

컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료 개발 및 활용 방안

임 해 경 (광주교육대학교)

박 은 영 (광주대성초등학교)

고학년으로 갈수록 지필 환경에만 머무르는 현실 속에서 생활 및 예술 작품 등에서 수학적 원리와 개념을 발견하도록 하는 테셀레이션 수업은 학생들의 흥미와 호기심을 유발하고 수학의 아름다움을 느끼게 하는 것 이상으로 기하학적 사고의 기초를 학습하는데 도움을 줄 수 있다. 이에 본 연구는 4학년까지 적용되고 있는 7차 교육과정을 중심으로 새롭게 등장하고 있는 테셀레이션에 대한 이해 및 교수 학습 자료가 체계적으로 정비되어 있지 못한 현실적인 문제의 해결 방안으로서 테셀레이션을 활용한 수학 학습의 내용을 분석하여 교사들에게는 테셀레이션의 이해 및 교수 학습 자료로서, 학생들에게는 수학의 기하적 개념들을 쉽고 재미있게 학습할 수 있는 학습도구로서 활용할 수 있도록 하는 것을 목적으로 테셀레이션을 구현할 수 있는 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 테셀레이션 교수 학습 자료를 개발하였고 이를 위해 다음과 같은 연구 내용을 설정하였다.

가. 테셀레이션의 정의와 예 그리고 종류를 알아보고 테셀레이션 속의 수학적 개념을 활용방법과 함께 제시한다.

나. 제7차 초등 수학 교육과정 중 도형 영역과 규칙성과 함수 영역을 중심으로 테셀레이션을 적용할 수 있는 내용영역을 분석하고 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 자료를 제시한다.

다. 제작된 테셀레이션 교수 학습 자료의 효과적 활용을 위한 활용 방안을 탐색한다.

라. 제작된 테셀레이션 교수 학습 자료의 활용 효과를 알아보기 위해 적용 실험을 하고 이에 대한 학생들의 반응을 분석하여 학습의 효과를 밝힌다.

제작된 테셀레이션 교수 학습 자료의 적용 실험을 위하여 광주대성초등학교 6학년 한 반을 선정하였고 약 4주에 걸쳐 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료를 투입하여 4번의 활동수업을 실시하였다. 수업 후 작성된 학습지와 소감문 및 연구자에 의해 관찰된 수업내용을 바탕으로 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 제7차 초등 수학 교육과정 중 도형 영역과 규칙성과 함수 영역을 중심으로 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 자료를 제시한 결과 지필적 환경에서 제한적이었던 탐구하고 조작해보는 활동을 할 수 있는 역동적인 수학 실험실 환경이 제공됨으로써 도구적 이해가 아닌 관계적 이해를 하는 것을 확인할 수 있었다. 수학적 개념을 암기하는 것에서 벗어나 자연스런 조작을 통해 학생들이 개념을 이해하고 탐구하는 과정 속에서 학생들은 수학을 공부한다기 보다는 수학 속에서 재미있게 놀이한다는 생각을 가지고 수업에 참여하였고 배우는 즐거움을 알고 자신감을 가지며 더 나아가 창의적인 생각을 하도록 하는 기회를 줄 수 있었다.

둘째, 테셀레이션은 우리 생활 속에서 쉽게 발견할 수 있는 것으로 수학이 단순히 책에서만 한정되지 않고 다양한 분야 즉 디자인, 생활 속에서의 벽지문양과 포장지, 예술작품 등에 활용되고 있음을 체험함으로써 수학이 실생활에 광범위하게 활용되고 있음을 알게 하였다. 역으로 생활 속에서의 테셀레이션을

통해 수학적 개념을 찾는 과정을 통해 수학이 아름다우면서도 실용적이라는 생각을 심어줄 수 있었다. 셋째, 테셀레니아, GSP, 캐브리, 거북기하 등 평소 수업에서는 활용도가 적은 컴퓨터 소프트웨어를 활용함으로써 컴퓨터 소프트웨어 자체에서 오는 호기심뿐만이 아니라 직접 조작하여 테셀레이션 작품과 개념을 익히고 새로운 작품과 학습을 해 내는 과정을 통해 자신감과 성취감 등에 있어 큰 변화가 있음을 발견할 수 있었다. 컴퓨터 기능이 미숙한 학생의 경우 처음에는 당황해 하고 어려워하는 부분도 있었으나 조작할 시간적 여유를 주고 교사와 우수한 학생들이 도우미로서 역할을 잘해내어 나중에는 큰 어려움 없이 마칠 수 있었다.

테셀레이션이라는 용어가 아직은 생소한 현장에서 교수 학습 자료가 부족하고 그에 따른 이해도 부족한 현실 속에서 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료가 교수 학습 현장에 투입되어 유용하게 사용될 수 있는지 그 가능성을 조사한 것을 목적으로 한 본 연구의 결과로서 테셀레이션이라는 주제는 도형 영역과 규칙성과 함수 영역에서 평면 도형의 각과 모양 등의 성질을 탐구하게 하고, 대칭 변환의 개념을 효율적으로 학습하게 할 수 있고, 반복되는 모양에서 규칙성을 발견하고 부분과 전체를 파악하여 패턴을 인지할 수 있게 하며 제작하고 분석하는 과정을 통해 여러 가지 수학적 개념과 수학적 창의성, 수학적인 아름다움을 느끼게 할 수 있음을 발견할 수 있었다. 또한 테셀레이션은 수학적 개념은 물론 수학과 미술, 수학과 일상 생활과의 연결성을 논의하고 확인하는 데 흥미로운 주제가 될 수 있다. 초등학교 교육과정에서 새롭게 도입되고 있는 테셀레이션을 활용하여 지도하기 위한 교수 학습 자료로 유용하게 사용될 수 있고 앞으로는 테셀레이션과 관련된 내용이 직접적으로 교육과정 내에서 다루어지고, 또한 테셀레이션을 적용한 수업이 학생들의 기하학적 사고 및 수학적 태도에 미치는 영향과 관련한 연구가 뒤따라야 할 것으로 본다.

I. 서 론

수학의 아름다움 즉 심미적 가치는 수학을 왜 가르쳐야 하는 지에 대한 이유 중의 하나이다. 하지만 현실에서 수학의 아름다움을 느끼기는 쉽지 않다. 교실 현장에서의 수학 활동은 대부분 수와 연산, 측정에 치중되어 있고 그나마 도형부분에서도 저학년에서는 구체적 조작물로 학습하다가도 고학년으로 갈수록 지필 환경 속에 머무르는 것이 현실이기 때문이다. 이러한 수학 학습 환경에서 생활 속에서 수학의 아름다움과 흥미, 또한 다른 교과와의 연계성을 가질 수 있는 실용성을 지닌 주제가 바로 테셀레이션이다. 미국의 경우 1960년대부터 다양한 수준에서 교육과정의 일부분으로 자리잡고 있고, 일본의 수학 교과서에서는 테셀레이션을 통해 평행이동, 회전이동, 반사동의 대칭 변환을 지도하고 있으며, 수학과 교과서에서에서의 테셀레이션 작품과 불가능한 건축물에 대해 소개하고 있다(전영아, 1999).

이렇듯 외국에서 널리 적용되고 있는 테셀레이션이라는 용어는 우리나라 수학 교육과정에서는 소개되지 않고 있다가 제 7차 교육과정에 들어와서 테셀레이션 정의와 관련된 내용이 도입되고 있다. 예를 들어 초등학교 4학년 나 단계 수학 익힘책의 좀 더 알아보기에서 정다각형으로 겹치지 않게 이어 붙였을 때 빈틈이 생기지 않는 다각형을 찾는 과정에서는 여러 다각형들이 빈틈없이 겹치지 않도록 이어 붙이도록 하는 활동을 제시하여 테셀레이션의 개념을 간접적으로 학습할 수 있도록 하였다.

또한 자연 속에서의 테셀레이션 예를 소개하여 수학의 아름다움과 흥미를 느낄 수 있도록 하였다.

하지만 이는 교육과정의 심화활동에서만 다루어지고 있고 교육과정 상에는 아직 테셀레이션과 관련된 생활 속에서의 예와 다양한 테셀레이션이 제시되지 않고 있는데 이는 다양한 문헌 자료 및 구체적 교수 학습 자료가 바탕이 되지 못하고 있는 현실에서 찾아 볼 수 있다. 또한 컴퓨터를 활용하여 자신의 새로운 패턴을 만들고 이 패턴을 수학적으로 설명, 표현, 보고서를 쓰는 등 연계성을 가지고 운영될 수 있는 6학년 교육과정에서는 테셀레이션과 관련된 내용은 찾아 볼 수 없다.

이런 점에서 초등 교수 학습에서 테셀레이션의 직접적인 도입은 교육과정 속의 기하 영역들에 들어있는 여러 주제들에 대한 계속적인 학습 경험을 제공해 주는 훌륭한 수단이 될 수 있다. 또한 학생들의 호기심과 창의성을 유발시키는 우수한 동기 유발 도구로서 새롭고 신선한 방법으로 기하적인 개념들을 복습하고 확장할 기회를 제공해 줄 수 있다. 그리고 수학 학습을 과정 중심의 학습이 될 수 있도록 할 수 있고, 특히 여러 가지 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 테셀레이션을 구현하는 활동은 학생들에게 기하학습의 역동적인 측면을 충분히 경험하게 할 수 있다.

NCTM(1998)은 Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft에서 학교 수학 프로그램을 위한 지침 원리를 기회 균등의 원리, 수학 교육과정의 원리, 교수의 원리, 학습의 원리, 평가의 원리, 공학의 원리로 제시하였다. 이 중 공학의 원리는 수학 교수 프로그램은 모든 학생들의 수학적 이해를 돕기 위해 공학을 사용해야 하며, 점차 증가하고 있는 기술 세계에서 수학을 사용하도록 학생들을 준비시켜야 한다고 하였다. 이는 여태까지 지필적 환경에서는 불가능했던 수학적 아이디어 및 이해를 공학을 이용해 접근할 수 있도록 하여 더 깊은 수학으로 인도함을 의미한다.

