아요<그림4-a>

교사: 그림 그 그림을 설명해보겠니?

학생A: 앞부분은 화장실에 가는 동안을 나타내고 있고요.. 가운데부분은 불일을 볼 때, 마지막부분은 다시 교실로 돌아오는 동안을 그린 거예요

학생B: 이 그림은 앞부분과 마지막 부분의 경사가 같은데... 정확하게는 처음에서 더 빨리 뛰니까 좀더 경사가 급해야 할 거 같은데<그림4-a>

학생C: 맞아... 그리고 처음에는 빨리 뛰다가 숨이 차서 화장실에 가까이 가서는 천천히 걸어갈 수도 있잖아<그림4-c>



<그림 4> 상황에 알맞은 그래프 그리는 과정

학생들은 CBL을 통해 실제 상황에 대한 자료를 보다 쉽게 모을 수 있었으며 이러한 자료의 관계를 그래프적 표상으로 즉각적으로 확인할 수 있기 때문에 여러 가지 다양한 현상에 대한 수학적 관계를

보다 쉽게 이해할 수 있었다.

다. 합성함수와 역함수의 개념

본 연구에서는 CBL을 활용한 활동 중심의 실험 학습이 함수의 연산 개념을 학습하는데 있어서 비형식적 접근을 가능하게 하였다는 것을 나타내고 있다. 학생들은 직접적인 실험을 통해 얻어진 자료를 표현한 여러 가지 변수에 따른 그래프를 이용해서 역을 고려하거나 합성을 시도할 수 있었다. 또한 그래프를 이용해서 두 종속관계를 비교하거나 한 변수의 변화가 다른 변수에 어떤 영향을 미치는지 개략적으로 표현하는 활동을 하였다.

예를 들면, 활동 과제4에서 학생들은 여러 번의 동일한 실험을 통해 시간과 거리, 시간과 빛의 세기에 대한 자료를 측정하면서 이들 사이에서 새로운 함수인 거리와 빛의 세기에 대한 관계를 추측·확인하였다. 즉, 시간을 매개 변수로 하여 거리와 빛의 세기를 학생들이 추측하고 여러 번의 시행을 통해 그들의 관계를 즉각적으로 확인해 볼 수 있었다. 다음은 2조 학생들이 CBL을 통해 합성 함수의 개념을 이해하는 과정이다.

교사: 다음 그래프 <그림5-a>를 그리려면 어떻게 자동차를 움직여야 할까?

학생A: 점점 가까이 같은 속도로 움직이면 될 것 같은데...

학생B: 그럼 빛은 점점 강해질거야... 그럼 이런<그림5-b, 그림5-c> 그래프가 그려지지 않을까?

학생B: 한 번 실험해 보자...

학생D: 어~ 시간에 따른 빛의 강도 그래프와 거리에 따른 빛의 강도 그래프의 모양이 다르게 나타나구나

학생E: 그래.... 시간이 지날수록, 또 거리가 가까워질수록 빛이 강해지니까 그래프의 모양이 다르지

교사: 자... 그럼 다른 그래프<그림5-d>를 그리려면 어떻게 자동차를 움직여야 할까?

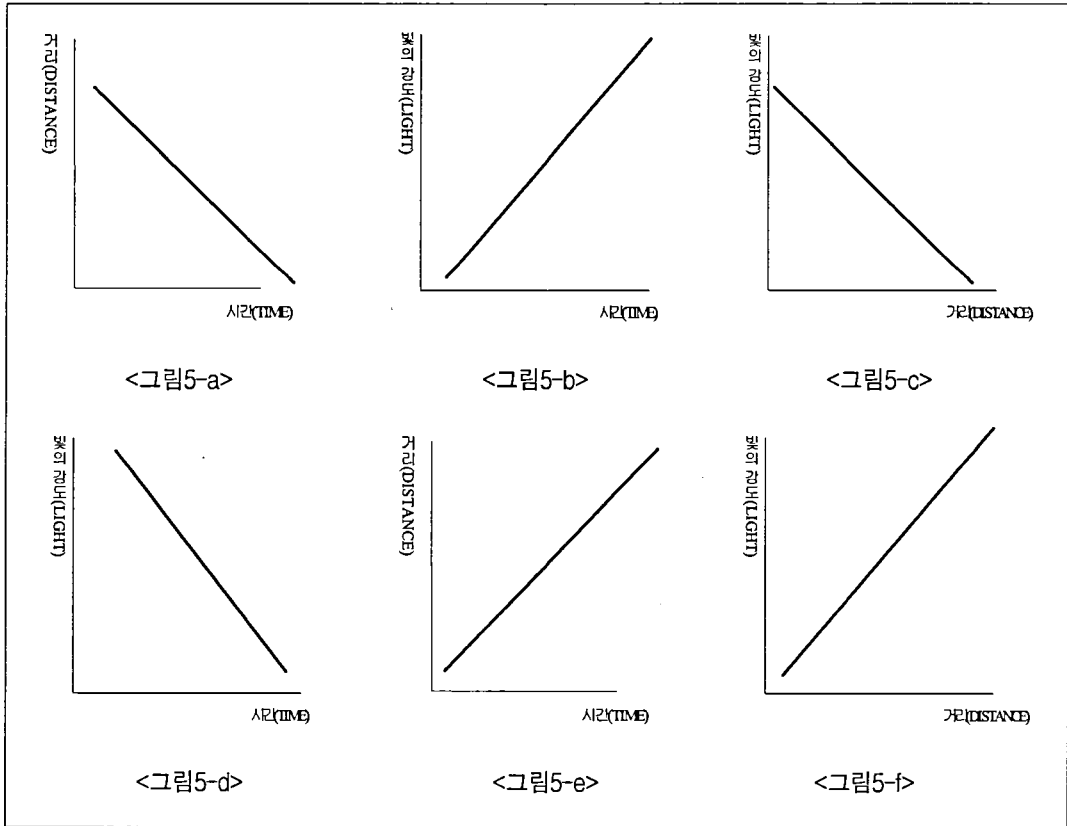
학생E: 점점 멀리 움직여야 해요... 시간이 지날수록 빛이 약해지니까...

학생B: 점점 멀리 움직여야 하니까 거리 그래프는 점점 증가하는 모양이 그려질 거예요...<그림5-e>

학생C: 빛의 강도 그래프와 거리 그래프가 반대 모양이니까 거리와 빛의 강도 그래프는 거리가 점점 멀어질수록 빛은 점점 약해지는 것 같아요<그림5-f>

학생A: 확인해보자

학생B: 거리에 따른 빛의 강도 그래프는 곡선 모양인 것 같아...



<그림5> CBL을 활용하여 거리, 시간, 빛의 강도에 대한 그래프 그리는 과정

학생들은 CBL을 통해 장난감 차를 이리 저리 움직여 보면서 수집된 자료들을 여러 변수들의 관계를 표현하는 그래프로 확인하면서 다양한 함수들을 생성하였다. 또, 시간을 매개 변수로 보고 거리에 따른 빛의 세기 변화를 그래프로 표현하는 과정을 거치면서 학생들은 보다 더 쉽게 합성 함수의 개념을 이해할 수 있었다.

