韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 361-379.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 361-379.

Amazing Triangle[1)]을 이용한 기하 학습자료개발

고 상 숙 (단국대학교)
홍 석 만 (단국대학교 대학원)

본 논문은 재미있고 활동적인 기하 수업을 위한 학습자료를 제시한 것으로써 Amazing Triangle (NCTM, 1993)를 GSP를 활용하여 학교수업에서 사용할 수 있는 방안과 테셀레이션으로 확장시켜 도형의 각의 크기, 대칭과 변화, 합동 등의 학습을 통해 자연스럽게 기하에 관한 수학적 개념과 의미를 익히고 수학적 사고력과 창의력을 키우고자 하였다. 수학에 대한 정의적 측면에서의 향상과 동시에 타교과인 미술 분야에 수학이 어떻게 사용될 수 있는 가도 알 수 있다.

I. 서 론

필자가 교육실습을 나갔을 때이다. 미술 수업시간에 테셀레이션을 이용하여 사각형의 간단한 무늬를 스케치북에 찍는 것을 보았다. 다수의 학생들이 무척이나 재미있어하고, 잘 만들어진 작품들도 많았다. 평소에 테셀레이션에 관심이 있었는데 새삼 수학이 미술분야에 사용됨을 보게되었으나, 미술 선생님도 그것이 테셀레이션인지 모르고, 단지 같은 모양의 무늬를 시계방향으로 90° 씩 돌려가며 만드는 것이라고만 아시고 계셨다. 이것을 수학 수업에 도입하면 어떨까라고 고민하던 중, "Activities for Active Learning and Teaching"(NCTM, 1993) 에 소개되어있는 Amazing Triangle을 이용하여 기본적인 성질과 테셀레이션까지 응용한다면 재미있고 활동적인 기하 수업이 될 것이라는 생각을 하였다.

2000년도 초등학교를 시작으로 단계적으로 실시하고 있는 제 7차 수학과 교육과정의 개정의 기본 방향은 '수학적 힘' 의 신장으로써 이를 구현하기 위한 실천적인 항목들로, 개인의 능력 수준과 진로의 고려, 수학적 기본 지식의 습득, 학습자의 활동 중시, 수학적 흥미와 자신감의 고양, 계산기, 컴퓨터 및 구체적 조작물의 적극적 활용, 다양한 교수·학습 방법과 평가의 활용을 제안하고 있다 (교육부, 2001). 이런 수학교육의 목표의 실현을 위해 수학 교수·학습에서 교사는 1) 학생의 흥미와 지능을 개발하는 수학적 과제를 선택하고, 2) 수학과 그것의 응용에 대한 이해를 향상시킬 수 있는 기회를 제공하고, 3) 수학적 사고를 신장하고 조사 활동을 조장하는 방법으로 수업을 유도하고, 4) 수학적 조사 활동을 가능하게 하는 테크놀로지와 다른 도구를 사용하고, 뿐만 아니라 학생이 이런 도구를 사용할 수 있게 돕고, 5) 이전 지식과 현재 지식에 연결 고리를 찾고, 학생이 이런 연결고리를 찾을 수 있게 돕고, 6) 개별 학습, 조별 학습, 전체 학습을 이끌 수 있어야 한다 (NCTM, 1991).

---

1) Activities for Active Learning and Teaching(NCTM, 1993)에서 이름을 붙인 것으로 Morley와 Napoleon의 삼각형이다.

수학은 매우 추상적인 학문이기 때문에 아직 준비되지 않은 학생들이 이해하기엔 어려운 특성이 있다. 피타고라스 정리의 경우 중학교 3학년 학생들은 특히, 유클리드가 직접 증명한 증명방법에서 대단히 어려워하는 반면, 이를 담당하는 교사는 그 피타고라스의 정리가 학생들에게 왜 어려운지 이해하지 못한다. 그것은 교사는 피타고라스 정리를 정신적으로 조작 가능하기 때문이다. 교사는 이 과정을 마치 구체물을 만지듯이 조작할 수 있기 때문에 쉬운 것이다. 학생들도 이 과정을 직접 조작해 보게 하면 증명과정을 보다 더 잘 이해할 수 있음은 분명하다.

이 점은 미분기하나 비유클리드 기하에 속한 수학적 지식을 이해하는 것이 얼마나 어려운 것인가를 회상해 보면 보다 분명히 알 수 있다. 컴퓨터의 시각적 · 조작적 기능은 학생들로 하여금 추상과 구체의 만남을 통해 수학을 보다 쉽게 접근할 수 있게 해준다.

현재의 기하교육은 연역적 증명에 강조를 두고 있으나 기하학적 개념이나 원리가 학생들에게 의미를 가지는 것이 중요한 바, 이를 위해서는 연역 이전에 학생들이 지식을 귀납적으로 탐구하는 "구성" 의 과정이 필요하다 (신동선 · 류희찬, 1998).

교육에는 왕도가 없다고 한다. 학교수업에서 학습자료가 풍부하지 못한 현실에선 기하학을 가르치는 교사에게 있어서 학생들을 지도하기란 쉬운 일은 아니다. 많은 학생들이 기하학을 어렵게 느끼고 힘들다고 생각한다. 이러한 문제를 해결하는데 일조하기를 바라면서 본 논문은 Amazing Triangles에 숨어있는 수학적 성질을 파악하고 이를 확장하여 테셀레이션을 만들어보아 학생의 흥미를 이끌 수 있는 활동적인 기하 수업을 위한 학습자료를 제시해보고자 한다.

II. 이론적 배경

A. 시각화와 수학교육

Steen(1988)은 수학을 패턴(pattern)의 과학으로 설명하고 있다. 수학자는 수와 공간에서 패턴을 구한다. 패턴을 사용하여 새로운 패턴이나 패턴의 패턴들을 만들어 낸다. 수학적 이론은 패턴들 사이의 관계이며, 수학의 응용은 패턴을 사용하여 자연적 현상이나 수학적 현상을 설명하고 예상하는 것이다. 패턴은 시각화를 함의한다. 수학의 성격이 이러하다면 시각화는 수학교육에서 가장 중요시되어야 할 학습방법일 것이다.

수학적 시각화에서 우리가 흥미를 가지는 것은 설명을 위한 보조적인 위치로서의 시각화가 아니라 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위해 적절한 도형을 그릴 수 있는 학생들의 능력이다. 수학적 시각화는 발견과 이해를 위해, 수학적 이미지를 형성하고 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정이다 (Choi-Koh, 1999).

시각화는 수학적 행동의 모든 측면에 걸쳐 도움을 줄 수 있다. 지식의 이해, 적용, 종합, 문제해결, 심미적, 정의적인 측면 등에 결정적인 영향을 준다 (신동선 · 류희찬, 1998).