이와 같이 더 깊은 수학을 위한 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션의 도입은 비형식적인 수학학습에서 효과적으로 이용될 수 있다. 컴퓨터 소프트웨어는 기하 도형을 시각화하여 제시할 수 있으며, 논리적 추론을 포함한 일반적인 적용을 할 수 있는 상황을 신속하고 정확하게 제공함으로써 바람직한 수업목표를 달성할 수 있다.

테셀레이션을 구현 할 수 있는 컴퓨터 소프트웨어로는 거북 명령 프로그램(거북기하), GSP(Geometer's Sketchpad), 캐브리(Cabri-Geometry II), 테셀레이션을 위한 전용 소프트웨어인 테셀매니아(Tesselmania), 테스(Tess), 기타 컴퓨터 소프트웨어로 그림판, 파워포인트 등이 있다. 거북기하는 유클리드 기하가 위치는 있지만 다른 어떤 성질도 갖고 있지 않고 형식 수학을 시작하지 못한 아동에게 지나치게 어려운 것과는 달리 역동적이며 위치 이외에 방향(거북의 머리)도 가지고 있어 거북이 어떻게 움직이는가에 대한 것을 통해 형식 기하를 배우는 활동 속으로 옮길 수 있게 된다. 탐구형 소프트웨어인 GSP와 캐브리는 실제 우리가 머릿속에서 상상하기 힘든 여러 가지 도형을 애니메이션 및 자취 기능 등을 통해 직접 시각적으로 보여주고 기하의 여러 가지 성질을 발견하는데 아주 좋은 아이디어를 제공해 줄 수 있다. 뿐만 아니라 평행이동, 회전, 대칭이동, 벡터 등을 학생들이 직접 조작하여 역동적으로 실현해 볼 수 있어 작은 수학 실험실로 활용 될 수 있다. 테셀레이션을 위한 전용 소프트웨어인 테셀매니아와 테스는 보다 생동감 있고 아름다운 테셀레이션 디자인을

제공해주고, 그 제작 과정을 시각적으로 재현하여 주며, 종이와 연필 등의 방법보다 시간을 절약하면서도 더 다양하고 창의적인 테셀레이션의 구현을 가능하게 해준다. 그림판, 파워포인트 등은 조작성이 쉽고 시각적으로도 아름다워 간단한 테셀레이션 자료 제작 시에 이용하면 편리하다.

한편, 국내에서 테셀레이션을 활용한 선행연구를 살펴보면 김성만·신국환(2001)은 테셀레이션은 교육과정 속의 기하 영역들에 들어있는 여러 주제들에 대한 지속적인 학습경험을 제공해주는 훌륭한 수단이며 새롭고 신선한 방법으로 기하적 개념들을 복습하고 확장할 기회를 제공해준다고 하였고, 백희수(2001)는 테셀레이션을 수학 영재아를 위한 프로그램의 주제로서 분석하고 영재아를 위한 자료를 제작 소개하였으며 전영아(1999)는 테셀레이션에 대한 체계적인 분석과 이해를 바탕으로 제7차 초등 수학과 교육과정의 '도형'영역과 '규칙성과 함수'영역에 테셀레이션을 활용하여 지도하기 위한 기초자료를 제시하였다.

본 연구의 목적은 생활 속에서 쉽게 발견할 수 있는 테셀레이션을 분석하고 그 속에 들어있는 수학적 개념을 찾아보고 현 교육과정에서 적용할 수 있는 테셀레이션 내용을 '도형'과 '규칙성과 함수'영역을 중심으로 분석하고자 한다. 이를 바탕으로 역동적인 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 자료를 개발하고 그 자료를 활용한 테셀레이션 활동수업을 학생들에게 적용해 봄으로써 초등 기하 및 공간 학습지도에서 테셀레이션이 활발히 도입될 수 있도록 계기를 마련하고자 한다.

II. 테셀레이션 교수 학습 자료의 개발

테셀레이션 속의 수학적 개념을 바탕으로 하여 1학년부터 4학년까지는 7차 교육과정과 교과서를, 5, 6학년의 경우 7차 교육과정과 실험용 교과서를 이용하여 실제 교수 학습현장에서 활용될 수 있는 테셀레이션 교수 학습 자료를 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 제작하였다.

1. 테셀레이션 교수 학습 자료 개발 방향

첫째, 수학적 아이디어는 물론 수학과 미술, 수학과 일상 생활과의 연결성을 학습할 수 있도록 교수 학습 자료의 소재를 자연, 생활, 문화 속의 테셀레이션을 중심으로 제작한다. 예술 작품 속의 테셀레이션과 자연 속의 테셀레이션을 많이 도입하여 소개한다면 수학의 아름다움을 자연스럽게 끌어낼 수 있을 것이다.

둘째, 자료 개발을 위한 내용 선정은 7차 초등학교 수학과 교육과정으로 하고 도형 영역과 규칙성과 함수영역을 중심으로 한다. 도형 영역은 수학 교육의 기본적인 구성 요소이며, 다른 주제를 공부하기 위한 도구로 사용될 수 있고, 모든 수학에서 창의적인 사고를 지원한다. 새롭게 등장한 규칙성과 함수 영역은 수학의 새로운 정의를 담고 있다.

셋째, 자료는 저학년의 경우 구체적 조작물, 점종이 등을 활용하여 자료를 제작, 개발하되 교사 제

사용 자료로 컴퓨터 소프트웨어를 활용하도록 하고 중, 고학년의 경우에는 제시용, 탐구형 자료 및 실제 구현용으로 제작하도록 한다. 이를 위해 자료 활용 도구에 구체적 조작물도 포함하여 소개하였고 4~6학년은 교육과정 중 내용 체계표를 분석한 뒤 테셀레이션을 적용할 수 있는 내용 영역을 재추출하여 그것을 바탕으로 교과서(5, 6학년은 실험용 교과서)에 적용할 수 있는 교수 학습 자료를 제작하였다.

2. 초등 수학 교육과정에서의 테셀레이션 적용 내용 분석

가. 도형 영역에서의 테셀레이션

1) 도형 영역의 내용 체계표

제7차 초등 수학과 교육과정 중 도형 영역에서는 생활 주변의 모양에 관심을 가지게 하고, 관찰을 바탕으로 입체도형, 평면도형 및 공간 감각을 기르는데 중점을 두었다. 테셀레이션은 도형 영역들에 들어있는 여러 주제들에 대한 계속적인 학습 경험을 제공해주는 훌륭한 수단이고 생활 주변에 대한 호기심과 관심을 유발시킬 수 있는 우수한 동기 유발 도구이다. 따라서 7차 초등 수학과 교육과정 속의 도형영역의 내용체계를 분석한 후 도형 영역에서 테셀레이션이 가능한 단원명과 학습내용을 추출하여 자료개발의 방향을 잡고자 한다. 다음 표는 제7차 초등 수학과 교육과정의 도형 영역의 내용 체계표이다.

<표 II-1> 제 7차 교육과정의 도형 영역의 내용 체계표

단계	주제	학습내용	심화과정
1 단계	1-나 • 평면도형 모양 • 공간 감각	• 기본적인 평면도형 만들기 • 여러 가지 모양 꾸미기 • 점판에서 여러 가지 삼각형, 사각형 만들기 • 점판에 제시된 도형을 보고 만들기	
2 단계	2-가 • 공간감각	• 옮기기, 뒤집기, 돌리기 활동	• 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 활동을 통하여 제시된 구체물의 이동 과정 설명하기
3 단계	3-가 • 각과 평면도형 • 공간 감각	• 각, 직각의 이해 • 직각삼각형, 직사각형의 이해 • 옮기기, 뒤집기, 돌리기 활동	• 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 활동을 통하여 무늬 형성 과정 설명하기
	3-나 • 공간 감각	• 컴퍼스 사용하여 여러 모양 그리기 • 거울에 비치는 상 관찰하기	

단계	주제	학습내용	심화과정
4 단계	4-가 •각과 여러 가지 삼각형 •내각의 크기	•이동변삼각형, 정삼각형 •예각, 둔각 •예각삼각형, 둔각삼각형	삼각형의 각과 관련된 여러 가지 문제를 해결하기
	4-나 •여러 가지 사각형 •공간감각	•수직과 평행, 평행선의 성질 •변, 각, 대각선의 성질 •다각형과 정다각형의 이해 •여러 가지 모양 만들기	실생활에서 여러 가지 사각형이 활용된 예를 찾고, 그 이유 알아보기
5 단계	5-나 •합동과 대칭	•합동의 이해 •합동인 도형의 식별 •조건에 맞는 삼각형 그리기 •선대칭, 점대칭 도형의 이해와 그리기	선대칭, 점대칭 도형과 관련된 여러 가지 문제 해결하기

테셀레이션과 관련되어 활용될 수 있는 영역으로 2-가, 3-가/나, 4-가/나, 5-가/나 단계의 학습 내용이 이에 해당한다. 비교적 모든 학년의 단계에서 테셀레이션을 활용하는 학습 활동이 가능하나 6학년 단계에서는 학습내용을 제시할 수가 없었다.

2) 도형 영역의 테셀레이션 교수 학습자료의 특징에 따른 분류표

<표 II-1>에서 추출한 각 학습 내용을 교과서와 익힘책을 토대로 수업에 활용할 수 있는 교수 학습 자료를 소개하고자 한다. 자료번호는 도형영역에서의 일련번호이고, 초등 수학 교육과정 단계, 단원명, 학습주제 및 내용, 교과서 활용 쪽수로 구성, 분류하였다.