또한 활동 과제5에서 학생들은 CBL을 통해 각자의 목소리의 진동수와 주기를 찾아봄으로써 진동수와 주기의 관계를 새롭게 이해할 수 있었다. 다음은 3조 학생들이 자신의 목소리의 진동수와 주기를 찾아가는 과정을 나타낸 것이다.

교사: 각자 조원들의 목소리의 주기와 진동수를 구해보자.... 주기와 진동수에 대한 설명은 활동지에 적

어 놓았단다

<각자의 목소리를 통해 그래프를 얻어 주기와 진동수를 구한다>

학생A: 사람마다 주기랑 진동수가 다르게 나오는지

학생B: 그야.. 당연하지!... 사람마다 목소리가 다르잖아

학생C: 내 목소리가 주기가 가장 짧게 나오고, 진동수가 가장 높게 나왔네...역시 내 목소리가 최고야

학생D: 아니야...내건 주기가 가장 길게 나오고, 진동수는 가장 낮은데... 내 목소리가 최고야

교사: 두 사람이 소리를 내었을 때 어떻게 다른지 다른 친구들이 한 번 들어보렴?

학생E: 학생C가 목소리가 높아요...

학생B: 그럼 목소리가 높을수록 주기는 짧고 진동수는 높게 나오나보다...

교사: 자...그럼 진동수와 주기의 관계는 어떻게 될까?

학생A: 진동수가 커질수록 주기는 작아져요

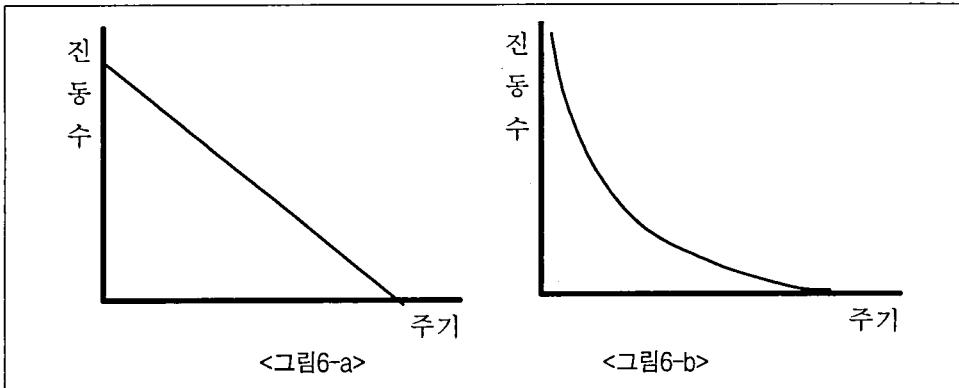
교사: 그래프를 그리면 어떤 모양이 될까?

학생A: 이런 모양이요<그림6-a>

교사: 그럼 한 번 계산기로 모양을 확인해 보자... 활동지에 나와있는 순서대로 해보렴

학생C: 점점 줄어드는 모양이 비슷해요....

학생E: 아니야... 좀 다른 것 같아.... 곡선 모양인데....<그림6-b>



<그림 6> CBL을 활용한 진동수와 주기의 그래프 그리는 과정

이처럼 CBL을 활용하여 비형식적인 방법으로 다양한 상황에서 함수 관계를 찾아내고 합성 함수의 개념을 조직하는 것은 학생들에게 매우 중요한 경험이 된다.

[연구문제 2] CBL을 활용한 활동 중심의 실험을 통하여 학생들이 기존에 갖고 있던 오개념이 어떻게 변화되어 가는가?

가. 그래프와 그림의 혼돈

시간에 따른 거리 개념과 그 그래프를 학습할 때 초반에는 학생들은 현실 세계의 변화 관계를 표현한 그래프를 그림 자체로 보아서 그림 그대로의 모양대로 움직이려는 경향을 보였다. 학생들은 초반에 그래프를 해석하고 이해할 때 그래프의 전체적인 모양을 보고 전반적인 관찰을 하기 때문에 그래프를 움직임의 시각적인 면을 좌표 평면 위에 그려진 것으로 주로 보고 있다. 이러한 학생들의 태도는 실시간 테크놀로지를 활용한 활동 중심의 실험 학습을 통한 지속적인 실험을 통해 자신들의 움직임에 대한 그래프를 즉각적으로 확인해 봄으로써 그래프가 단순한 그림이 아닌 변수간의 변화로 이해해 나가고 있다.

다음은 활동 과제1에서 기본적인 그래프에 대한 활동 학습 후에 응용하는 문제로 제시된 여러 가지 그래프 그리기에 나온 활동 중 가우스 함수의 그래프를 그리는 과정에서 1조의 학생들이 이러한 오개념을 수정해 나가는 과정이다.

교사: 이 그래프<그림7-a>를 그리려면 어떻게 움직여야 할까?

학생A: 이건... 음. 4명이 이 모양처럼 차례로 서 있으면 되겠네. 그래프처럼 간격을 두고 옆으로 차례 차례 서보자.

(학생들은 CBR앞에서 간격을 두고 4명이 그래프에 있는 모양대로 옆으로 차례대로 선다. 그리고 실제로 실험을 해본다.)

학생B: 그래프가 1개밖에 나오지 않네<그림7-b>. 어떻게 해야 하지? 뭐가 문제일까?

학생A: 참, CBR은 한번에 1개의 물체만을 감지하지!

학생C: 맞아. 그리고 좌우 10° 안에 있는 그래프만을 감지하잖아.

학생D: 그래. x축에 평행한 직선이 있으니까 일단 가만히 서 있는 건 맞아. 그리고 어차피 여러 명이 있어도 한 명만 감지되니까 한 명만 서 있으면 되겠네.

학생B: 그럼... 한 명이 CBR 앞에서 한 50cm정도에 서 있다가 총 15초니까 4초 정도 지나면 뒤로 뛰어 가서 서 있으면 되겠네.

학생D: 그래 그러면 되겠다.

(학생들은 자신들의 의견대로 움직여 본다.)

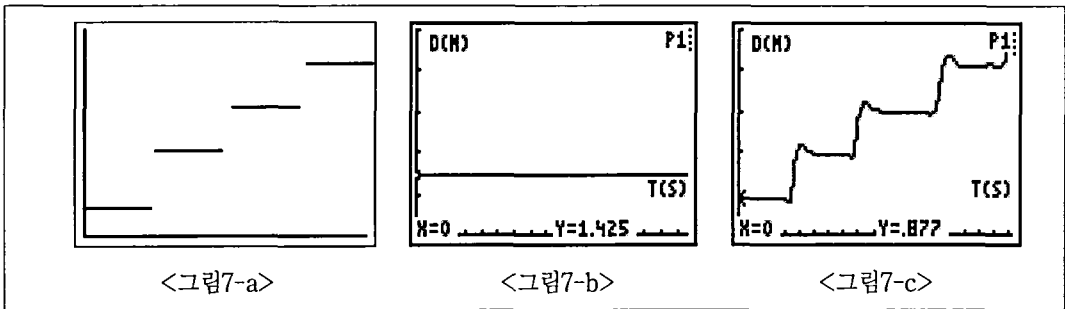
학생A: 어? 그래프가 중간중간 증가하는 직선이 나오게 되잖아?