Zimmermann과 Cunningham(1991)은 시각화란 수학적인 개념, 원리, 문제를 기하학적인 표시나 그래픽을 사용하여 나타내는 과정이라고 설명하였다. 시각적인 것과 수학의 직관적인 면을 강화시키는

것은 수학작업에 새로운 가능성을 열어주며, 특별히 기하학적 도형의 시각화는 문제를 정확하게 표시해준다. 시각화의 장점은 수학문제에 대한 직관과 이해를 증가시켜주고, 역동적인 체계와 과정을 보여주는 매우 복잡한 문제의 특별한 요소와 세부사항에 초점을 맞춘다는 것이다 (고상숙, 2001).

B. 유클리드 기하학과 컴퓨터

유클리드 기하학은 그리스 시대 유클리드가 당시의 기하 지식을 연역적 체계로서 정리하여 완성한 기하학으로 그가 저술한 원론은 20세기 중반까지 교양인의 필독서로서의 자리를 지켜왔다. 유클리드의 원론은 모두 13권으로 이루어져 있고 23개의 정의. 5개의 공준, 5개의 공통 개념을 근거로 엄밀한 연역적 추론에 의하여 465개의 명제들을 증명하였다. 유클리드 기하학에서 공리론적 방법이 시작되었고 현재는 모든 수학에 적용되고 있다. 유클리드 기하학의 유용성은 수학적 사고법 훈련에만 있는 것이 아니라 그 자체가 심미안의 관찰대상이 되며, 여타 수학문제를 연구하는데 기초 도구로서의 역할도 있다 (방승진, 1995).

사용자로 하여금 컴퓨터 스크린 상의 도형을 직접 조작하여 도형의 성질이나 관계들을 탐구하도록 해주는, 다시 말해 동적인 기하환경을 제공해 주는 탐구형 소프트웨어는 1980년대 말 등장하였다. 이들 소프트웨어들은 서로 다른 외관으로 메뉴 옵션, 아이콘과 버튼 등도 다르지만 몇 가지 공통된 특성을 가지고 있다. Hölzl(1996)은 이 소프트웨어들은 유클리드 원론에 규정된 자와 컴퍼스 작도를 흉내내고 있으며, 사용자에 의해 정의된 작도를 지원하는 기능을 가지고 있고, 도형을 이루는 어떤 요소들(점, 선분, 원 등)을 움직였을 때, 도형의 근간을 이루는 기하학적인 관계가 계속적으로 유지되면서 도형이 변화된다는 것을 이들 소프트웨어의 가장 큰 특징으로 들고 있다.

류희찬외 2인(1999)이 인용한 Galindo(1998)는 학생들이 생각에 대한 의미 있는 정당화로 나가는데 있어 성공적일 수 있는 새로운 접근을 구성하는데 탐구형 소프트웨어가 사용되어질 수 있다고 제안하였다. 탐구형 소프트웨어의 사용은 연역적 증명에 앞서 스크린 상의 대상을 직접 조작하면서 관찰하고 경우에 따라 측정치를 기록하고 비교하면서 귀납적 추론활동을 전개해나갈 수 있는 바탕을 마련해 준다. 도형의 학습에서 컴퓨터의 영향으로 강행고 외 9인(2000)에 의하면 첫째, 역동적인 그래픽 기능과 둘째, 시뮬레이션 기능, 셋째 프로그래밍 기능과 마지막으로 계산 수행기능을 들고 있다. 기하 교육에서 컴퓨터 활용의 기대효과로는 도형의 개념을 지도하는 데 있어서 좀더 직관적인 방법을 택할 수 있어서 학생들의 시각적 직관력을 키우는 데 도움이 된다. 또한, 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 맞출 수 있다. 이런 컴퓨터의 이용은 논리적 사고력을 향상시킬 수 있고, 도형의 변화를 쉽게 파악할 수 있고, 회전, 대칭, 평행이동 등의 변환의 움직임을 시각적으로 분명하게 이해시킬 수 있다. 이러한 근거로 본 연구자는 Amazing Triangle의 성질과 테셀레이션의 수업에서의 활용을 위한 방법으로서 GSP(Geometer's Sketchpad)를 이용하였다.

C. 테셀레이션

테셀레이션(tessellation)이란 마루나 욕실 바닥에 깔려 있는 타일처럼 어떠한 틈이나 포개짐이 없

이 평면이나 공간을 도형으로 완벽하게 덮는 것을 말한다. 이는 라틴어 'tessella' 에서 유래되었는데 고대 로마 모자이크에 사용되었던 작은 정사각형 모양의 돌 또는 타일을 의미한다. 다시 말해 '타일 깔기', '모자이크' 와 같은 뜻이다. 테셀레이션은 우리에게 단지 예술적인 아름다움만을 주는 것이 아니다. 그 속에는 무한한 수학적인 개념과 의미가 들어 있어 틀에 박히고 지루한 방식에서 벗어나 흥미 있게 도형의 각의 크기, 대칭과 변환, 합동 등을 학습할 수 있게 해준다. 테셀레이션을 만들어 보는 활동 과정을 통해 자연스럽게 기하에 관한 수학적 개념을 학습할 수 있고 수학적 사고력과 창의력을 키울 수 있다 (채희진외 8인, 1999).

테셀레이션은 이와 같이 수학적 사고력과 창의력을 발달시킬 수 있는 기하의 한 영역임에도 이에 대한 자료는 국내에 그리 많지 않음을 알 수 있었고 따라서 현장수업에선 거의 활용되지 않고 있는 부분이 아닌가하는 생각을 하게되었다.

Ⅲ. 본 론

어떤 개념이든지 그것을 나타내는 낱말이 얼마나 다듬어져 있는지를 알아보면, 그의 내용을 짐작할 수 있다. 도형의 개념에 관해서도 마찬가지다. 우리가 도형을 인식하는 단계에서는 눈으로 직접 보거나(시각적), 손으로 만질 때(촉각적)의 느낌을 형용사로 나타내기 시작한다. 이러한 형용사는 일상적으로 늘 사용하는 이른바 자연언어(自然言語)이기 때문에 타원과 같은 도형도 <둥근>이라는 애매한 말로 한묶음으로 나타내고 만다. **보다 발전된** 단계에서 쓰이는 낱말은 형용사가 아니라 추상명사(抽象名詞)라는 것도 대단히 중요하다. 즉, 도형의 개념에 대한 이해가 깊어갈수록 쓰이는 낱말도 차츰 일상 용어(형용사)에서 수학 용어(추상 명사)로 바뀌어진다. **기하 학습에서 학생이 지식 발달을 이루어감에 따라 나타나는 증거를 나열해본다면,** 첫째, 용어가 세분화되어 그 수효가 늘어난다. 가령, 삼각형에 관해서만 생각해 보더라도 사고(思考)가 분석적으로 변(邊)이나 각(角)에 미치게 되면, <정삼각형>, <이등변삼각형>, <예각삼각형>, <직각삼각형>…등등의 용어를 따로따로 쓸 수 있게 된다.

둘째, 개념의 내용도 세분화된다. 예를 들어, <정삼각형>이라는 낱말은 처음에는 이등변삼각형이라든지 직각삼각형 등의 다른 삼각형과 구별하기 위해서 쓰인 것이지만, 차츰 <같은변>, <같은 각> 이라는 정삼각형이 지니고 있는 모든 성질까지를 포함해서 나타내는 용어로 발전한다.