<표 II-2> 도형 영역의 테셀레이션 교수 학습자료 분류표

일련번호	자료번호	단계	단원명	주제 및 내용	교과서 활용쪽수
1	도-2-가-①	2-가	3. 도형과 도형 움직이기	구체물의 이동에서 공간 감각 기르기-모양 옮기기	수 40 수익 38
2	도-2-가-②	2-가	3. 도형과 도형 움직이기	구체물의 이동에서 공간 감각 기르기-모양 뒤집기	수 42 수익 38
3	도-2-가-③	2-가	3. 도형과 도형 움직이기	구체물의 이동에서 공간 감각 기르기-모양 돌리기	수 44,48 수익 39,43
4	도-3-가-④	3-가	3. 평면도형	탱그램 소프트웨어 활용하여 직각 삼각형, 직사각형, 정사각형 만들기	수 41

일련 번호	자료번호	단계	단 원 명	주제 및 내용	교과서 활용쪽수
5	도-3-가-⑤	3-가	3. 평면도형	거북 명령 프로그램으로 정사각형 테셀레이션 만들기	수익 42
6	도-3-가-⑥	3-가	5. 도형 움직이기	평면도형 이동에서 공간 감각 기르기-도형 옮기기	수 62-64 수익 61,62
7	도-3-가-⑦	3-가	5. 도형 움직이기	평면도형 이동에서 공간 감각 기르기-도형 뒤집기	수 64,65 수익 63,64
8	도-3-가-⑧	3-가	5. 도형 움직이기	평면도형 이동에서 공간 감각 기르기-도형 돌리기	수 66,67 수익 65,66
9	도-3-가-⑨	3-가	5. 도형 움직이기	구체물의 이동에서 공간 감각 기르기- 옮기기, 뒤집기, 돌리기	수 69,70 수익67-70
10	도-3-나-⑩	3-나	3. 도형	거울을 통한 공간 감각 기르기- 거울에 비친 모양 알아보기	수 38-41 수익38-41
11	도-4-가-⑪	4-가	3. 각도	삼각형, 사각형에서 내각의 크기-삼각형, 사각형의 내각의 크기의 합 알아보기	수 42-44 수익44-50
12	도-4-가-⑫	4-가	4. 삼각형	삼각형에서 내각의 크기-정삼각형 그리기	수 51,57 수익 56
13	도-5-나-⑬	5-나	3. 도형의 합동	주변에서 합동인 도형 찾기	수 34 수익 37,54
14	도-5-나-⑭	5-나	3. 도형의 합동	주변에서 합동인 도형 찾기	수 34 수익 37,54
15	도-5-나-⑮	5-나	5. 도형의 대칭	선대칭도형 그리기	수 70,71 수익 79-81
16	도-5-나-⑯	5-나	5. 도형의 대칭	선대칭 위치에 있는 도형 그리기	수 72,-75 수익 82-85
17	도-5-나-⑰	5-나	5. 도형의 대칭	점대칭도형 그리기	수 76-81 수익 88-91
18	도-5-나-⑱	5-나	5. 도형의 대칭	점대칭 위치에 있는 도형 그리기	수 82-85 수익 92-94

나. 규칙성과 함수 영역에서의 테셀레이션

규칙성은 아동이 수학의 많은 아이디어들을 연결하는 데 도움을 주며 수학을 다양하게 사용할 수 있는 방법을 제공한다. 제7차 초등 수학과 교육과정에 새롭게 대두된 규칙성과 함수 영역에서는 규칙 찾기 활동이 강조되어 여러 가지 생활 장면에서 규칙을 찾을 수 있고, 이를 문제 해결에 적용할

수 있도록 하는데 중점을 두었다. 이러한 규칙성 속에 숨어있는 패턴을 찾아 테셀레이션에 적용하기 위해 도형 영역과 같이 7차 초등 수학과 교육과정 속의 규칙성과 함수 영역의 내용체계를 분석한 후 규칙성과 함수 영역에서 테셀레이션을 활용 가능한 단원명과 학습내용을 추출하여 자료개발의 방향을 잡고자 한다.

1) 규칙성과 함수 영역의 내용 체계표

<표 II-3> 제 7차 교육과정의 규칙성과 함수 영역의 내용 체계표

단계	주제	학습내용	심화과정	
1단계	1-가	규칙 찾기	• 생활 주변의 여러 가지 물체나 무늬 등의 규칙적인 배열에서 규칙 찾기	여러 가지 무늬에서 규칙 찾아 설명하기
	1-나	규칙 찾기	• 사물이나 무늬 등의 규칙적인 배열에서 규칙을 찾고, 자신이 정한 규칙에 따라 다시 배열하기	규칙적인 배열에서 규칙을 찾고, 그 배열을 여러 가지 방법으로 나타내기
2단계	2-가	규칙 찾기	• 물체나 무늬의 다양한 변화 규칙을 찾아 설명하기	
3단계	3-나	규칙찾기	• 스스로 규칙을 정하여 한 가지 도형으로 여러 가지 무늬 꾸미기	2가지 종류의 도형으로 여러 가지 무늬 꾸미기
5단계	5-가	규칙적인 무늬 만들기	• 한 가지 무늬를 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 방법을 이용하여 새로운 무늬 만들기	2가지 종류의 무늬를 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 방법을 이용하여 새로운 무늬 만들기

규칙성과 함수 영역에서 테셀레이션을 활용할 수 있는 내용은 1-가/나, 2-가, 3-나, 5-가 단계의 학습 내용이 이에 해당한다. 1-가/나, 2-가 단계는 규칙 찾기를 중심 활동으로 하는데 이러한 학습은 주어진 규칙성을 추상화하고 일반화하여 수학적으로 나타내는 능력의 기초가 되고, 스스로 규칙을 정하여 더 복잡한 규칙성을 갖는 배열이나 무늬를 만드는 활동의 바탕이 된다. 3-나, 5-가 단계는 규칙에 따라 나타내기를 중심 활동으로 하는 단계이다. 이러한 활동은 수학의 본질이 규칙성에 있음을 체득하게 하고, 수학의 아름다움이 규칙성에 내재함을 알게 해 주며, 자연 속에 존재하는 규칙성을 수학적으로 관찰하며 물리적 세계에서 관찰한 것을 수학적으로 추상화하고 모델링하는 능력의 기초가 된다.

2) 규칙성과 함수 영역의 테셀레이션 교수 학습자료 분류표

<표 II-3>에서 추출한 각 학습 내용을 교과서와 익힘책을 토대로 수업에 활용할 수 있는 교수

학습 자료를 제작하였다. 자료번호는 규칙성과 함수 영역에서의 일련번호이고, 초등 수학 교육과정 단계, 단원명, 학습주제 및 내용, 교과서 활용 쪽수로 구성, 분류하였다.

<표 11-4> 규칙성과 함수 영역의 테셀레이션 교수 학습 자료 분류표

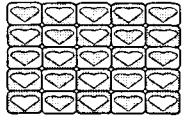


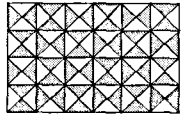

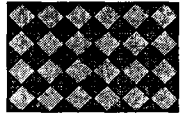
일련 번호	자료번호	단계	단 원 명	주제 및 내용	교과서 활용쪽수
1	규-1-가-①	1-가	3. 여러 가지 모양	규칙적인 무늬 만들기	수 41
2	규-1-나-②	1-나	2. 여러 가지 모양	규칙에 맞게 색칠하기	수 28,31 수익 23,24
3	규-2-가-③	2-가	3. 도형과 도형 움직이기	다양한 변화의 규칙 찾기	수 45
4	규-3-나-④	3-나	3. 도형	규칙에 따라 무늬 꾸미기	수 42,43,48 수익 42
5	규-5-가-⑤	5-가	2. 무늬만들기	규칙에 따라 무늬 만들기-움 기기 방법을 이용하여 무늬 만들기	수20-23,31,32 수익 21-24, 29,31,33,34
6	규-5-가-⑥	5-가	2. 무늬만들기	규칙에 따라 무늬 만들기-뒤 집기 방법을 이용하여 무늬 만들기	수20-23,31,32 수익 21-24, 29,31,33,34
7	규-5-가-⑦	5-가	2. 무늬만들기	규칙에 따라 무늬 만들기-돌 리기 방법을 이용하여 무늬 만들기	수20-23,31,32 수익 21-24, 29,31,33,34
8	규-5-가-⑧	5-가	2. 무늬만들기	한 가지, 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기	수 24-28,30 수익25-28,30


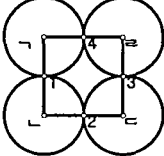




III. 테셀레이션 교수 학습 자료

테셀레이션을 활용한 수학학습은 스스로 테셀레이션을 제작하고 구현하도록 이끌어 도형에 대한 학습과 대칭을 분석하고 규칙성을 인지하고 변화시킬 수 있도록 하여 수학적 사고와 창의성을 신장시킬 수 있도록 한다. 컴퓨터 소프트웨어를 중심으로 개발 제작하되 구체적 조작물이 더 효과적인 부분에서는 함께 제시하였고 유용한 인터넷 사이트 및 간편하게 활용할 수 있는 소프트웨어도 소개하였다. 패턴 블록 및 탱그램은 직접 만들거나 구체적 조작물로 해보는 것이 가장 적절하나 여러 모양을 구현하기 위해서 제작과정이 번거롭고 시간이 많이 걸리므로 컴퓨터 소프트웨어를 활용하는 방향도 제시하였다.