학생B: 맞다. 그래프가 뛰어가는 부분까지 나와 뛰어가는 그 시간동안 뒤로 가는 것을 감지해서 증가하게 나온다. 뛰어가는 시간을 줄여야 할 것 같은데...

학생D: 아니 시간을 줄일 것이 아니라 아예 그 시간이 없어야 하는데... 아무리 빨리 뛰어도 1초는 걸리지 않겠어?

학생C: 공간이동을 해야 하나... 아! 4명이 서 있다가 앞에서부터 차례로 4초 정도 지나면 옆으로 피하면 되겠네. 그럼 바로 뒤의 사람이 측정되겠지?

(학생들은 학생C가 말한 의견에 동의하면서 실험해 본다. 그리고는 거의 비슷한 그래프<그림7-c>를 그려내고 좋아한다.)



<그림 7> CBR을 활용하여 가우스 함수의 그래프를 그려내는 과정

초반에 학생들은 그래프 모양 그대로 서 있으면 <그림7-a>와 같은 그래프가 그려질 것이라 추측하였다. 그러나 직접적인 실험을 통해 <그림7-b>와 같이 나오는 것을 확인하고 여러 가지 다른 방법을 통한 실험을 계속적으로 실행해 봄으로써 단순한 그림이 아닌 시간과 거리와의 관계로 그래프를 이해해 나갔다.

다음은 활동 과제2 에서 <그림8-a>의 그래프를 그려내는 문제에서 3조의 학생들이 시간에 대한 속도 그래프를 단지 증가하는 그림으로만 보고 증가하는 방법으로만 시도하는 오류를 보였다가 시행착오를 통해 점차 오개념을 수정해 가는 과정을 보이는 과정이다.

교사: 자! 지금까지 우리는 시간에 대한 속도 그래프를 알아봤죠? 그럼 <그림8-a>의 그래프는 어떻게 그려낼 수 있을까요?

학생C: 점점 증가하는 그래프니까 CBR로부터 일정한 속도로 점점 멀어져 가면 되겠네. 한번 해 보자. (학생은 CBR로부터 점점 멀어져 간다.<그림7-b>)

학생B: 어? 아니잖아? 뭐가 잘못된 거지?

학생E: 이진 속도 그래프잖아. 속도를 점점 증가시켜야지.

학생C: 그래! 속도가 점점 증가하고 있으니까 속도를 증가시키면서 멀어지면 되겠다.(학생들은 속도를 점점 증가시켜가면서 CBR로부터 멀어져간다.<그림8-c>)

학생A: 어? 이렇게 돼도 안되네? 그럼 뭐지?

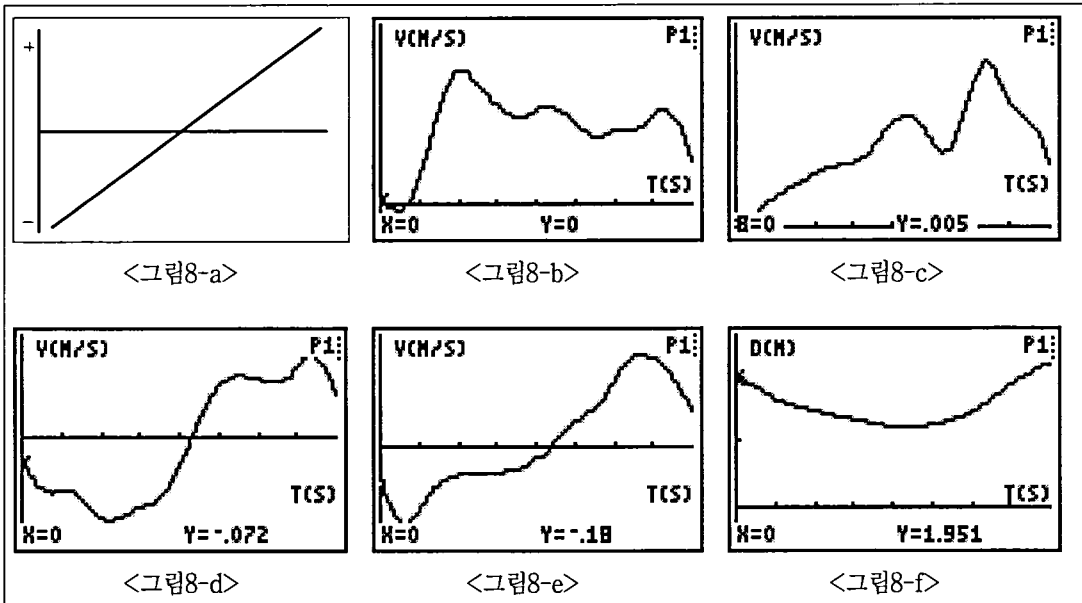
학생B: 그래프를 잘 봐. 속도가 음수에서 양수로 바뀌고 있어. 속도가 음수로 나오는 건 방향이 다르다는 것이었지?

학생C: 그래, 음수가 나오려면 CBR로부터 점점 멀어 지는게 아니라 가까이 와야지. 가까이 왔다 멀어져 가면 속도가 음수에서 양수로 되겠다.

학생E: 그런데 속도의 절대값이 컸다가 작아지고 0이 되었다가 다시 커지니까 속도의 변화가 있어야 겠다. 점점 느리게 앞으로 왔다가 점점 빠르게 멀어져 가면 되겠네. 와 힘든걸...

학생D: 총 10초간 할꺼니까 처음 5초 동안은 점점 느려지면서 가까이 오고 다음 5초동안은 점점 빨라지면서 멀어져 가면 되겠다.

(여러 번의 실험을 통해 그래프를 얻는다.<그림8-d>, <그림8-e>, <그림8-f>의 그래프는 <그림8-e>의 시간에 대한 속도 그래프를 시간에 대한 거리 그래프로 변환한 것이다.)



<그림8> CBR을 활용하여 속도가 점점 증가하는 그래프 그리는 과정

이 실험을 하기 전에 학생들은 시간에 대한 속도 그래프를 속도가 양수, 0, 음수일 때에 대해 각각 알아보았다. 그러나 <그림8-a>의 그래프가 나오자 학생들은 단지 증가하는 그래프로만 인식하고 앞으로 움직이는 활동의 그래프로 인식하는 오류를 보였다가 점차 종속변수가 음수에서 0, 그리고 양수로 바뀌는 것에 대해 인식하면서 각각의 경우에 따른 움직임의 변화를 이해해 나가는 모습을 보였다.