셋째, 개념 사이의 연관성을 발견하게 된다. 따로따로 쓰던 <정삼각형>, <직각삼각형> 등의 개념 사이에 특수, 일반의 관계가 있다는 것을 알아차리게 된다.

'필요는 발명의 어머니'라고 하지만, 도형의 개념에 대한 통찰력이 깊어갈수록 그것을 나타내는 낱말(용어)이 비례적으로 늘어나는 것이다.

수학에서는 되도록 개념의 폭을 넓혀서 적용되는 영역을 확대해 나가는 것이 보통이다. 이렇게 하는 것이 여러 대상을 통일적으로 다룰 수 있어서 편리하기 때문이다. 이에 따라서 수학의 정도도 높아지는 것이다(김용운·김용국, 1996).

철학자 플라톤은 직선으로 **이뤄진** 면은 모두 반드시 삼각형으로 분해할 수 있기 때문에, 삼각형은

가장 기본적인 도형이라고 하였다. 실제로 다각형 중에서는 삼각형이 가장 간단하다. 또한 모든 도형은 삼각형으로 쪼개진다. NCTM에서 제시한 개념에 대한 논의 중에서 "기하의 도형의 고유용어를 정확히 이해하기 위해선 정의는 2차원과 3차원의 도형을 작도하고, 시각화하며, 그리고 측정하며, 도형의 성질을 관련짓고, 그들의 성질에 따라 도형을 분류하는 경험으로부터 유도되어야 한다" (구광조 외 2인, 1992, p.163). **특히, 본 연구에서는 GSP의 계산기능 활용으로 가능한 임의의 각의 삼등분 (지필 환경에선 불가능한) 작도, 마우스만을 끌어 사용하여 쉽게 도형의 변화를 관찰할 수 있는 기능, script를 이용한 Amazing Triangle의 생성과정, 및 특징, 그리고 대칭이동이나 회전이동 등의 다양한 변환활동**을 통해서 합동과 닮음의 개념 및 나아가 삼각형의 성질과 테셀레이션을 통한 미적감각과 공간감각의 발달에 도움을 주는 방안을 고찰해 본다.

A. Amazing Triangle

1. Morley의 삼각형

임의의 삼각형에서 인접한 삼등분한 각의 교점을 연결하면 정삼각형이 된다는 사실을 1899년 Frank Morley가 처음으로 발견하였다.

Morley의 삼각형을 만드는 방법은 다음과 같다.

(1) 임의의 삼각형을 그린다.

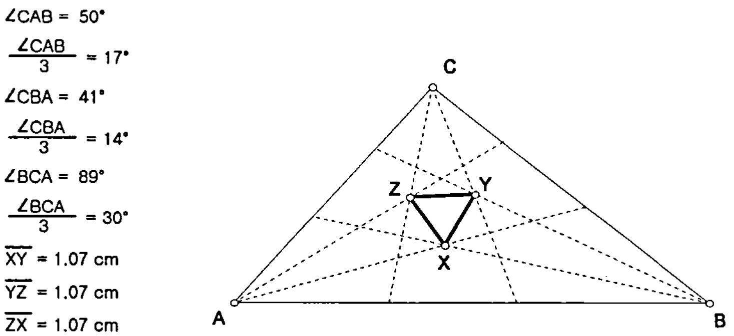
(2) 각을 삼등분한 선을 작도한다(GSP의 계산기능를 이용 각의 삼등분의 값을 구한다).

※ 임의의 각의 삼등분은 불가능하다는 사실을 주의한다.

(3) 교점을 연결한다.

(4) 삼각형 XYZ는 정삼각형이 된다.

가. 예각 삼각형



나. 직각 삼각형

$\angle CAB = 90°$

$\frac{\angle CAB}{3} = 30°$

$\angle CBA = 35°$

$\frac{\angle CBA}{3} = 12°$

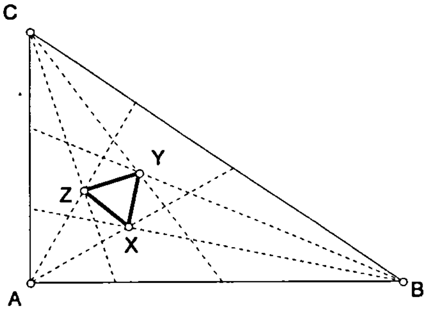
$\angle BCA = 55°$

$\frac{\angle BCA}{3} = 18°$

$\overline{XY} = 0.96$ cm

$\overline{YZ} = 0.96$ cm

$\overline{ZX} = 0.96$ cm



다. 둔각 삼각형

$\angle CAB = 115°$

$\frac{\angle CAB}{3} = 38°$

$\angle CBA = 30°$

$\frac{\angle CBA}{3} = 10°$

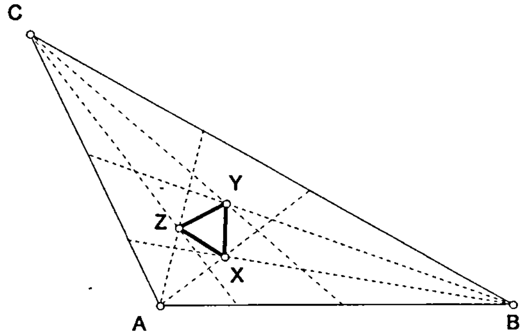
$\angle BCA = 35°$

$\frac{\angle BCA}{3} = 12°$

$\overline{XY} = 0.91$ cm

$\overline{YZ} = 0.91$ cm

$\overline{ZX} = 0.91$ cm



많은 학생들은 작도를 배우면서 임의의 각의 삼등분이 가능하다고 생각한다. 하지만 19세기 반첼에 의해서 자와 컴퍼스만으로는 임의의 각의 삼등분이 불가능하다고 증명된 사실이다. "Activities for Active Learning and Teaching"(NCTM, 1993)에서는 작도가 아닌 관점에서 활동지에 학생들이 각도기를 이용하여 예각삼각형에서 **임의의 각을 삼등분하고 자를 이용하여 삼등분된 선분을 그려서**, 인접한 교점을 연결하도록 하고 있다. 물론, 나중에 직각삼각형과 둔각삼각형에서도 활동을 해보도록 권하고 있다. 직접 학생에게 위의 과정을 실행하면 **각도기를 매번 사용하여야하는 번거로움**과 정확한 정삼각형이 나오지 않는다는 단점이 있다. GSP를 사용하면 쉽고 편하게 각의 삼등분의 값을 구하고 회전이동을 통해서 삼등분된 선분을 그릴 수 있고, **이를 스크립(script) 기능에 저장하여 두면 언제든지 필요할 때 작도를 재생, 반복할 수 있다. 이 작도 과정에서 학생에게 무엇보다도 중요한 것은 선분의 길이를 측정하여, 삼각형 내부에 만들어진 삼각형이 항상 정삼각형이라는 사실을 인식하는 것이다. 뿐만 아니라, 어느 예각·직각·둔각삼각형에서도 같은 결과가 나온다는 사**

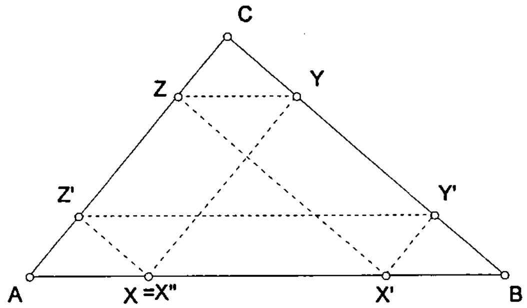
실을 쉽게 보고 이해할 수 있다. 나중에 왜 작도에 있어서 임의의 각의 삼등분이 불가능한가를 수행평가의 과제로 줄 수 있을 만큼 지적호기심을 자극시키는데 도움이 된다.