1. 컴퓨터소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료

구체적 조작물을 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료도 매우 효과적이지만 모양을 선택하고 완성 하는데 있어서는 많은 제한이 있다. 이런 경우에 컴퓨터를 활용하면 학생들에게 문제 해결의 단계를 효과적으로 연결시켜준다. 본 장에서는 내용 분류표에 따라 학습내용에 맞는 컴퓨터 소프트웨어를 선정하여 자료를 제작하였다.

자료번호	규-5-가-⑤	활용도구	GSP, Powerpoint	적용단계	5-가
학습주제	규칙에 따라 무늬 만들기			적용단원	2. 무늬 만들기
학습목표	<ul style="list-style-type: none"> • 옮기기 방법을 이용하여 규칙에 따라 무늬를 만들 수 있다. 				
학습활동	<p>① 타일을 제시한 후 어떤 규칙으로 구성되어 있는지 찾도록 한다. 오른쪽 그림은 파워포인트로 제작한 것으로 파워포인트 매뉴 하단의 도형-기본도형을 클릭하면 하트 모양과 끝이 둥그런 사각형 모양이 있다. 두 개의 모양을 포개어 놓은 후 색깔을 바르게 지정해주고 전체 선택하여 복사하기-붙이기를 하면 쉽게 제작할 수 있다.</p>  <p>②  과  을 기본으로 GSP로 제작하기 위해서 직사각형을 작도한 후 대각선을 작도-선분을 통해 만든다. 삼각형 부분의 각 꼭지점을 차례로 선택한 후 작도-다각형 내부를 클릭하고 보기-색 중 원하는 색을 눌러 채운 후 두 가지 무늬를 완성한다. 두 가지 무늬를 위, 아래로 배열 후 양 끝 꼭지점으로 백터지정한 후 전체 무늬 선택하여 평행이동 시킨다.</p>  <p>③ 같은 모양을 종이에 여러 장 그린 후 오려 붙이는 것보다 파워포인트로 기본모양()을 제작하여 복사하기-붙이기를 하면 수업의 효율성을 높일 수 있다. 또한 GSP의 백터 지정, 평행이동을 이용하면 파워포인트와 함께 쉽게 제작이 가능하다.</p> 				

<p>학습활동</p>	<p>④  은 GSP로 만드는 것이 수월하다. 정사각형을 작도한 후 각 변을 선택하고 작도-중점을 클릭한다. 꼭지점 1과 1을 차례로 선택한 후 메뉴의 작도-중심과 한 점이 주어진 원을 클릭하면 원이 완성된다. 같은 방법으로 꼭지점 2, 3, 4를 중심으로 하는 원을 만든다.</p> <p>⑤ 부채꼴 모양만 남기기 위해 중점 1, 원, 중점4를 차례로 선택한 후 작도-원주 위의 호를 클릭한다. 이때 반시계 방향으로 차례로 선택해야 원하는 호가 선택된다. 같은 방법으로 4개의 원주 위의 호를 만든다. 전체를 선택한 후 보기-이름표 숨기기로 이름표를 숨긴 후 원을 차례로 선택한 후 보기-숨기기-원을 클릭하여 정사각형만 남긴다.</p> <p>⑥ 부채꼴의 호를 차례로 선택한 후 작도-부채꼴 내부를 선택하면 부채꼴 부분만 색이 칠해진다.</p> <p>⑦ 정사각형의 꼭지점을 차례로 선택한 후 작도-다각형 내부를 클릭한 후 원하는 색으로 다시 변경한다.</p> <p>⑧ 점 1에서 점 2으로 벡터를 지정한 후 지정된 벡터로 평행이동을 시켜나가면 옮겨가며 이어 붙이는 효과를 낼 수 있다. 테셀레이션된 자료를 미리 보여주어 기본 도형과 규칙을 찾게 한 후 만들어 보는 활동으로 재구성할 수 있다.</p>	    
-------------	--	---

IV. 테셀레이션 교수 학습자료의 활용 방안 및 적용 분석

본 연구에서 개발한 자료는 제7차 초등 수학과 교육과정에 맞추어 현장에서 테셀레이션을 도입, 활용하기 위한 예시적 자료로 개발되었다. 따라서 현장에서 교사들이 자료를 효과적으로 활용할 수 있도록 실제적인 도움을 주기 위한 활용 방안을 도형 영역과 규칙성과 함수 영역에서 살펴보았다.

1. 테셀레이션 교수 학습 자료의 활용 방안

도형 영역에서 테셀레이션 교수 학습 자료를 효과적으로 활용하는 방안을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 흥미를 가질 수 있도록 교과서를 중심으로 시각화를 위한 교수 제시용 자료로 사용한다. 수학의 다양한 분야를 접할 수 있는 기회를 제공하도록 하기 위해 여러 가지 소프트웨어로 구현한 자료를 제시하여 쉽게 딱딱해 질 수 있는 수업 분위기를 효과적으로 전환시킬 수 있다. 또한 생활주변의 모습 및 예술 작품 속의 수학을 테셀레이션 자료를 제시하여 수학이 생활 속에서 실제로 응용, 적용되고 있음을 학생 스스로 발견하도록 하여 탐구학습의 좋은 소재로 활용할 수도 있다.

둘째, 실제로 조작하여 수업을 진행해 보는 활동 자료로 활용한다. 수학 및 수학 익힘책에 도입되고 있는 컴퓨터 소프트웨어인 거북기하의 경우 교사 제시용 자료로 그치지 않고 실제 조작하는 활동

을 통해 기하적인 감각을 신장시킬 수 있다. 따라서 테셀레이션을 구현할 수 있는 컴퓨터 소프트웨어를 통해 패턴 및 규칙을 스스로 만들어보고 또한 새로운 패턴을 창조해내는 과정을 통해 수학의 아름다움과 창의성을 신장시킬 수 있다.

셋째, 스스로 조작해 보는 활동을 통하여 수학적 개념을 깨달을 수 있도록 탐구 활동 자료로 활용한다. 탐구형 소프트웨어로 널리 쓰이고 있는 GSP 및 Cabri 등을 통해 테셀레이션 및 그 속의 수학적 개념을 탐구함으로써 능동적인 참여를 기대할 수 있고 예측하지 못한 새로운 사실을 발견할 수 있는 실험실을 제공할 수 있다.

2. 적용 사례 및 분석

본 연구에서 개발한 자료를 수업에 적용하고 그 효과를 점검해보기 위하여 도형 영역 및 규칙성과 함수 영역 중 4개의 자료를 선정하여 이것을 6학년 한 학급에 적용하였다. 각 학년에 맞도록 적용하지 않고 6학년에 적용한 이유는 7차 교육과정을 접하지 못한 현 6학년의 경우 테셀레이션이라는 주제가 처음이고 적용한 학급의 경우 3월 초부터 꾸준히 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 바 6학년을 적용해도 무리가 없다고 판단, 그 효과를 충분히 검증할 수는 없지만 이 연구로부터 얻을 수 있는 결론은 후속 연구에 가치 있는 기초 자료가 될 수 있을 것이다.

가. 적용한 테셀레이션 교수 학습 자료

- 1) 한 가지, 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기(규-5-가-⑧)
- 2) 규칙에 따라 무늬 만들기 - 옮기기, 뒤집기, 돌리기 방법을 이용하여 무늬만들기 (규-5-가-⑤, ⑥, ⑦)
- 3) 평면도형 이동에서 공간 감각 기르기(도-3-가-⑥)
- 4) 선대칭 도형 그리기(도-5-나-⑮)

나. 적용대상

적용대상은 광주광역시 광주대성초등학교 6학년 6반으로 학급 인원이 34명이다. 이들을 대상으로 하여 2001년 9월 3일부터 10월 10일 까지 매주 목요일 특별활동 시간 및 수학시간을 활용하여 4주 동안 수업에 적용하였다. 광주대성초등학교의 학군은 시내 인접한 학교로 대부분 중·저소득층이 많고 학기초에는 단순 암기 위주의 수학문제 해결로 스스로 학습에 대한 관심과 성취도가 낮았으나 꾸준한 수학프로그램에 대한 소개 및 '학급목표를 '즐거움 수학교실을 위하여' 라고 정해 수학을 생활속에서 느끼도록 분위기를 조성하여 지속적인 지도를 해온바 학생들의 수학에 대한 흥미도 및 수업 성취도 부분은 동학년 반에 비해 높은 편이다.

다. 적용방법

적용한 교수 학습 자료를 위주로 교수 학습활동 과정안을 작성한 후 이를 바탕으로 4시간에 걸쳐 수업을 실시하였고 교수 학습활동에 직접 이용할 수 있도록 수업 안내 및 활동지를 제작하였다. 특히 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습에 중점을 두어 교수 학습 활동을 진행하였다.

1) 도형 영역에서의 교수 학습 활동 과정안 예시

가) 단 원 명 : 5. 도형의 대칭(실험용5-나-5)

나) 자료번호 : 도-5-나-⑮, 도-3-가-⑥

다) 단 계 : 실험용 5학년 나 단계

라) 학습주제 : 여러 가지 모양의 선대칭 도형 그리기

마) 학습목표 : 여러 가지 작품을 보고 선대칭 도형을 찾은 후 선대칭 도형에서 대칭축을 찾을 수 있고 선대칭 도형의 성질을 알며 그릴 수 있다.

(1) 반사를 이용한 여러 가지 테셀레이션 작품에서 선대칭 도형을 찾을 수 있고 왜 선대칭 도형인지 설명할 수 있다.

(2) 여러 가지 선대칭 도형을 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 만들어 보고 이를 테셀레이션 시킨 후 서로 바꾸어 선대칭 도형을 찾을 수 있다.

(3) 선대칭 도형에서 대칭축을 찾을 수 있다.

(4) 선대칭 도형에서 대응점, 대응변, 대응각을 찾을 수 있다.

(5) 대응점을 이은 선분은 대칭축에 의하여 직각이 되고, 길이가 같은 것을 알고, 선대칭 도형이 되도록 그릴 수 있다.