나. 그래프와 움직인 경로의 혼돈

학생들은 변수들의 관계를 표현한 그래프를 단순한 움직임의 경로로 파악하는 경향을 학습 초반에는 많이 나타내고 있다.

다음은 활동 과제1에서 시간에 따른 거리 그래프를 통해 산모양의 그래프를 그리는 문제를 푸는 과정이다. 학생들은 산모양의 그래프를 처음에 움직인 경로로 생각하고 시도하는 오류를 보였다. 다음은 1조의 학생들이 산모양의 그래프를 그리는 과정을 나타낸 것이다.

교사: 산모양의 그래프를 그려보도록 합시다. 어떤 모양의 산을 그려볼까요?

학생A: 봉우리가 3개 있는 산을 그리자.

학생B: 그리고 좀 더 재미있게 가운데 봉우리가 더 높이 올라가는 그래프를 그려보자.

학생들: 그래 그걸로 하자.

학생C: 그럼 내가 움직여 볼게. 이거야 쉽지 뭐!

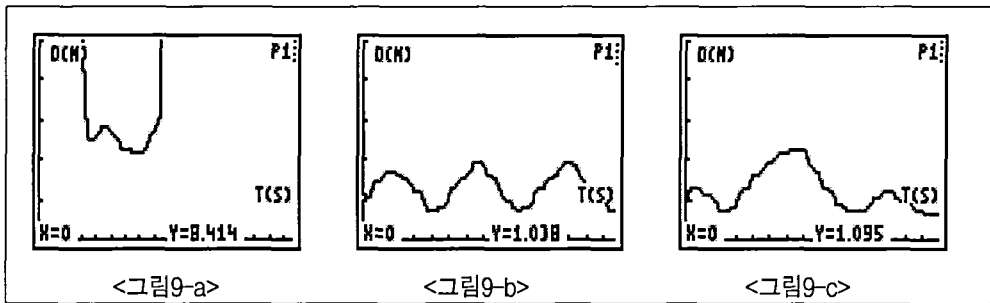
(학생C은 생각한 산 모양 그대로 옆으로 지그재그 모양으로 움직인다.<그림9-a>)

학생B: 그렇게 하니깐 옆으로 나간 그래프는 보이지 않잖아.

학생D: 맞아. 증가하고 감소하는 그래프가 반복되는 거니까 앞뒤로 왔다 갔다 하면 되겠네.

학생C: 그래. 앞으로 뒤로 왔다갔다 해보자.<그림9-b>

학생A: 참, 가운데 봉우리가 높게 하려면 더 멀리까지 왔다 갔다 해야겠다. 그러니까 처음 4초간은 2미터까지 갔다가 다시 0.5미터까지 오고 다음은 7초간 4미터까지 갔다가 0.5미터까지 오고 마지막으로 다시 4초간 2미터까지 갔다가 오자. 내가 초를 쟈게. 해보자!<그림9-c>



<그림 9> CBR을 활용하여 산모양의 그래프를 그리는 과정

학생들은 실험 초반에는 산 모양을 보고 그 그림 그대로 움직여서 그래프를 만들어 가려고 하였다. 그러나 앞선 실험의 결과를 생각하고 자신들의 오개념을 수정해 나가면서 움직이는 거리를 조절하여 점점 더 정확한 그래프를 얻어내는데 성공했다.

이러한 상황은 가우스 함수와 같은 계단함수의 경우에서도 나타났는데 학생들은 앞선 결과처럼 그림 그대로 서 있기도 하였지만 사선모양의 계단 함수에서는 사선모양으로 CBR을 향해 걸어가는 경향이 나타났다. 다음은 사선 모양의 계단 함수의 경우 3조의 학생들이 이러한 오개념을 수정해 가는 과정이다.

학생A: <그림10-a>도 앞에서 그린 그래프(가우스 함수)처럼 4명이 필요하겠네?

학생B: 그래, 그런데 이것은 x축에 평행한 그래프가 아니니까 움직여야겠다.

학생A: 자 그럼 움직여 보자.

학생B: 이진 출발점이 똑같으니까 같은 위치에서 걸어오면 되겠네.

(학생 4명이 한 위치에서 서 있다가 앞으로 걸어온다. 이 때, 학생들은 곧바로 앞으로 걸어오지 않고 사선모양으로 즉, 그래프 모양처럼 그대로 그 모양대로 걸어온다.<그림10-b>)

학생C: 그렇게 걸어오니까 나중에는 CBR이 감지하지 못하잖아. 그리고 출발점이 자꾸 달라지니까 그래프가 자꾸 그래프가 위로 올라간다. 출발점은 정확히 한자리에서 시작해.

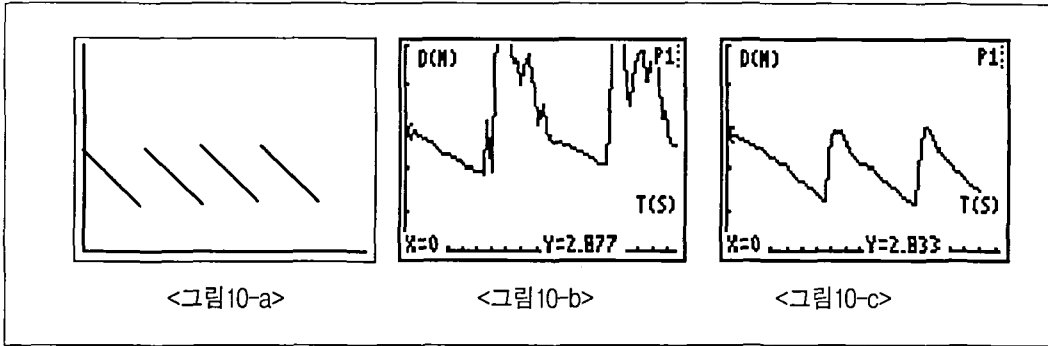
학생D: 걷는 건 굳이 사선모양으로 걸을 필요는 없잖아. 앞으로 걸어오면 감소그래프가 나오잖아.

학생E: 맞다. 이진 감소 그래프니까 앞으로 걸어오면 되겠다. 일정한 속도로.

학생C: 그리고 출발점과 도착점이 4명 모두 일정해야 해.

학생D: 자! 그럼 우리 출발점과 도착점을 정확히 지키면서 앞으로 걸어와 보자.