2. 평행사변형과 삼각형

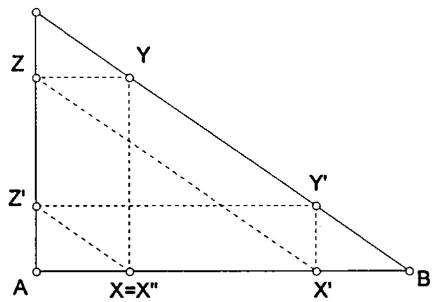
1953년 Court, Nathan A가 "Geometrical Magic" 에서 소개하였다. 평행사변형이 가지는 성질을 이용하여, 작도를 반복하면 처음 점과 일치하게 된다.

(1) 선분 AB 위에 임의의 점 X를 잡는다.
(2) 점 X를 지나는 선분 AC와 평행선을 그린다.
(3) 선분 BC와 만나는 교점을 Y라고 하고, 점 Y를 지나고 선분 AB와 평행선을 그린다.
(4) 선분 AC와 만나는 교점을 Z라고 하고, 점 Z를 지나고 선분 BC와 평행선을 그린다.
(5) 선분 BC와 만나는 교점을 X′ 라고 하자.
(6) 위의 (2)부터 (5)의 작업을 반복하여 Y′ 와 Z′ 와 X″ 를 그린다.

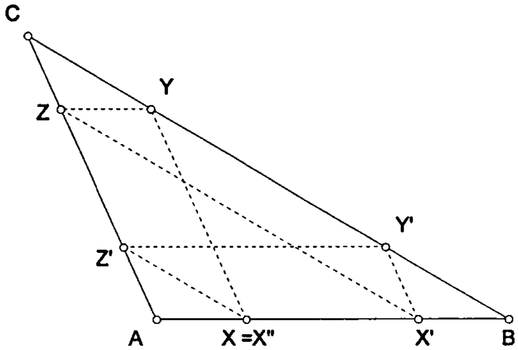
가. 예각 삼각형



나. 직각 삼각형



다. 둔각 삼각형



작도에 있어서 기본 활동 중에 하나는 평행선을 작도하는 활동이다. 평행선 작도를 통해서 평행사변형을 작도 할 수 있도록 응용되는 것으로 삼각형 내부에서의 평행사변형의 성질에 관하여 **자연스럽게** 관찰 할 수 있다. 어느 점을 잡아서 평행선을 그려도 결국에는 같은 점으로 돌아온다는 사실에 학생들은 많이 신기하게 생각한다. 흥미 있는 학생에게는 왜 이런 결과가 나오는지에 대하여 증명을 요구할 수도 있다. 또한, 평행사변형의 정의와 성질들을 설명할 수 있고, 특히 직각삼각형에선 한 내각이 직각 일 때, 두 대각선의 길이가 같을 때의 각 경우에 있어서 평행사변형이 직사각형이 된다는 사실을 관찰 할 수 있다.

3. Napoleon 삼각형

아마추어 수학자로 알려진 Napoleon Bonaparte가 발견한 것으로 임의의 삼각형에서 외부의 무게중심을 연결하면 정삼각형이 만들어진다는 것이다.

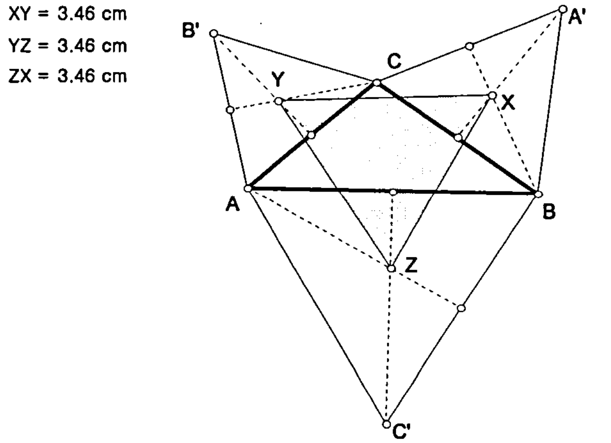
(1) 선분 BC를 중심으로 정삼각형 A′ BC를 작도한다.

(2) 같은 방법으로 선분 AC를 중심으로 정삼각형 AB′ C와 선분 AB를 중심으로 정삼각형 ABC′ 를 작도한다.

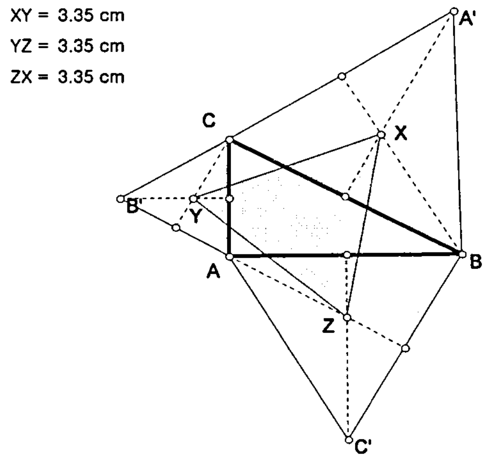
(3) 새로 만들어진 정삼각형의 무게중심을 작도한다.

(4) 무게중심 X, Y, Z를 연결하면 정삼각형이 만들어진다.

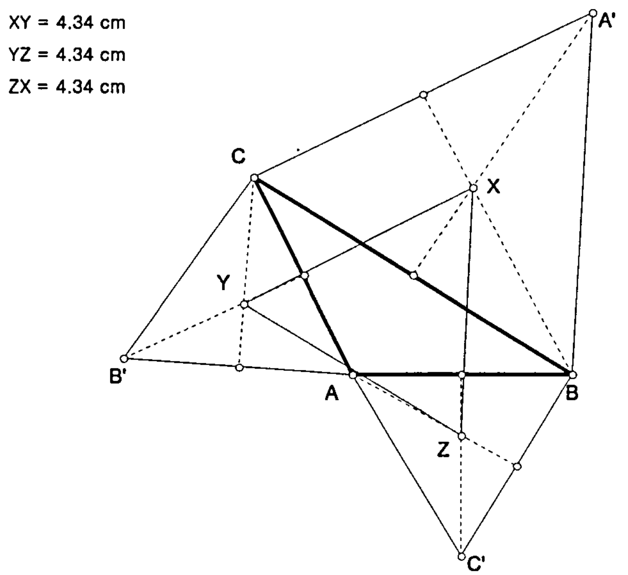
가. 예각 삼각형



나. 직각 삼각형



다. 둔각 삼각형



Napoleon 삼각형은 학생들이 각 변에 대하여 정삼각형을 작도하고, 그 각각의 선분의 중점을 찾을 수 있는지 활동하게 해준다. 학생들은 어떠한 삼각형에서도 위의 작도를 한 결과로서 정삼각형이 생긴다는 사실에 놀라워한다. 여기에서 무게중심에 대한 정의를 탐구할 수 있다. 다양한 삼각형의 변화 속에서도 결과는 정삼각형이 된다는 사실을 살펴보도록 하고, 정삼각형과 이등변삼각형에서 어떠한 결과가 나올지 묻는 학습과제를 제시할 수 있다.