바) 선수학습 : 3-가 단계에서 평면도형에서 공간 감각 기르기, 3-나 단계의 거울을 통한 감각 기르기 및 4-가, 4-나 단계에서의 삼각형, 여러 가지 사각형 수직과 평행, 다각형과 정다각형을 공부한 것을 종합적으로 이용하여 도형의 특징을 찾아 선대칭 도형을 이해할 수 있도록 한다. 이를 위해 전 단계에서 GSP, 캐브리, 테셀매니아를 다루었고 이를 활용한 여러 가지 교수 학습을 한 상태로 컴퓨터 소프트웨어에 대한 조작 및 인지가 충분히 이루어 졌다는 것을 전제로 한다.

사) 활용한 컴퓨터 소프트웨어 : GSP, 테셀매니아

아) 자료의 제시방법 : 여러 가지 테셀레이션된 도형의 모양을 사용하여 선대칭 도형 및 대칭축을 찾도록 하기 위해 테셀매니아로 제작한 자료를 동기유발에 투입하고, 전개부분에서 다시 좀 더 다양한 선대칭도형 자료를 제시하여 선대칭 도형의 개념을 충분히 익힐 수 있도록 한다. 또한 전개부분에서 대응점, 대응변, 대응각을 GSP 교사용 자료를 통해 찾아보고 직접 GSP를 조작하여 선대칭 도형을 그리는 방법 및 선대칭 도형을 직접 그려볼 수 있도록 한다. 더 나아가 이를 테셀레이션 시켜 스스로 제작한 자료를 화면에 비추어 다른 학생에게 선대칭 도형을 찾고 대칭축을 찾도록 문제

를 제작할 수 있도록 한다.

자) 지도상의 유의점

(1) 선대칭 도형을 위해 반사 및 회전이동이 사용된 테셀레이션 작품을 제시하고 반사 및 회전이 동이라는 말 대신 전 단계에서 숙지한 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 용어로 쉽게 풀이하여 설명한다.

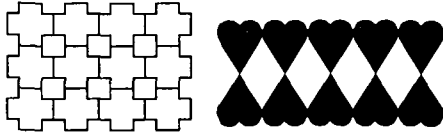
(2) 테셀레이션이라는 용어를 도입해도 좋겠지만 선대칭 도형의 개념을 이해하는 단계이므로 되도록 전 단계에서 사용한 벽지 무늬 또는 무늬 꾸미기라는 용어로 대신 사용한다. 이는 생활 주변에서 테셀레이션을 경험할 수 있는 친숙한 예가 되고 보다 쉽게 테셀레이션이라는 개념을 이해할 수 있도록 하기 위해서이다.


(3) <익히기> 문제에서 대칭축이 두 개인 도형이 있을 경우 한 개의 대칭축만 찾을 경우 간접적인 발문("선대칭도형은 대칭축이 반드시 하나만 있을까?")등을 통하여 가능한 모든 학생이 올바르게 문제를 해결할 수 있게 하는 것이 바람직하다.

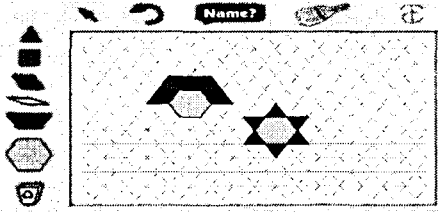
차) 평가목표

(1) 선대칭 도형을 찾고 선대칭 도형에서 대칭축을 찾을 수 있다.

(2) 선대칭 도형에서 대응점, 대응변, 대응각을 찾고 선대칭 도형을 그리거나 만들 수 있다.

일시	2001. 10. 11.	대상	제 6학년 5반	수업자	박은영
단원	5. 도형의 대칭	차시	1/6	제작	여러 가지 모양의 선대칭도형 만들기
학습 목표	• 여러 가지 작품을 보고 선대칭 도형을 찾은 후 선대칭 도형에서 대칭축을 찾을 수 있다.	학습 자료	교사	W (GSP, 파워포인트, 패턴블록 자바 프로그램) <input type="checkbox"/> (색종이)	
			학생	A (패턴블록자바프로그램) <input type="checkbox"/> (색종이, 가위, 학습지)	
과정	학습의 요소	교수·학습활동			자료 및 유의점
문제 파악 (4)	◎동기유발	◎동기유발 ◆ (규-5-가-⑤를 제시하며) 다음 무늬의 공통점은 무엇인가요?  • 같은 모양이 반복되어 나타납니다. • 접으면 완전히 포개어 겹쳐집니다. • 대칭이 됩니다.			W 파워포인트, GSP ※수용적 분위기에서 다양한 대답이 나오도록 유도한다

과정	학습의 요소	교수 · 학습활동	자료 및 유의점
문제 탐색 (12')	<p>◎ 학습 문제 제시</p>	<p>◎ 학습문제제시</p> <p>◆ 이렇게 접어서 완전히 포개지는 도형을 찾아보고 직접 겹쳐지는 도형을 만들어 보도록 합시다.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p>■ 학습 문제 ■</p> <p>접어서 완전히 겹쳐지는 도형을 찾고 직접 만들어 봅시다.</p> </div>	
문제 탐색 (12')	<p>◎ 완전히 포개지도록 접어보기</p> <p>◎ 선대칭 도형의 뜻을 읽고 대칭축 찾기</p>	<p>◎ 완전히 포개지도록 접어보기</p> <p>◆ 위의 하트 모양 무늬를 만들기 하트를 똑같이 그리면 좋을텐데 쉽지가 않죠? 어떻게 하면 가장 간편하게 만들 수 있을까요?</p> <ul style="list-style-type: none"> • 색종이에 하트모양을 그린 후 오린 다음 다시 새 색종이에 놓고 선을 그어 오리는 방법을 반복합니다. • 접으면 시간을 더욱 줄일 수 있습니다. <p>◆ 접으면 훨씬 빨리 만들 수 있겠군요. 그러면 직접 만들어 보고 접어서 다른 모양도 만들어 보세요.</p> <p>◆ 창의적으로 아주 잘 만들었어요. 완전히 겹쳐지도록 접었을 때 접은 선을 자를 사용하여 그어 보세요.</p> <ul style="list-style-type: none"> • 각자 만든 모양을 접어서 접은 선을 긋는다 <p>◆ 이렇게 접은 선을 중심으로 완전히 겹쳐지는 도형을 선대칭 도형이라고 하고 접은 선, 즉 그 직선을 대칭축이라고 합니다.</p> <p>◆ 주변에서 이렇게 선대칭 되는 도형을 찾아 볼까요?</p> <ul style="list-style-type: none"> • 네잎 클로버, 하트, 책, 공, 색종이, 액자 등 <p>◆ 그런데 이 사각형 선대칭 도형을 볼까요? 과연 대칭축이 몇 개입니까?</p> <ul style="list-style-type: none"> • 저는 접은 선, 대칭축이 2개 입니다. <p>◆ 대칭축은 꼭 한 개만 있는게 아니지요? 그럼 별 모양을 오린 후 접어보세요. 대칭축이 모두 몇 개입니까?</p> <ul style="list-style-type: none"> • 5개입니다. <p>◆ 그러면 여러 가지 모양을 가지고 대칭축이 한 개인 도형을 만들어 볼까요?</p>	<p> 색종이(기본무늬 8개), 가위, 자</p> <p>※ 완전히 겹쳐지도록 정확히 자르도록 주지시킨다.</p>

과정	학습의 요 소	교수·학습활동	자료 및 유의점
문제 해결 (20')	◎ 패턴블록 자바프로그 램을 이용하 여 대칭축을 갖는 도형 만들기	<p>(패턴 블록 자바프로그램에 접속한다.) 다음 도형을 보고 대칭축이 몇 개인지 찾아봅시다.</p>  <ul style="list-style-type: none"> • 오른쪽그림은 6개, 왼쪽 그림은 1개입니다 	<p>W http://www.best.com/~ejad/java/patterns/patterns_j_shtm</p>
적용 및 발전 (4')	◎ 선 대칭 도 형 구별하고 대칭축 찾기	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 그러면 여러 가지 모양을 가지고 대칭축을 갖는 도형을 만들어보세요. ◆ 친구들의 작품을 보고 선대칭 도형과 선대칭 도형이 아닌 작품을 찾아봅시다. 또한 선대칭 도형의 대칭축을 찾고 몇 개인지 알아봅시다. ◆ 수학 익힘책 76쪽의 도형 중 선대칭 도형인 것을 찾고 대칭축을 그려보세요. 어려운 학생이 있다면 반투명종이로 본을 뜬 후 확인해 보세요. 	<ul style="list-style-type: none"> ※ 메뉴 설명은 선수학습에서 했으므로 바로 진행하도록 한다 ※ 잘된 작품은 디지털 카메라로 찍어 참고자료로 사용한다. ※ 오류를 스스로 발견할 수 있도록 유도한다.
적용 및 발전 (4')	◎ 과 제 제 시 및 차시예고	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 수학익힘책 75쪽을 보며 선대칭도형을 찾아보고 선대칭 도형일 경우 대칭축을 찾아 표시해 보세요. 또한 패턴블록 자바프로그램에 접속해서 대칭축이 1개, 2개, 6개인 도형을 만들어 보고 그 모양을 다음 학습지에 작성해 오세요. ◆ 다음 시간에는 선대칭 도형의 대응점, 대응변, 대응각을 알아보고 그 관계에 대해서 공부하도록 하겠습니다. 그럼 이것으로 수업을 마치겠습니다. 	<p>☐ (반투명종이, 가위, 자)</p>

2) 규칙성과 함수 영역에서의 교수 학습 활동 과정안 예시

가) 단 원 명 : 2. 무늬 만들기(실험용 5-가-2)

나) 자료번호 : 규-5-가-⑤, ⑥, ⑦, ⑧

다) 단 계 : 실험용 5학년 가 단계

라) 학습주제 : 여러 가지 이동을 이용하여 규칙적인 무늬 만들기

마) 학습목표 : 한 가지 무늬를 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 방법을 이용하여 새로운 무늬를 만들 수 있다.