(학생들은 수정한 방법대로 걸었다. 정확한 그래프가 나오기까지는 여러 번의 시행착오가 있었다.<그림10-c>)



<그림10> CBR을 활용하여 계단 함수를 그리는 과정

가우스 함수를 그리고 나서인지 학생들은 앞선 과제보다 좀 더 빨리 움직임의 경로에서의 그래프 파악에서 변수들의 변화로의 그래프로 이해해 나갔다. 또한, 학생들은 이러한 그래프를 그리면서 속도, 출발점, 도착점 등에 대해 더 명확하게 생각하는 경향을 보였다. 이는 실시간 테크놀로지를 활용한 활동 중심의 실험 학습이 물리적인 현상을 수학적 개념으로 연결시키는 데 도움이 되며 그림으로서 그래프를 인식하는 오류나 그래프의 모양대로 움직이는 오류 등 여러 가지 오개념들이 수정될 수 있다는 Bassok & Holyoak (1989)의 연구결과와도 일치한다.

다. 그래프에서 변화에 대한 혼돈

본 실험에서 초반에 학생들은 주어진 그래프에서 종속변수의 값 자체와 그 값들의 변화의 정도를 구분하는데 있어서 많은 혼돈을 보였다. 이러한 현상은 자신들의 움직임을 통해 나타난 속도 그래프와 거리 그래프를 구별하여 이해하지 못하는 현상에서 두드러지게 나타났다. 학생들은 처음에 시간에 따른 거리의 학습을 하고 나서, 움직임과 그래프간의 관계를 정리하게 된다. 그래서 거리가 변하는 경우 증가 또는 감소, 직선 또는 곡선 등이 나오는 것을 알게 되었다. 그런데 시간에 따른 속도의 변화에 대한 활동에서 학생들은 속도를 거리와 동일하게 생각하여 잘못 움직이는 오개념을 보였다. 다음은 활동 과제2에서 2조의 학생들이 거리 개념과 속도 개념을 구별해 가는 과정을 나타낸 것이다.

교사: CBR로부터 1m 떨어진 지점에 자동차를 가만히 둡시다. 그러면 어떤 그래프가 나올 지 예상하여 봅시다.

학생A: 가만히 있는 경우니까 x 축과 평행한 직선이겠네.

학생B: 내 생각도 그래.

(나머지 학생들도 동의하고 예상 그래프를 그린다.)

학생C: 어? 그래프<그림11-a>가 x 축과 딱 붙어버렸네? 왜 이렇게 나오지?

학생A: 맞다. 지금은 시간에 대한 속도의 그래프 그리는데 가만히 있는 경우 속도가 0 이니까 x 축에 붙는 게 맞다. 다음 문제도 해보자.

교사: CBR로부터 0.5m 떨어진 지점에서 일정하게 자동차를 멀어져가게 해 보자. 어떤 그래프가 나올지 예상하여 봅시다.

학생C: 이건 일정하게 멀어져 가니까, 증가하는 직선이겠다.

학생B: 그래 증가하는 직선!

(실제로 실험 후에 학생들은 x축에 평행한 직선이 나오는 것을 발견한다.<그림11-b>)

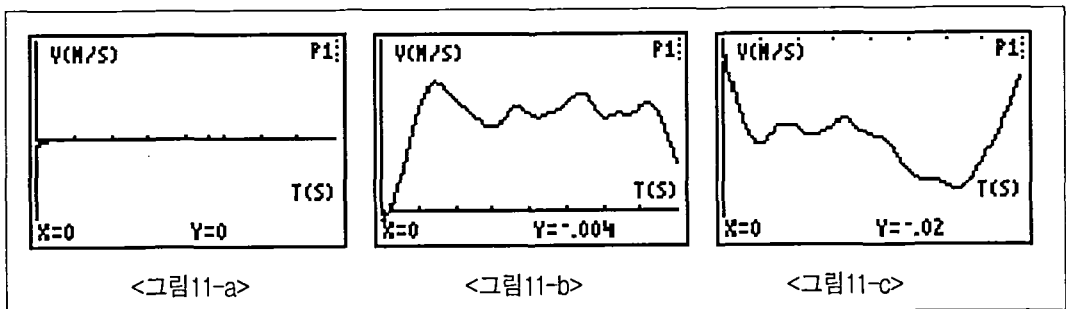
학생D: 속도니까 속도를 생각하면 일정하잖아.

학생E: 그래 맞다. 그러면 이 경우가 바로 x축과 평행한 그래프가 나오지.

학생D: 그럼 다음 문제에서 가까이 오는 것도 속도가 일정하니까 x축에 평행한 그래프가 나오겠다.

(실험 후에 음수 쪽으로 나오 걸 발견한다.<그림11-c>)

학생B: 방향이 바뀌는 경우 속도는 음수니까 음수에서 평행한 직선이 나오지.



<그림 11> 시간에 따른 속도 그래프를 그리는 과정

속도에 대한 개념과 그 그래프를 학습할 때, 움직임에 대한 거리의 변화와 혼동을 하였으나 여러 번 실험해 보면서 점차 자신들이 잘못 알고 있었던 것을 스스로 수정하면서 깨달았다. 이러한 과정 속에서 여학생의 경우 시행착오를 겪는 대신 조용히 머리 속으로 생각하여 답을 말하는 경향이 있고, 남학생의 경우는 일단 자신의 생각을 말하고 틀린 점을 고쳐 나가는 경향을 보이기도 하였다.

또한 시간에 따른 거리 함수를 학습함에 있어서도 학생들은 직선 그래프와 곡선 그래프의 차이를 이

해하는데 많은 어려움을 느꼈다. 학생들은 '거리가 멀어지면 증가 함수, 거리가 가까워지면 감소 함수다'라고 단순하게 공식화하여 그것을 그래프로 표현하는 경향을 학습 초반에는 많이 나타내고 있었다. 다음은 활동 과제 2에서 속도 변화가 나타나는 문제 상황에서 2조의 학생들이 직선과 곡선의 차이를 인식해 가는 과정을 나타낸 것이다.

교사: 자! 이제 속도를 변화 시켰을 때의 그래프를 학습해 보자. 속도를 점점 증가시키면서 CBR로부터 떨어져 가면 어떤 그래프가 나올까?

학생B: 멀어져 가니까 증가함수겠네.(학생은 자신의 예상 그래프에 증가하는 직선 그래프를 그린다.)

학생C: 그런데 여기에 속도를 점점 빠르게 하라고 한 것이 있잖아. 속도를 빠르게 그럼 어떤 그래프가 나오지?

학생A: 그래도 점점 거리가 늘어나니까 증가하는 그래프잖아. 실험해 보고 확인해 보자. 속도를 점점 빠르게 하라고 했으니까 처음에는 느린 속도로 가다가 점점 빠르게 움직여 가봐.

학생B: 그럼 정확하게 발폭을 점점 늘여가면서 가보자.

(학생들은 발폭의 변화를 주면서 속도를 점점 빠르게 한다.<그림12-a>)

학생D: 그래 속도를 증가시키니까 곡선 그래프가 나오네?

학생C: 그렇다. 속도가 점점 빨라지니까 시간에 따라 움직인 거리가 일정하게 늘어나지 않고 점점 많이씩 늘어나게 되지. 그러니까 이렇게 곡선 그래프가 나오게 되는게 맞잖아.