B. Amazing Triangle을 이용한 테셀레이션

평면상에서의 도형의 이동을 크게 나누면 평행이동, 회전이동, 대칭이동의 세 가지가 있다.

첫째, (도형상의) 모든 점을 일정한 방향으로 일정한 거리 만큼 움직이는 '평행이동', 둘째, 일정한 점 P의 주위에 (도형상의) 모든 점을 일정한 각 만큼 회전하는 '회전이동', 셋째, 직선 l을 거울처럼 생각하여 (도형상의) 모든 점을 l의 반대 편에 옮기는 '대칭이동'이다.

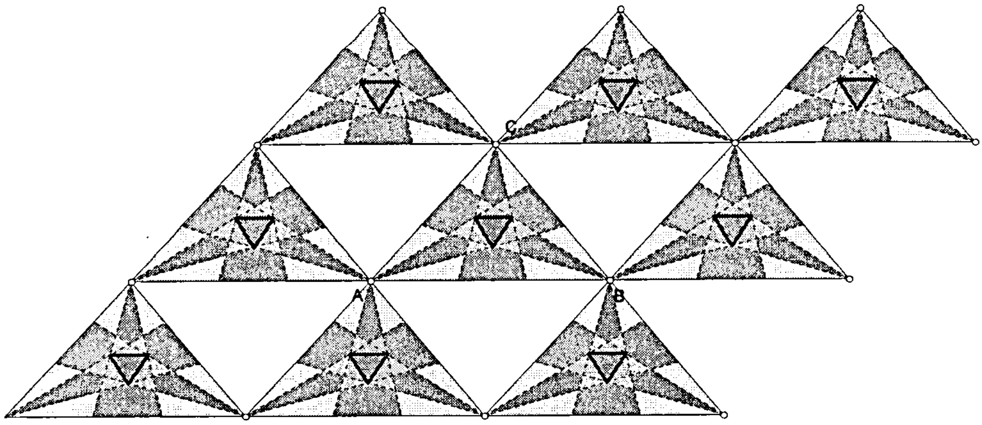
이 중에서 셋째의 대칭이동은 도형을 뒤집어야 되는 것이며, 첫째와 둘째는 뒤집지 않는 이동이다. 도형의 크기나 모양에 변화가 일어나지 않는다는 점에서 이동은 모두 마찬가지이지만 다른 측면에서 보면 평행이동에서는 모두 움직이지만, 회전이동에서는 중심이 움직이지 않으며, 대칭이동에서는 대칭축은 움직이지 않는다는 차이가 있다. **뿐만 아니라 대칭이동을 연이어 두 번 시행하면 평행이동이 된다는 사실도 이해할 수 있다.**

GSP에서는 직접 도형을 그려서 이동시키는 것보다 훨씬 정확하고, 쉽게 활동할 수 있는 장점이

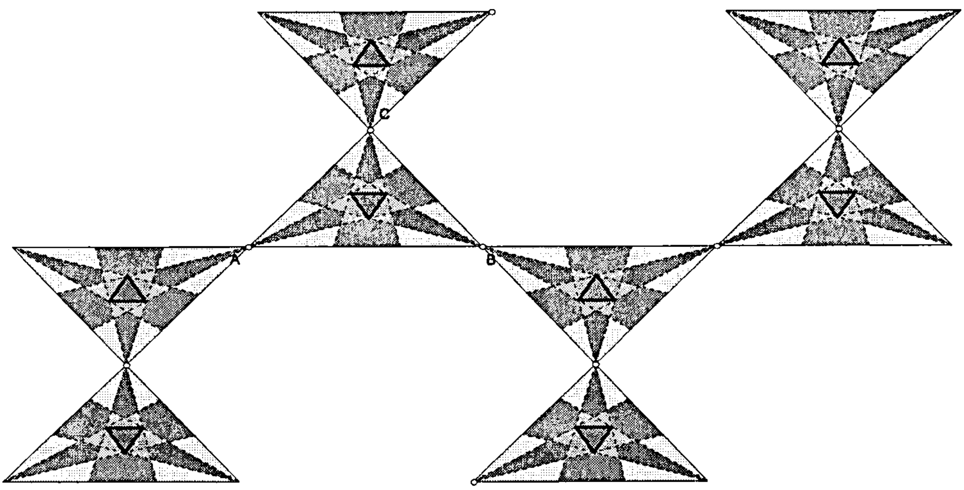
있다. **또한**, 측정을 이용하여 **도형간에 차이에 따른** 정확한 개념을 이해하기 쉽다는 이점이 있다.

따라서, 테셀레이션을 만들기 전에 평행이동과 회전이동을 통해서 수학적 성질을 자연스럽게 이해하고, 공간을 채운다는 개념을 형성하기 위한 활동을 제안해 본다.

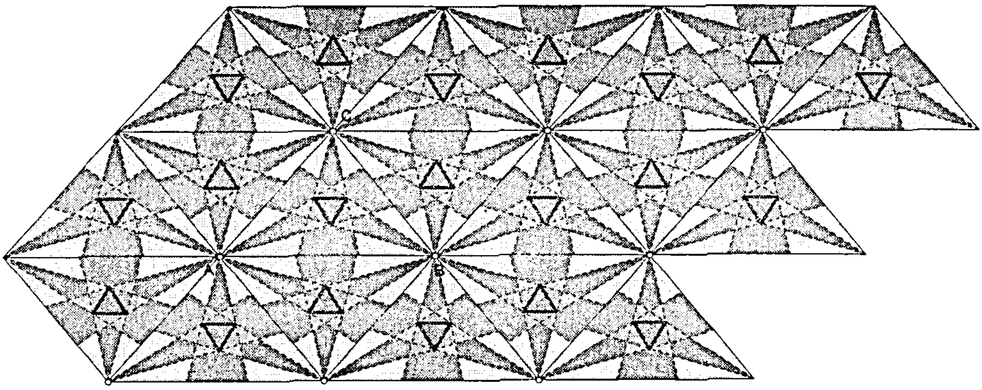
가. Napoleon 삼각형



<그림 1> 평행이동 1 (상하좌우)