(1) 기본 무늬를 옮기기의 방법을 사용하여 이어 붙이고 규칙을 이용하여 새로운 무늬를 만들 수 있다.

(2) 기본 무늬를 돌리기의 방법을 사용하여 이어 붙이고 규칙을 이용하여 새로운 무늬를 만들 수 있다.

(3) 기본 무늬를 뒤집기의 방법을 사용하여 이어 붙이고 규칙을 이용하여 새로운 무늬를 만들 수 있다.

(4) 벽지 무늬 및 규칙적인 무늬를 보고, 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 방법이 어떻게 사용되었는지 찾을 수 있다.

바) 선수학습 : 2-가 단계에서 구체물이나 그림의 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 활동을 통하여 그 변화를 관찰하는 학습을 하였고 3-가 단계의 평면 도형의 이동에서 공간감각 기르기에서는 평면도형이나 무늬의 옮기기, 뒤집기, 돌리기 활동을 통하여 그 변화를 관찰해보는 학습을 하였다는 것을 전제로 한다.

사) 활용한 컴퓨터 소프트웨어 : 파워포인트, GSP, 테셀매니아,

아) 자료의 제시방법 : 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 자료를 제시할 때 처음부터 도형이 아닌 다양한 모양으로 대칭변환의 방법을 찾을 수도 있지만 간단한 도형의 대칭변환 자료를 먼저 제시하고 발전학습에서 테셀매니아를 이용한 대칭변환 자료를 제시하여 학생들이 직관적으로 관찰할 수 있는 기회를 주고 대칭변환이 도형뿐만이 아닌 생활 속에서 활용되고 있음을 알게 한다. 또한 색종이를 이용한 옮겨서 이어 붙이는 활동을 직접 해보고 다양한 무늬를 만들려고 할 경우 시간이 부족하고 정확히 빈틈을 메꾸기가 어려움을 스스로 깨닫게 하여 컴퓨터 소프트웨어를 활용하는 것이 효과적임을 발견하도록 한다.

자) 지도상의 유의점

(1) GSP를 사용할 경우 평행이동, 회전이동, 선대칭이동과 같은 용어가 나오는데 학생들이 용어상의 어려움으로 학습에 곤란을 겪는 것을 방지하기 위해 옮기기, 돌리기, 뒤집기 등의 용어로 다시 설명해 주어야 한다.



(2) 뒤집기의 이동 방법은 옮기기 방법이 같이 병행되는데 뒤집기의 개념은 2-가 단계의 선수학습에서 반사의 축과 함께 학습한 것을 전제로 한다.



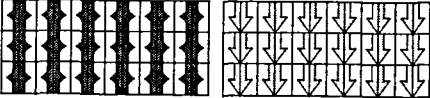
차) 평가목표

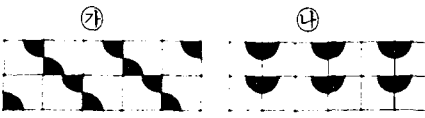
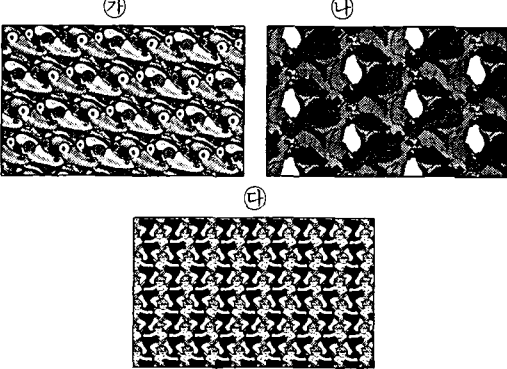

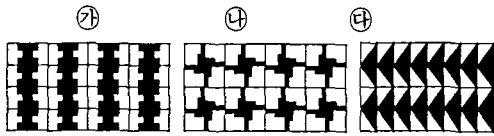
옮기기, 돌리기, 뒤집어 옮기기의 이동 방법을 알고, 옮기기 방법을 이용한 무늬를 찾고 새롭게 만들 수 있다.

타) 평가의 주안점

평면 도형의 변환 후에 어떠한 이동 방법을 사용하였는지 규칙을 찾아봄으로써 대칭 변환을 이해하게 하고 5-나 단계에 나올 선대칭, 점대칭에 대한 학습의 연계가 되도록 한다. 또한 다양한 모양의 무늬 꾸미기를 테셀매니아로 직접 제작하도록 하는 활동의 기초가 되도록 한다.

일시	2001. 09. 20.	대상	제 6학년 5반		수업자	박은영
단원	2. 무늬 만들기		차시	1/6	제재	규칙에 따라 무늬 꾸미기
학습 목표	• 한가지 무늬를 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 방법을 이용하여 새로운 무늬를 만들 수 있다.			학습 자료	교사	(GSP, 테셀매니아, 파워포인트) (색종이)
				학생	(GSP, 테셀매니아) (색종이, 가위, 풀, 학습지)	
과정	학습의 요 소	교수·학습활동				자료 및 유의점
문제 파악 (5')	◎동기유발 ◎ 학습문 제 제시	◎동기유발 ◆ (규-5-가-⑤,⑥,⑦,⑧를 제시하며) 다음 무늬의 공통점과 차이점이 무엇인가요?  • 같은 모양이 반복되어 나타나는 것이 같다. • 빈틈이 없이 붙어있는 것이 같다. • 붙인 방법이 다르다. ◆ 기본 무늬가 무엇인지 판에 그려보세요. • 입니다. ◎학습문제제시 ◆ 오늘 이 시간에는 반복되어 나타나는 무늬를 직접 만들어보고 여러 가지 방법으로 움직여 본 후 새로운 무늬를 만들어 봅시다. ■ 학 습 문 제 ■ 여러 가지 방법을 이용하여 무늬를 만들어 보자				파워포인트, GSP ※수용적 분위기에서 다양한 대답이 나오도록 유도한다 골든벨판, 보드마카, 화장지
문제 탐색 (15')	◎여러 가지 방법찾기 ◎색 종 이 를 이용하여 옮 겨가며 이어 붙이기	◆ (를 제시하며) 어떤 방법으로 무늬를 꾸밀 수 있을까요? 예습적 과제로 내준 색종이를 활용하여 무늬를 만들어 보세요. 어떤 방법들이 사용되었나요? • 옆으로 옮겨서 꾸미는 방법(도형 옮기기) • 뒤집어 옮겨서 꾸미는 방법(도형 뒤집기) • 여러 번 돌려서 꾸미는 방법(도형 돌리기) ◆ 먼저 옮기기의 방법으로 사용한 무늬를 살펴 봅시다. 				색 종 이 (기본 무늬 8개), 풀, 8절지 ※예습적 과제로 색종이를 4등분하여 같은 색깔로 기본 무늬를 미리 만들어 오도록 한다. 다양한 방법으로 무늬를 만들게 한 후 예시자료로 사용한다.

과정	학습의 요 소	교수 · 학습활동	자료 및 유의점
문제 탐색 (15')		<p>◆ 어떤 점을 발견하였나요?</p> <ul style="list-style-type: none"> • 재미있고 예쁩니다. 빈틈이 없습니다. • 시간이 많이 걸리고 정확히 붙이기가 어렵습니다. 	<p>※빈틈없이 변과 변이 만나도록 붙임을 주지시킨다.</p>
문제 해결 (25')	<p>◎컴퓨터를 이용하여 옮겨가며 이어 붙이기</p>	<p>◆ 같은 모양을 컴퓨터 소프트웨어를 이용해서 만들어봅시다. 모두 파워포인트를 열고 기본 모양을 만든 후 복사하기-붙이기를 활용하여 색종이로 만들었던 모양을 만들어 봅시다.</p>  <ul style="list-style-type: none"> • 훨씬 간편하고 조작하기가 쉽습니다. • 정확히 빈틈없이 붙일 수 있습니다. <p>◆ 이번에는 모양을 돌려가며 이어붙이기를 해봅시다. 기본 도형(■)을 만든 후 돌려가며 다음과 같은 무늬를 만들어 보세요. 또한 다른 무늬(◻)로 돌려가며 이어 붙여 무늬를 꾸며보세요.</p> 	<p>● 파워포인트</p> <p>※빈틈없이 평면을 채워감으로써 테셀레이션의 정의를 스스로 느낄 수 있도록 한다.</p> <p>제작 방법은 규-5-가-⑤를 참고 한다.</p> <p>※되도록 다양한 방법으로 돌리도록 유도하여 새로운 무늬를 꾸밀 수 있도록 한다.</p>
	<p>◎컴퓨터를 이용하여 돌려가며 이어 붙이기</p>	<p>◆ 모양을 뒤집어가며 이어붙이기 위해서 파워포인트로 해세요. 뒤집어지지 않죠? 그럼 색종이로 다시 만들어 뒤집어야 할까요?</p> <ul style="list-style-type: none"> • 다른 프로그램을 사용하면 좋겠습니다. <p>◆ 그럼 GSP를 열어보세요. '뒤집기.gsp'라는 파일(■) 찾아 불러보세요. 그런 다음 모서리를 더블클릭(대칭축지정)하여 선대칭이동을 해보세요.</p> <ul style="list-style-type: none"> • 도형이 뒤집어 이어 붙여집니다. <p>◆ 그래요. 여기에서 선대칭이동이라는 말은 선택한 변을 중심으로 뒤집는다는 말입니다. 다른 모양(◻, ◂)으로도 뒤집어가며 이어 붙이기를 하여 만들어보세요.</p> 	<p>● GSP , GSP 예제파일</p>
	<p>◎컴퓨터를 이용하여 뒤집어가며 이어붙이기</p>		