학생A: 그럼 이제 속도를 점점 느리게 하면서 떨어져 가보자. 어떤 그래프가 나올까?

학생C: 그럼 점점 움직이는 거리가 줄어들 테니까 위로 오목한 그래프가 나오지.

학생A: 그래 내 생각도 마찬가지야.

(학생들은 각자 위로 오목한 그래프를 예상하고 실험을 해본다.<그림12-b>)

학생C: 와 맞았다. 신기하다. 그럼 속도를 빨리하면서 점점 가까이 오는 경우는?

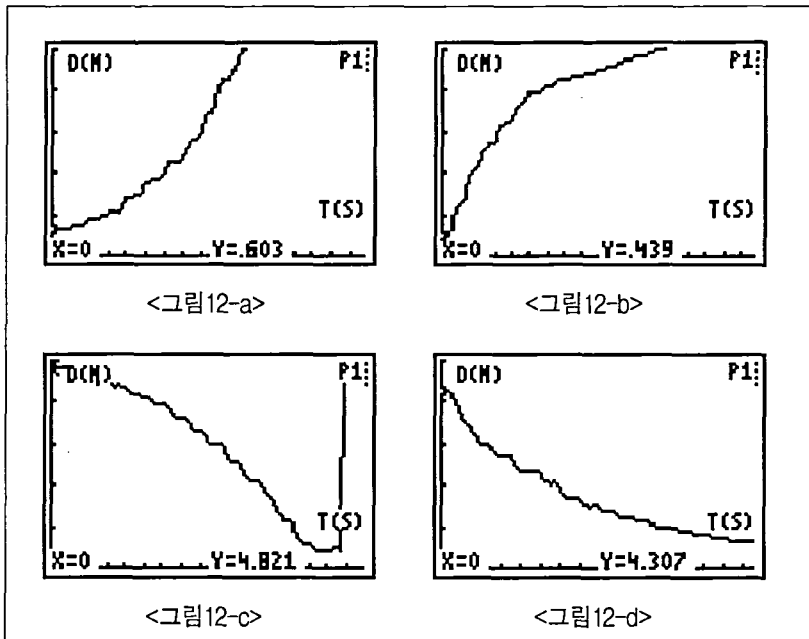
학생A: 거리 변화가 점점 커지는 거니까... 어떻게 되지? 곡선은 곡선일 것 같은데...

학생C: 실험을 해보자.<그림12-c>

학생A: 그렇구나. 그럼 점점 느려 가면서 가까이오면 위로 오목한 그래프가 나오지 않을까?

학생B: 나도 동감!

(실험을 통해 자신들의 예상을 확인하고 좋아한다. <그림12-d>)



<그림 12> 속도 변화가 있는 시간에 대한 거리 그래프 그리는 과정

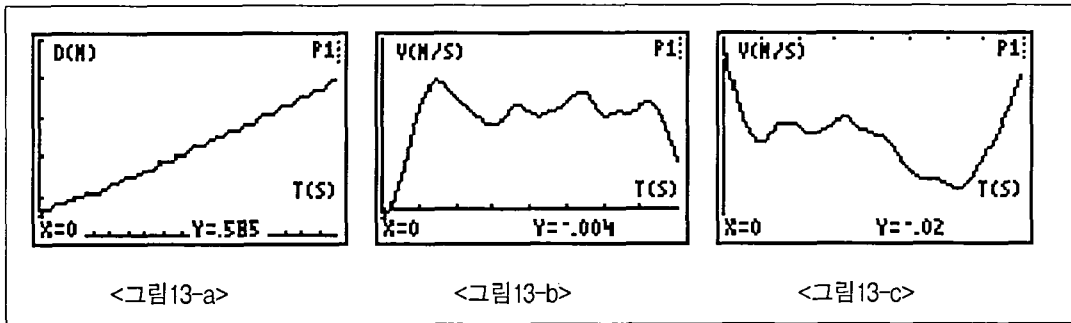
직선 그래프만을 학습하고 경험한 학생들은 속도 변화가 있을 때 곡선이 된다는 생각을 하지 못하고 증가 감소만을 생각하다가 곡선 그래프를 경험하고 나서는 자신들의 생각의 폭을 점차적으로 넓혀 나가는 모습을 나타내고 있다.

[연구문제 3] CBL을 활용하면서 학생들이 함수 개념을 형성하고 이를 그래프로 나타내는데 어떠한 인지적 장애가 발생하는가?

본 실험에서 학생들은 처음으로 CBL을 수학 수업 시간에 사용하면서 매우 흥미로워 하였고 주어진 활동에 대해서 겁을 내기보다는 도전하려는 경향을 보였다. 또한, 수학과 실생활을 연관시키지 못한 채 수학이 비실용적인 학문이라는 생각에서 벗어날 수 있었으며 즉각적인 피드백을 통해 학생들은 자신들의 활동을 곧바로 확인하여 수정해 나가면서 스스로 수학적 개념을 발견하고 이해하며 탐구할 수 있었다.

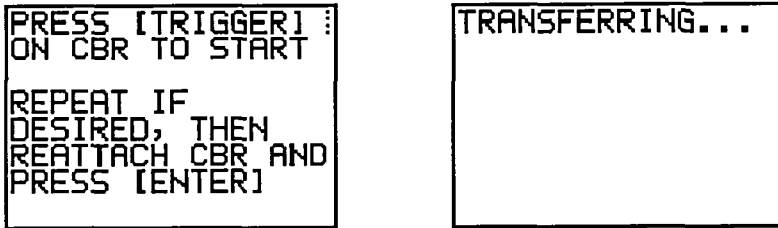
그러나 CBL과 CBR이 갖고 있는 몇 가지 기능들은 학생들이 실생활의 자료를 통해 이들을 수학화 하고 수학적 개념을 학습하는데 있어서 오히려 학생들에게 장애를 발생시키기도 하였다.

우선 이것은 학생들의 움직임이나 실생활의 자료를 수집할 때 다소 불규칙적이며 매우 세밀하게 그래프로 표현하는 경향을 가지고 있다. 또한 그래픽 계산기 화면의 픽셀의 조건 때문에 <그림13-a>과 같이 약간씩 구불거리는 그래프를 보고 학생들은 그 그림 모양 그대로 학습하는 모습을 보이기도 하였다. 특히 시간에 대한 속도 그래프는 속도 제어를 정확하게 할 수가 없기 때문에 속도를 아무리 조절하여도 예상한 그래프를 확인하기가 좀처럼 쉽지 않았다. 이러한 이유에서 학생들이 거리 개념을 확립할 때 보다 속도 개념을 확립하고 이해할 때 좀 더 많이 시간이 소요되었다. <그림13-b>와 <그림13-c>는 일정한 속도로 움직이는 것이지만 약간씩의 속도변화가 정밀하게 그래프로 표현되어 학생들이 혼돈을 일으키는 부분도 있었다. 그러므로 학생들은 이러한 자료에서 종속 관계 등의 자료의 특징을 찾기 위해 학생 스스로가 자료에서 비본질적인 부분을 제거하고 비형식적인 수식을 이용하면서 함수 관계를 조직해 나가야 한다. 하지만 이러한 능력을 가지지 못한 학생들에게 이 과정은 오히려 학생들이 수학 개념을 학습하는데 많은 시간을 요구하게 되며 오히려 학생들의 흥미를 저해하는 요인으로 작용하고 있다.