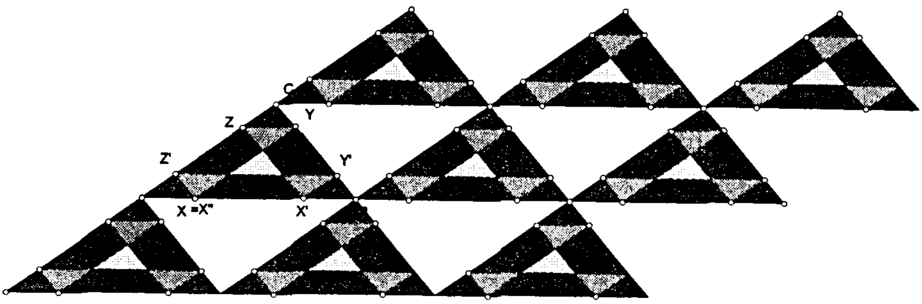


<그림 2> 회전이동 1

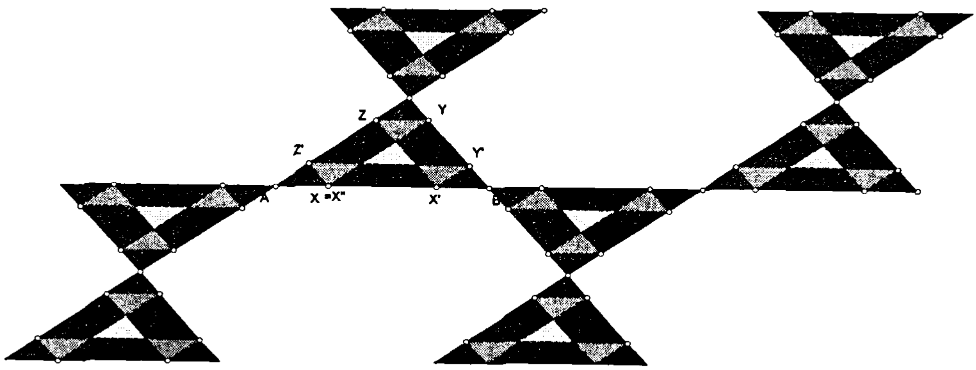


<그림 3> 테셀레이션 1

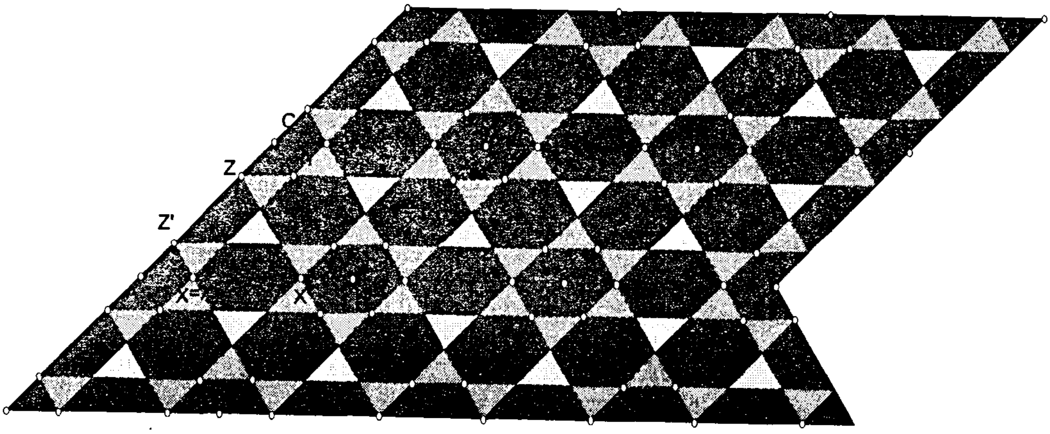
나. 평행사변형과 삼각형



<그림 4> 평행이동 2 (상하좌우)