과정	학습의 요 소	교수 · 학습활동	자료 및 유의점
<p>문제 해결 (25)</p> <p>적용 및 발전 (5)</p>	<p>◎ 발전 문제 풀기</p> <p>◎ 형성평가 풀기</p>	<p>◆ 그림 다음 무늬들은 어떻게 움직여서 만든 것 일까요? 직접 만들어 보고 해결 방법을 찾으세요</p> <p>• ㉔는 돌려서 이어붙였는데 첫 번째 무늬는 1번, 두 번째 무늬는 2번 돌려서 이어붙였습니다.</p> <p>㉕는 기본 모양을 뒤집어서 이어 붙였습니다.</p>  <p>◆ 다음은 포장지와 벽지무늬의 그림입니다. 어떤 무늬를 어떤 방법으로 움직여서 만들어진 것일까 요?</p>  <p>• ㉖는 악어 무늬가 옆으로 옮겨서 이어 붙였고, ㉗는 펭귄 무늬를 돌려서, ㉘는 큐피트 무늬를 뒤 집은 다음 옮겨서 이어 붙였습니다.</p> <p>◆ 확인해 봅시다.</p>  <p>◆ 다음 무늬는 기본 무늬(□, □, ◀)를 어떤 방법으로 사용하여 만들었을까요? 골든벨판에 써 보세요.</p>  <p>• ㉙는 뒤집어 이어붙이기, ㉚는 돌려서 이어 붙 이기 ㉛는 옮겨서 이어붙였습니다.</p>	<p>● GSP , GSP 예제파일</p> <p>● 테셀매니아 ※테셀매니아를 실행시켜 직접 테셀 레이션 되는 장면 을 시연하여 확인 할 수 있도록 한 다.</p> <p>※ 규-1-가-① 자 료를 참고하여 제 시한다.</p> <p>■ 골든벨판, 보 드 마카,화장지 또는 학습지</p>

과정	학습요소	교수·학습활동	자료 및 유의점
	◎ 과제 제시 및 차시예고	◆ 수학익힘책 24쪽을 보며 각 무늬들이 기본 무늬를 어떻게 사용해서 만들었는지 알아보세요. 또한 새로운 기본무늬를 가지고 옮기기,돌리기,뒤집기 방법을 이용하여 규칙적인 무늬를 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 꾸며 오세요. ◆ 다음 시간에는 한 가지 모양으로 더 큰 모양을 덮어보는 활동을 해보도록 하겠습니다. 집에서 가로 2cm, 세로 1cm인 직사각형을 12개 만들어 오세요. 이것으로 수업을 마치겠습니다.	
형성평가	● 규칙적인 무늬 꾸미기를 보고 옮기기, 돌리기, 뒤집기의 방법 중 어떤 것을 선택했는지 찾을 수 있는가?		

자료번호	단원명	2. 무늬 만들기
규-가-5-⑤	학습주제	여러 가지 이동방법으로 규칙적인 무늬 꾸미기
준비물	광주대성초등학교 6학년 5반 이름	


1. 과 같은 8개의 색종이로 아래에 꾸며보세요.

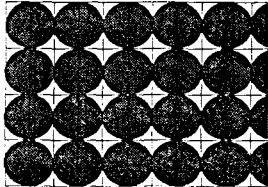
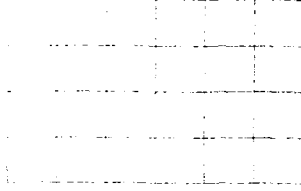
규칙찾기 :



2. 을 아래와 같은 방법인 돌려가며 이어붙이기로 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 해보세요. 다 만든 후 오른쪽에 간단히 그려보세요.

기본무늬 :

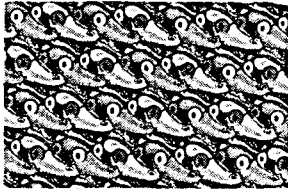
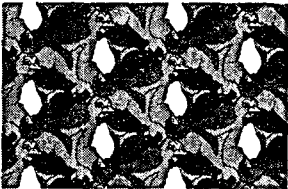
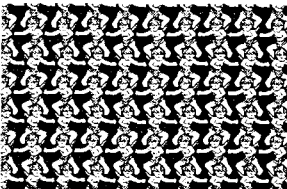
기본무늬 :

3.  을 아래와 같은 방법인 뒤집어서 이어붙이기로 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 해보
세요.



기본무늬 :  기본무늬 : 

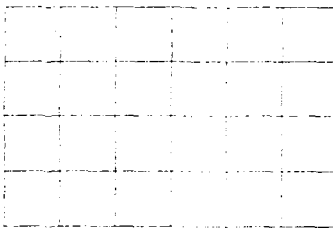
 

4. 다음은 포장지와 벽지무늬의 그림입니다. 어떤 무늬를 어떤 방법으로 움직여서 만들어진 것일까요? 기본 무늬를 표시해 보고 이동 방법을 번호 옆에 간단히 쓰세요.

가 :  나 :  다 : 

<심화학습지> 다음 두 가지 무늬를 옮기기, 뒤집기, 돌리기의 방법으로 이어 붙여 재미있는 무늬를 만들어 보세요.

두 가지 무늬 :  



나도 한마디!

★ 무늬를 만들면서 재미있었던 점, 어려웠던 점, 힘들었던 점이 있다면 솔직하게 적어보세요. 기쁨은 나누면 배가 되고 슬픔은 나누면 반이 됩니다.

라. 학습지 내용 분석

선택한 4가지 교수 학습 자료를 바탕으로 고안한 교수 학습 과정안으로 수업을 진행한 후 학생들이 풀이한 내용을 분석하였다. 테셀레이션 교수 학습 자료를 활용했을 때의 규칙 및 도형의 성질에 관한 문제, 예상, 새로운 창작, 느낀 점, 어려웠던 점, 재미있었던 점등을 제시하여 학생들의 태도 및 학습정도를 파악하고자 하였다.

패턴블록 자바 프로그램을 활용해서 대칭축을 알아보는 수업에 대한 학습지의 경우 34명 중 32명의 학생들이 대칭축을 만들어 보는 수업이 매우 재미있다고 하였고, 메뉴를 쉽게 다룰 수 있어 대칭축에 대해 쉽게 이해할 수 있다고 하였다.

그리고 예제 문제였던 대칭축이 6개인 도형을 만드는 문제에서는 채 5분도 되지 않아 작성하는 학생들이 많았다(11명). 학습지 문제 중 대칭축이 1개, 2개, 6개인 도형 만들기의 경우 대칭축에 대한 이해가 확실히 이루어진 상태에서 대칭축이 1개, 2개인 도형은 확실히 이해하여 그렸고 12명의 학생들은 6가지 대칭축의 새로운 모양을 만들어내었다. 만들 것이 많았는데 어떤 모양으로 만들 것인지 고민한 부분이 힘들었다는 대답, 실제 조작은 재미있고 쉬웠지만 종이에 그리는 작업이 어려웠다는 대답, 대칭축은 이해하지만 6개의 대칭축을 만족시키는 도형을 만들기 어려웠다는 대답 등 다양한 소감이 나왔다.

규칙성과 함수 영역에서는 무늬 만들기로 수업을 진행했는데 색종이로 하는 활동도 재미있지만 컴퓨터 소프트웨어를 활용하면 쉽고도 정확하게 무늬를 만들 수 있어서 좋았다 라는 반응 및 새로운 경험을 하게되어 수학이 재미있어졌다 라든지 하는 호기심 어린 반응이 많았다.

하지만 일부 컴퓨터 조작이 미숙한 학생의 경우 재미있지만 조작이 어려웠다는 대답 및 색종이와는 달리 마음대로 이동시킬 수 없어 불편했다 라는 대답도 나와 앞으로 선수학습에서 메뉴에 대한 충분한 숙지와 컴퓨터 소프트웨어 활용을 어려워하는 학생들에게는 구체적 조작물로 대체하여 진행하는 융통성이 필요함을 발견할 수 있었다. 중위권 이상의 학생 중 평소 창의성이 풍부하다고 생각되어진 학생들의 경우 색종이로 붙여서 하는 것을 불편해하고 오히려 바로 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 조작을 통해서 만드는 것이 훨씬 쉬웠다는 대답이 나와 고학년으로 갈수록, 창의적인 학생일수록 자르고 붙이는 조작보다는 학생들의 사고를 도울 수 있는 수준별 학습이 병행되어야 함도 깨달을 수 있었다.

V. 결론 및 제언

1. 결론

시각적 아름다움을 비롯하여 수학의 구조적 아름다움과 같은 수학의 아름다움을 느낄 수 있는 기

회를 제공하여 흥미와 동기를 부여하는 장점을 가지고 있는 테셀레이션이라는 주제는 현 7차 수학교육과정의 경우 용어에 대한 도입 및 구체적 자료가 조금씩 나타나고 있는데 이러한 현실에서 테셀레이션에 관한 교수 학습 자료의 개발은 필수적이라 하겠다. 제작된 테셀레이션 교수-학습 자료의 적용 실험을 위하여 광주대성초등학교 6학년 한 반을 선정하여 약 4주에 걸쳐 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수-학습 자료를 투입하여 4번의 활동수업을 실시하였다. 수업 후 작성된 학습지와 소감문 및 연구자에 의해 관찰된 수업내용을 바탕으로 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 제7차 초등 수학 교육과정 중 도형 영역과 규칙성과 함수 영역을 중심으로 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 자료를 제시한 결과 지필적 환경에서 제한적이었던 탐구하고 조작해보는 활동을 할 수 있는 역동적인 수학 실험실 환경이 제공됨으로써 도구적 이해가 아닌 관계적 이해를 하는 것을 확인할 수 있었다. 수학적 개념을 암기하는 것에서 벗어나 자연스런 조작을 통해 학생들이 개념을 이해하고 탐구하는 과정 속에서 학생들은 수학을 공부한다는 것보다는 수학 속에서 재미있게 놀이한다는 생각을 가지고 수업에 참여하였고 배우는 즐거움을 알고 자신감을 가지며 더 나아가 창의적인 생각을 하도록 하는 기회를 줄 수 있었다.