<그림 13> 움직임을 세밀하게 나타내는 그래프

또한, CBR에서 자료들을 실시간으로 측정할 것인지에 대한 실험의 환경을 조정할 때 「Yes」와 「No」의 두 가지 선택이 있다. 「Yes」의 경우 움직임과 동시에 움직인 그래프가 그래픽 계산기에 그려져서 학생들이 즉각적으로 확인할 수 있다. 그러나 이 경우에는 시간을 15초로만 할 수밖에 없기 때문에 속도 개념의 학습과 같이 짧은 시간 동안에 자료를 수집해야 하는 경우 15초가 너무 긴 경향이 있다. 「No」의 경우에는 시간을 실험자의 상황에 맞게 조정할 수가 있으나 움직임과 동시에 그래프를 볼 수 있는 것이 아니라 <그림 14>와 같이 자료 수집이 끝난 후에 그래프가 나와서 학생들은 자신의 움직임과 그래프를 바로 비교해 볼 수가 없다.



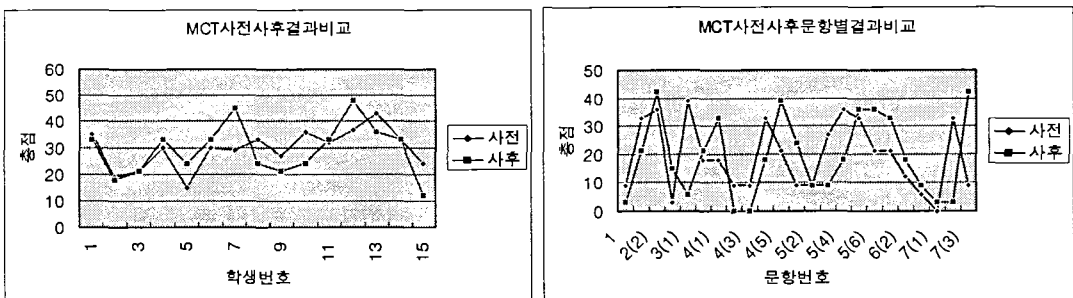
<그림14>실시간이 아닐 때의 자료 수집 시 나오는 화면

Brasell(1987)의 연구 학생들에게 자료를 표현하는 그래프가 제시되는 시간에 차이를 두어 이에 따른 그래프와 실생활의 상황을 연결하는 학생들의 능력을 비교 분석하였는데 실시간(real-time)보다 12초 후에 그래프로 표현되는 기능(delayed)을 사용하였을 때 학생들의 능력의 향상의 정도는 낮아지는 것을 발견하였다. 그러므로 학생들이 실시간 테크놀로지를 좀 더 효과적으로 수업에 활용하기 위해서는 이러한 장애 요인에 영향을 좀 더 적게 받기 위한 수업 형태나 수업 도구에 대한 연구가 요구되고 있다.

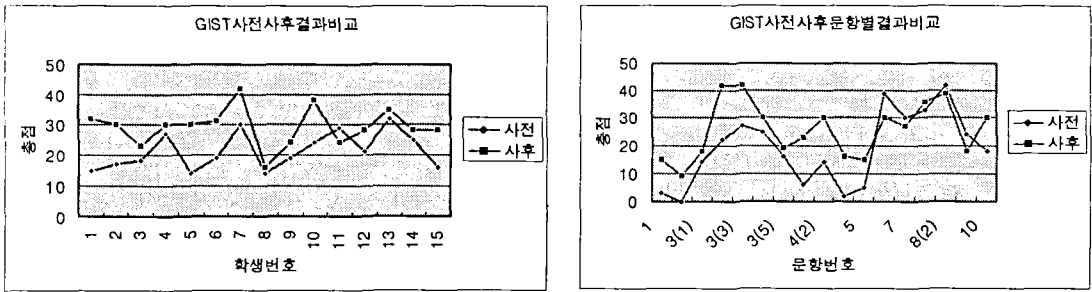
(2) 사전·사후검사지 결과 분석

본 연구에서는 실험 전과 후에 일반적임 함수·그래프 개념에 관한 검사지인 GIST와 거리와 속도 개념에 대한 검사지인 MCT를 동형 검사지로 학생들에게 실시하였다.

다음은 각 문항별 점수비교와 각 학생들의 사전·사후검사의 총점을 그래프로 나타낸 것이다.



<그림 15> MCT 사전사후 결과 비교



<그림 16> GIST 사전사후 결과 비교

MCT 검사와 GIST 검사 모두에서 대부분의 학생들의 사후 검사의 점수가 높게 나타났으며 특히, GIST 검사에서는 MCT 검사 보다 많은 학생들이 향상을 보이고 있었다. 이것은 CBL을 활용한 활동 중심의 수업 방법이 일반적인 함수 개념을 확립하는데 학생들에게 많은 도움을 주고 있다는 것을 간접적으로 표현해 주고 있는 것이다.

또 각각의 문항의 점수들의 비교해 보면 GIST 검사에서는 그래프를 보고 그 그래프로 표현되어 지는 실생활의 상황을 이해하는 3(2), 3(3)번 문항과 거리 그래프와 속도 그래프를 연결하여 이해하는 4(1)번 문항에서 특히 사후 검사 점수가 사전 검사 점수 보다 많은 향상을 나타냈다. MCT 검사에서는 복잡한 모양의 거리 그래프를 보고 어떤 상황이 일어나고 있는지를 학생들에게 상상해 보는 6(1), 6(2) 문항에서 사후 검사의 점수가 많이 향상되었다. 이러한 결과는 학생들이 CBL을 통한 실험을 통해 그래프와 실생활의 상황을 연결하고 여러 변수와의 관계를 좀 더 효과적으로 이해하고 있음을 나타내고 있다.

VI. 결론

본 연구에서는 CBL을 활용한 활동 중심의 실험 학습이 학생들에게 함수 개념과 그래프 개념을 이해하고 확립하는데 어떠한 도움을 주고 있으며, 학생들이 가지고 있었던 잘못된 수학적 개념들도 이 실험 학습을 통하여 어떻게 수정해 나가는지를 관찰하여 살펴보았다.