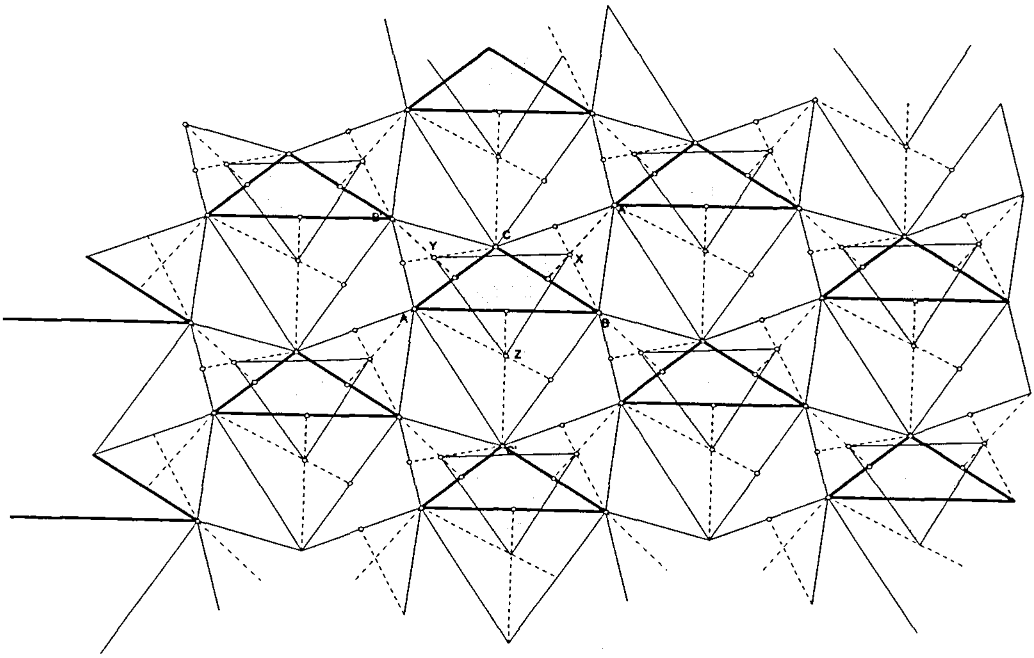


<그림 5> 회전이동 2



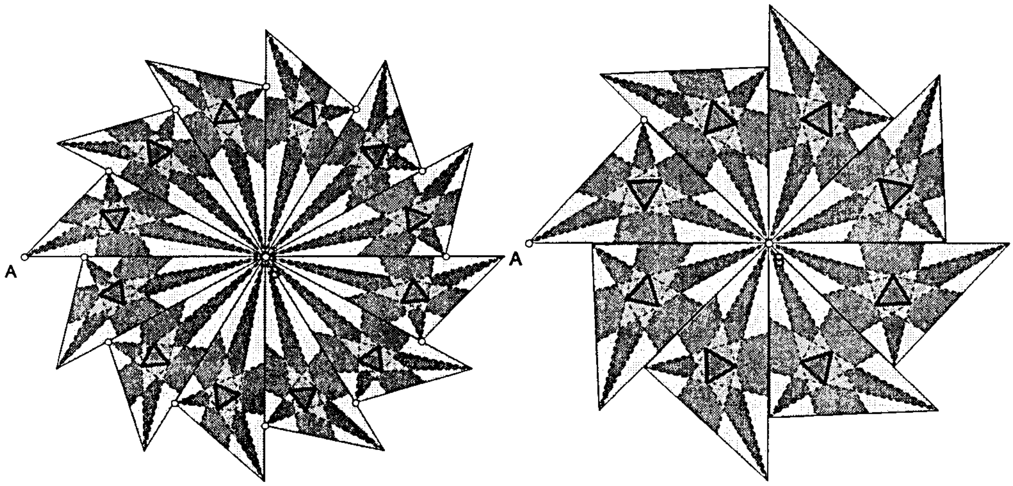
<그림 6> 테셀레이션 2

다. Napoleon 삼각형

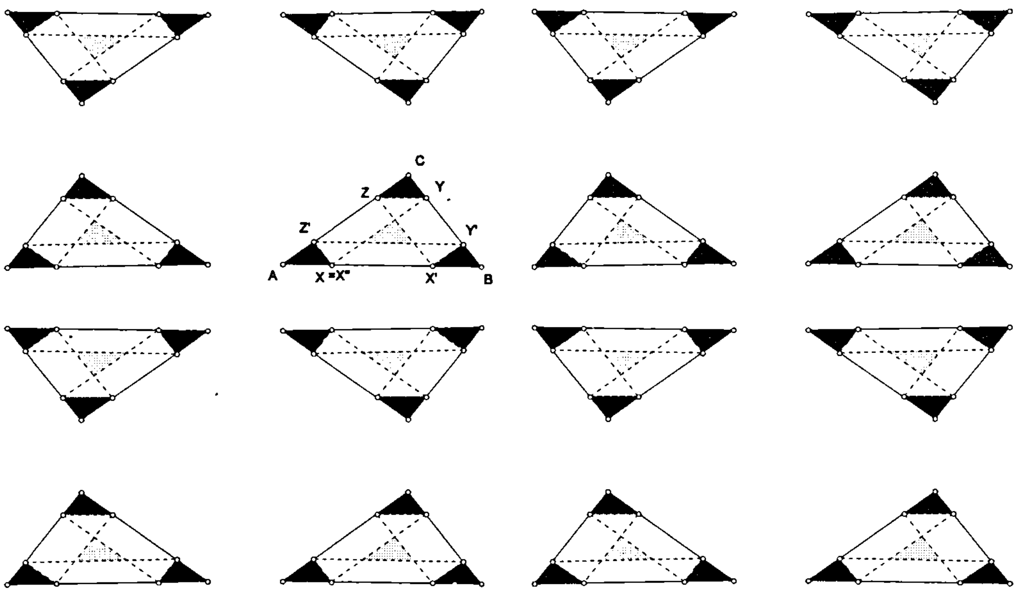


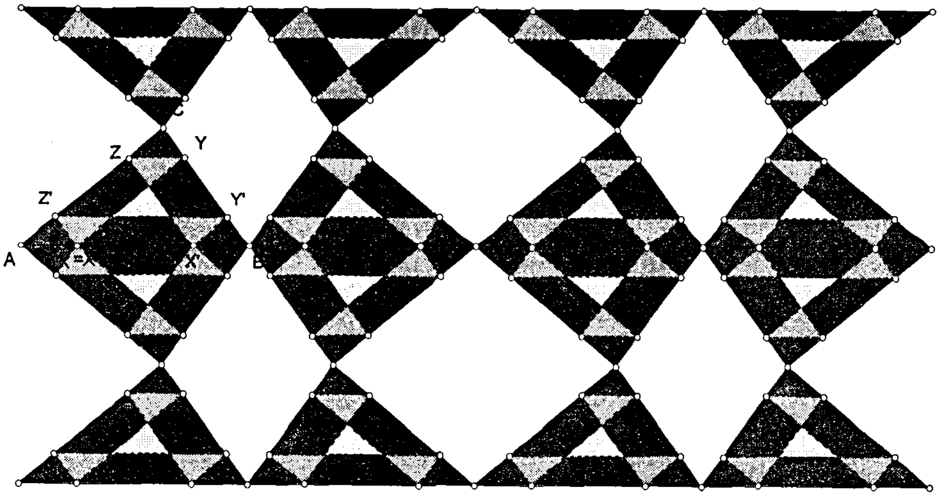
<그림 7> 평행이동에 의한 테셀레이션

라. 기타 이동 모양



<그림 8> B를 중심으로 회전이동(바람개비)

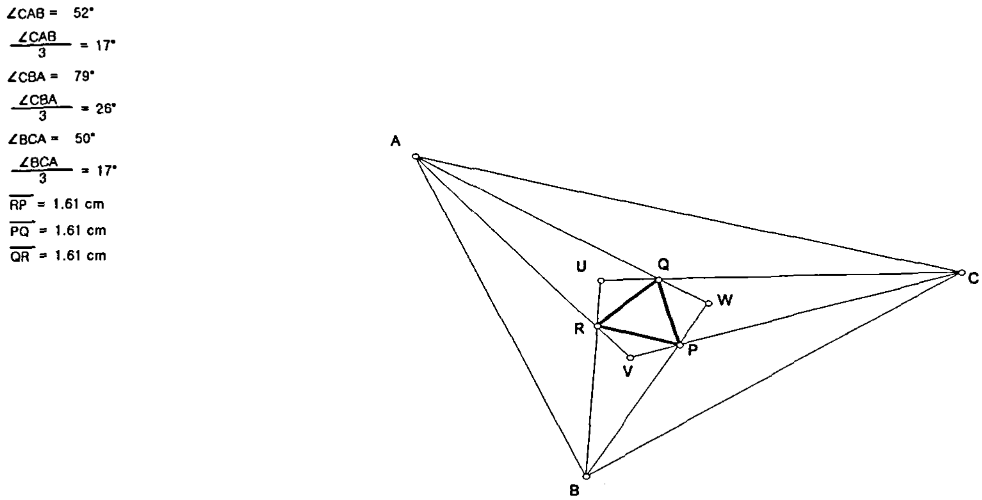




<그림 9> 선대칭 모양

C. Amazing Triangle의 증명

가. Morley 삼각형 증명



1. 삼각형 ARB, BPC, CQA는 AB, BC, AC의 기본이 되고, 각 들이 접해있다.
 사인법칙을 이용하여 선분 AR, BR, BP, CP, CQ, AQ 선분을 구해보자.

2. 코사인 법칙을 삼각형 AQR, BPR, CPQ에 대하여 적용하여 선분 QR, PR, PQ의 길이를 결정한다. 그 다음 정리가 같다는 사실을 이끌어 낸다.

단순성을 위해서 각 $A=3a$, $B=3b$, $C=3c$라 하자. 따라서 $a+b+c=60°$ 이다. 또한, 삼각형 ABC에 외접원을 그리고 반경을 1이라고 가정하자.

$AB=2\sin(3c)$, $BC=2\sin(3a)$, $AC=2\sin(3b)$이다.

삼각형 BPC에서 사인 법칙에 의해

$$\frac{BP}{\sin(c)}=\frac{BC}{\sin(180°-b-c)}=\frac{2\sin(3a)}{\sin(b+c)}=\frac{2\sin(3a)}{\sin(60°-a)}$$

그러므로, $BP=\dfrac{2\sin(3a)\sin(c)}{\sin(60°-a)}$ 이다.