둘째, 테셀레이션은 우리 생활 속에서 쉽게 발견할 수 있는 것으로 수학이 단순히 책에서만 한정되지 않고 다양한 분야 즉 디자인, 생활 속에서의 벽지문양과 포장지, 예술작품 등에 활용되고 있음을 체험함으로써 수학이 실생활에 광범위하게 활용되고 있음을 알게 하였다. 역으로 생활 속에서의 테셀레이션을 통해 수학적 개념을 찾는 과정을 통해 수학이 아름다우면서도 실용적이라는 생각을 심어줄 수 있었다.

셋째, 테셀매니아, GSP, Cabri, 거북기하 등 평소 수업에서는 활용도가 적은 컴퓨터 소프트웨어를 활용함으로써 그 도구 자체에서 오는 호기심뿐만 아니라 직접 조작하여 테셀레이션 작품과 개념을 익히고 새로운 작품과 학습을 해 내는 과정을 통해 자신감과 성취감 등에 있어 큰 변화가 있음을 발견할 수 있었다. 예를 들어 대칭축을 찾는 수업에 대한 학습지를 분석한 결과 모든 학생들이 어렵다는 대답보다는 흥미로웠다, 재미있었다 라는 대답을 우선하여 말하였고 컴퓨터 기능이 미숙한 학생의 경우에도 처음에는 당황해 하고 어려워하는 부분도 있었으나 조작할 시간적 여유를 주고 교사와 우수한 학생들이 도우미로서 역할을 잘해내어 나중에는 큰 어려움 없이 마칠 수 있었다.

테셀레이션이라는 용어가 아직은 생소한 현장에서 교수-학습 자료가 부족하고 그에 따른 이해도 부족한 현실 속에서 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수학습 자료가 교수학습 현장에 투입되어 유용하게 사용될 수 있는지 그 가능성을 조사한 것을 목적으로 한 본 연구의 결과로서 테셀레이션이라는 주제는 도형 영역과 규칙성과 함수 영역에서 평면 도형의 각과 모양 등의 성질을 탐구하게 하고, 대칭변환의 개념을 효율적으로 학습하게 할 수 있고, 반복되는 모양에서 규칙성을 발견하고 부분과 전체를 파악하여 패턴을 인지할 수 있게 하며 제작하고 분석하는 과정을 통해 여러 가지 수학적 개념과 수학적 창의성, 수학적인 아름다움을 느끼게 할 수 있음을 발견할 수 있었다. 또한 테셀레이션은 수학적 개념은 물론 수학과 미술, 수학과 일상 생활과의 연결성을 논의하고 확인하는 데

흥미로운 주제가 될 수 있었다.

2. 제언

본 연구에서 개발한 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료는 초등학교 교육과정에서 새롭게 도입되고 있는 테셀레이션을 활용하여 지도하기 위한 교수학습 자료로 유용하게 사용될 수 있고, 그러한 수업이 학생들의 수학적 태도 및 수학적 개념 형성에 긍정적 효과를 줄 것으로 기대할 수 있었다.

하지만 이는 학기초부터 부단한 관심을 가지고 컴퓨터 소프트웨어를 활용하려는 교사의 태도가 매우 중요하다. 컴퓨터 소프트웨어의 기능을 익히기에만 열중한다면 오히려 학생들에게 수학이 어렵다는 인상을 받게 할 수 있기 때문이다. 따라서 학생들이 수학적 개념을 이해하고 흥미를 느끼고 수업에 참여하기 위해서는 교사의 컴퓨터 소프트웨어에 대한 이해 및 테셀레이션에 대한 이론적 바탕이 이루어져야 할 것이다.

또한 본 연구가 6학년 학생 한 반을 대상으로 소규모로 적용하였고 또한 그 대상이 한 학년에 한정되어 있었던 바 앞으로는 다른 학년을 대상으로 적용한 실험결과 및 실험연구가 뒤따라야 할 것으로 보인다. 컴퓨터 소프트웨어뿐만이 아닌 구체적 조작물을 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료의 연구도 심도 있게 이루어 진다면 수준별로 지도하는데 많은 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

- 강옥기 (1989). 수학적 사고력 향상을 위한 LOGO 프로그래밍, 제13회 산수과 교육 세미나, 한국초등수학교육연구회 주최.
- 고금자 (2001). GSP를 활용한 활동 수업이 기하학적 사고와 수학적 태도에 미치는 영향, 광주교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공 석사학위 논문.
- 교육부 (2001). 초등학교 수학 1-가 와 1-나 교과서 및 수학의힘책. 대한 교과서 주식 회사.
- _____ (2001). 초등학교 수학 2-가 와 2-나 교과서 및 수학의힘책. 대한 교과서 주식 회사.
- _____ (2001). 초등학교 수학 2-가 와 2-나 교과서 및 수학의힘책. 대한 교과서 주식 회사.
- _____ (2001). 초등학교 수학 3-가 와 3-나 교과서 및 수학의힘책. 대한 교과서 주식 회사.
- _____ (2001). 초등학교 수학 4-가 와 4-나 교과서 및 수학의힘책. 대한 교과서 주식 회사.
- _____ (2001). 초등학교 수학 5-가 와 5-나 실험용 교과서 및 수학의힘책. 대한 교과서 주식 회사.
- 교육부 (1999). 초등 학교 교육 과정 해설(IV), 서울: 대한 교과서 주식회사.
- 김상미 (1997). 수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발연구-초등학교 4학년을 대상으로, 한국교원대학교 대학원 초등수학교육전공 석사학위 논문.

- 김성만·신국환 (2001). 테셀레이션을 활용한 탐구능력 개발. 학교수학교육학회 제3회 수학교육워크샵. pp.27-53.
- 남승인 (1993). 수학교육에서 COMPUTER 활용에 대한 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 79, 서울: 한국수학교육학회.
- 류희찬 (1997). 수학교육에서 컴퓨터 활용 방안. 청람수학학회지 6, 한국교원대학교.
- 배중수 (1999). 제7차 교육과정을 중심으로 초등수학교육 내용지도법, 서울: 경문사.
- 백영균·류희찬·옴김 (1990). 로고 아동과 컴퓨터(Papert, S.(1990), *Mindstorms: Children Computers And Powerful Ideas*, Basic Books), 양서원.
- 백희수 (2001). 수학영재아를 위한 테셀레이션 학습지도 연구, 서강대학교 교육대학원 수학교육전공 석사학위 논문.
- 심형진 (2001). Cabri Geometry II를 이용한 수학수업, 수학사랑 제3회 MATH FESTIVAL, pp.62-80.
- 이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 수학교육과.
- 이진곤 (2000). GSP를 사용한 자기주도적 학습력 증진 방안. 부산 동아대학교 교육대학원 수학교육과.
- 이옥화 (1992). LOGO 교육 이론과 LOGO Writer 프로그래밍. 서울:교학사.
- 임근광 (1999). 초등 기하학습에서 Cabri II의 활용에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 초등수학교육전공 석사학위 논문.
- 임해경 (2001). 초등수학을 위한 GSP 자료와 활용방안. 수학사랑 제3회 MATH FESTIVAL. pp. 364-383.
- 전평국 (1992). 수학학습의 심리학적 배경에 대한 고찰. 한국수학교육학회 발표논문 1992.8.1. 한국교원대학교.
- 조미옥 (1991). LOGO 프로그래밍의 안내적 교수법을 통한 인지적 모니터링 전략(Cognitive Monitoring Strategy)의 발달, 교육공학 연구 7(1), pp.161-180.
- 주미 (1998). 소프트웨어를 활용한 기하 교수-학습 방안 연구. 순천대 교육대학원 석사학위 논문.
- 채희진·전영아·오혜원 (2001). 새롭게 다가가는 평면도형·입체도형. 서울: 수학사랑.
- 최신애 (2000). 초등학교 수학교육에서의 패턴 탐구 활동에 관한 연구, 인천교육대 교육대학원 초등수학교육 전공 석사학위 논문.
- 현동희 (2000). 초등학교 수학 수업에서 패턴블록의 활용 방안 연구, 인천교육대학교 교육대학원 초등수학교육 전공.
- Devlin, Keith J (1995). *Mathematics. The Science of Patterns*. W. H. Freeman. 허민, 오혜영 (역). (1996). 수학 : 양식의 과학, 서울: 경문사.
- Maor, Eli (1991). *To Infinity and Beyond : A Cultural History of the Infinite*, Princeton Univ. Pr. 전대호 (역). (1997). 무한 그리고 그 너머 : 무한의 문화사, 사이언스 북스.

- NCTM (1991a). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Addenda series. Grade K-6*. Reston, VA : NCTM. 구광조 · 오병승 · 류희찬 (공역) (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사
- NCTM (1992a). *Geometry from multiple perspectives, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades 9 - 12*. Reston. VA: NCTM.
- NCTM (1992e). *Fifth-Grade Book, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades k-6*. Reston. VA: NCTM.
- NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics : Discussion Draft*.
- Serra , Michael (1997). *Discovering Geometry An Inductive Approach : An Inductive Approach*, Second edition. Key Curriculum Press.
- Seymour, Dale (1989). *Tessellation Teaching Masters*, Geoge : Dale Seymour Publications.