CBL은 학생들이 다양한 현실 세계의 자료를 쉽게 수집할 수 있도록 하며 수집된 자료들로부터 손쉽게 수학적 표상으로 변환하여 확인할 수 있도록 해 준다. 이러한 과정들은 학생들이 일반적인 함수 개념, 실제 현상의 수학적 과정, 변수들 사이의 특징, 함수의 연산 개념, 그래프로 표현하고 유용한 정보 찾기, 변수와 그래프와의 관계 등을 이해하는데 보다 쉽게 경험적으로 접근할 수 있는 기회를 제공해 준다. 또한 학생들은 다양한 실세계에서 자신들의 직접 실험을 통해 경험하면서 자료들을 얻음으로써 수학에 대

한 흥미와 수학의 유용성을 느낄 수 있게 된다.

몸소 체험을 통해 얻어진 자료들은 CBL을 통해 실험과 동시에 수학적 표상인 그래프로 나타내어짐으로써, 학생들은 그래프에 관해 가지고 있던 오개념을 점차 수정해 나갈 수 있게 된다. 실험 초반에도 나타났듯이 학생들은 그래프를 보는데 있어 그래프를 단지 ‘그림’으로 보거나 그래프를 ‘움직인 경로’를 나타낸 것으로 생각하는 경향이 있었다. 그리고 시간에 대한 거리의 그래프로 오인하여 속도와 거리를 혼동하는 경향도 발견되었다. 그러나 학생들은 CBL을 활용한 활동 중심의 수업을 통해 움직임에 대한 즉각적인 피드백을 받을 수 있었고, 이를 그래프적 표상으로 직접적으로 연관지어 이해할 수 있었기 때문에 점차적으로 이러한 오개념에서 벗어나 그래프를 다양한 변수들의 변화 관계를 나타내는 것으로 이해해 나갈 수 있었다.

마지막으로 CBL은 실생활로부터 직접 자료를 수집하면서 학생들은 흥미를 느끼고 수학의 실용성, 유용성을 느끼는 반면 그로 인해 발생하는 인지적 장애도 발견되었다. CBL이 모든 움직임에 민감하게 반응하여 작은 떨림과 같은 사소한 움직임도 감지하기 때문에 그래프를 처음 접하는 학생들은 그래프의 전체적인 개형뿐 아니라 사소한 움직임까지 포함한 화면상에 나타난 그래프를 있는 그대로 받아들이는 경향이 있었다. 따라서, 학생들에게 불규칙적인 자료에서 스스로 적절한 자료를 추출할 수 있는 능력과 이를 수확화 할 수 있는 능력을 요구하게 되었다. 또한, 움직임을 감지하는 시간을 ‘실시간’이 아닌 임의의 시간으로 정했을 때에는 움직이는 동시에 그래프를 볼 수 없기 때문에 움직임과 그래프를 바로 연결시키지 못하는 어려움이 있었다. 자신들의 실제 움직임과 그래프를 표현하는 시간적인 차이가 학생들의 수학 개념의 확립에 많은 영향을 주고 있으므로 이에 대한 적절한 학습 지도가 요구된다.

이상의 연구 결과로부터 앞으로의 수학 학습의 몇 가지 개선 방안을 제안하고자 한다.

CBL을 활용한 활동 중심의 수업에서 사용되고 있는 다양한 실제 현상들은 과학 교과 시간에 주로 활용되는 자료이며 또한 실제 과학 실험실에서는 실험에서 얻어진 자료를 분석하고 그 변수들 사이의 연속적인 관련성을 예측하는데 있어서 수학적 개념들이 매우 효과적으로 활용되고 있다. 그러므로 어떠한 현상에 대해 그들 사이의 특징을 파악하고 이를 수학적 개념으로 연결시키는 수학적 능력과 과학 탐구 능력과의 상관 관계에 대한 연구는 필수적인 것이다.

또, 본 연구에서 CBL의 몇 가지 기능들이 학생들에게 함수 개념을 형성하고 그 그래프를 표현하는데 있어서 방해 요인이 되고 있다는 것을 제시하였다. 하지만 구체적으로 이러한 기능들이 학생들이 수학적 능력을 형성하는데 어느 정도의 영향을 미치는지에 대한 연구는 아주 부족한 실정이다. 그러므로 실시간 테크놀로지의 여러 기능들이 수학적 능력, 수학적 태도 등의 형성에 어떠한 영향을 주고 있는지에 대한 구체적인 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- 교육부 (1999). 중학교 교육 과정 해석(III), 서울: 대한 교과서 주식회사.
- 권오남 · 김래영 · 박지현 · 정호선 (1999). 수학교육에서의 휴대용 테크놀로지의 활용. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 8, 605-622.
- 김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.
- 김래영 (1999). 그래픽 계산기를 활용한 중등 수학과 교육과정의 교수 기초 자료, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위청구논문.
- 신은주 · 송정화 · 권오남 (2000). Drive(TI-92)를 이용한 탐구 지향 수학 수업. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 10, 169-188.
- 우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부
- 정영옥 (1998). Freudenthal의 수학적 학습-지도론 연구, 서울대학교 대학원 박사학위청구논문.
- 최선준 (1999). CBR을 활용한 그래프 능력의 변화 과정에 관한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위청구논문.
- Barclay, W.L. (1985). Graphing misconceptions and possible remedies using microcomputer-based labs. *Proceedings of the National Educational Computer Conference(NECC), Technical Education Research Center(TEEC)(Tech. Rep. 85-5)*. Cambridge, MA: TERC. ERIC.
- Bassok, M. & Holyoak, K. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 15, pp.153-166.
- Brasell, H (1987). The effect of real time laboratory graphing on learning graphic representations of distance and velocity. *Journal of Research in Science Teaching*, 24, pp.385-395.
- Brunenungsen, C & Krawiec, W. (1989). *Exploring physics and Mathematics with the CBL System*. Dallas, Texas: Texas Instruments, Inc.
- Engelbrecht, A. (1997). On Teaching and learning mathematics using technology. *Australian of Mathematics Teachers Annual Conference*. Melbourne, Australia.
- Küchemann, D. E.(1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann(Eds.), *Children's understanding of mathematics*: 11-16, John Murray, pp.102-119.
- Lapp, D.A. & Cyrus, V.F. (2000). Using data-collection devices to enhance students' understanding.

Mathematics Teacher 93(6), pp.504-510.

- Michael, T.S. (1995, April). Effect of microcomputer based laboratory on graphing interpretation skills and understanding of motion. *Paper presented at the annual meeting of the National Association of Research in Science Teaching*, San Francisco, CA.
- Mokros, J.R. & Tinker, R.F. (1987). The impact of microcomputer -based labs on children's ability to interpret graphs. *Journal of Research in Science Teaching* 23, pp.571-579.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston VA: Author
- Pomerantz, H. (1997). The Role of Calculators in Math Education. *The Urban Systemic Initiative/Comprehensive Partnership for Mathematics and Science Achievement Superintendents Forum*.
- Schoenfeld, A.H. (1988). Mathematics, technology, and higher order thinking. In Nickerson, R. S., Zohdhiates, P.P. (Eds.), *Technology in education : looking toward 2020*, pp.67-98, Larhwrence, Erlbaum Associates Publisher.