간단히 표현하면 $\sin(3a)=3\sin(a)-4\sin^3(a)$

$$=4\sin(a)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2(a)\right]$$

$$=4\sin(a)[\sin^2(60°)-\sin^2(a)]$$

$$=4\sin(a)(\sin(60°)+\sin(a))(\sin(60°)-\sin(a))$$

$$=4\sin(a)2\sin\left[\frac{60°+a}{2}\right]\cos\left[\frac{60°-a}{2}\right]2\sin\left[\frac{60°-a}{2}\right]\cos\left[\frac{60°+a}{2}\right]$$

$$=4\sin(a)\sin(60°+a)\sin(60°-a)$$

이것을 반복하면

$BP=8\sin(a)\sin(c)\sin(60°+a)$

$BR=8\sin(c)\sin(a)\sin(60°+c)$을 얻는다.

코사인 법칙에서

$$PR^2=BP^2+BR^2-2BP\cdot BR\cos(b)$$

$$PR^2=64\sin^2(a)\sin^2(c)[\sin^2(60°+a)+\sin^2(60°+c)-2\sin(60°+a)\sin(60°+c)\cos(b)]$$

여기에서 $(60°+a)+(60°+c)+b=180°$ 이다.

따라서, $(60°+a)$, $(60°+c)$, b가 존재한다.

반경이 1인 외접하는 것들 중에서 하나를 선택하여 사인 법칙과 코사인 법칙을 응용하면

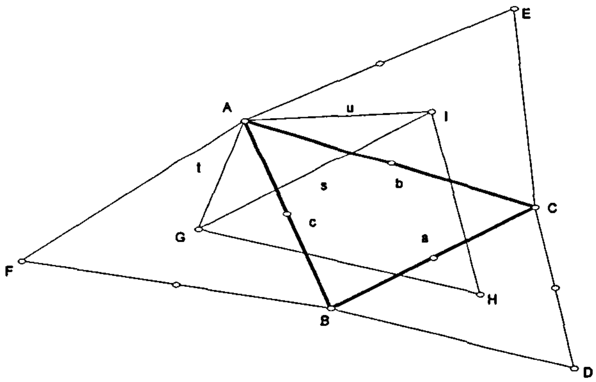
$$\sin^2(b)=\sin^2(60°+a)\sin^2(60°+c)-2\sin(60°+a)\sin(60°+c)\cos(b)]$$

여기에서 $PR=8\sin(a)\sin(b)\sin(c)$ 대칭적으로 생각하여 다른 것을 해보면 QR, PQ가 같다는 사실을 알 수 있다.

따라서, $PR=PQ=QR$이다.

나. Napoleon 삼각형 증명

$\measuredangle IAC = \measuredangle GAB = 30°$ 에서



코사인 법칙을 적용시키면

$s^2 = u^2 + t^2 - 2ut\cos(A+60°)$

삼각형의 무게 중심은 2:1로 내분하는 성질에 의하여

$t = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c = \frac{c}{\sqrt{3}}$

$u = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b = \frac{b}{\sqrt{3}}$

이것을 대입하여 정리하면

$3s^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A+60°)$

코사인 합의 법칙에 의해

$\cos(A+60°) = \cos A\frac{1}{2} - \sin A\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서, $3s^2 = b^2 + c^2 - bc\cos(A) + \sqrt{3}bc\sin(A)$

삼각형 ABC에 대하여 코사인 법칙을 적용시키면

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$와 2배의 삼각형 ABC의 넓이는 $bc\sin(A)$와 같다라는 공식을 위 식에 대입하면

$3s^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}(\text{삼각형 } ABC \text{넓이})$

이것을 대칭적으로 적용시키면 세 개의 무게중심을 연결했을 때 길이가 같다.

Ⅳ. 결 론

고상숙(2001)에 의하면 비형식적으로 실험이나 경험 등으로 충분히 연습을 하여 수학의 정의나 공리를 재발견할 수 있도록 교수 - 학습을 이끌어야 한다고 하였다. 이러한 경험을 통해 학생은 좀 더 기하에 대한 친근함을 느낄 수 있을 것이며 이때에 분석적 방법과 종합적 방법을 통합한 보다 엄밀한 기하 지도에도 잘 적응 될 수 있다.

Amazing Triangle은 그 자체를 만드는 것으로도 학생들이 기하-특히, 삼각형-를 친숙하게 하는데 도움이 될 수 있다. 그 이후에 테셀레이션으로 확장시켜 지도한다면 합동인 도형이 만드는 아름다움을 저절로 느낄 수 있을 것이다. 현재 실행되고 있는 제 7차 교육과정 교과서인 이준열외 4인의 7-나 교사용 지도서에는 테셀레이션이 탐구활동 과제로 소개가 되어있다. 합동에는 전후좌우로 옮겨 다른 도형에 포갤 수 있는 경우(평행이동), 도형을 회전시킨 후 옮겨 다른 도형에 포갤 수 있는 경우(회전이동), 도형을 뒤집어 회전시킨 후 옮겨 포갤 수 있는 경우(선대칭 회전이동)등이 있으므로 다양한 방법으로 합동인지 확인해보도록 권하고 있다. 이 때 컴퓨터를 이용하면 다시 작도를 하지 않아도 선택한 변환의 성질에 따라 구하고자 하는 도형을 쉽게 구할 수 있어 작도에 소비되는 시간을 절약하여 대신 창의적인 자신만의 테셀레이션을 만들 수 있는 것에 시간을 투자할 수 있으므로 능동적인 학습을 이끌 수 있다.

작도에서 임의의 각은 삼등분 할 수 없다는 것은 널리 알려진 사실이다. GSP의 사용을 통해서 Morley 삼각형의 각의 삼등분을 아주 편리하고 쉽게 할 수 있고, 좀 더 정확성을 기할 수 있다는 것도 컴퓨터를 이용한 기하 수업의 장점이라 할 수 있다. 또한, 테셀레이션이 아니라도 능동적 학습을 통해서 다양한 형태의 삼각형의 변환을 통해서 개개인마다 다른 무늬들을 만들 수 있다는 것이다.

학생들이 기하를 활동으로 경험하게 하는 것, 즉 학생들로 하여금 기하를 재 발명하도록 하는 것이다. 이를 통해 학생들이 스스로 명제를 만들 수 있게 되고 증명의 필요성을 자연스럽게 느끼게 하여 학생들로 하여금 확신의 수단으로서 증명을 경험하게 하여야 할 것이다(나귀수, 1998).

본 자료의 효과를 알고자 현재 초등학교 6학년 학생에게 증명을 제외한 위의 과정을 함께 해보았다. 아직까지 학습자의 학습능력은 부족했지만, 무척이나 신기하고 재미있어 하였다. 특히 테셀레이션에서는 삼각형의 모양을 신기하고 아름답게 생각했다. 아울러 자연스럽게 우리 주위에서 볼 수 있는 여러 가지 테셀레이션 모양까지 설명을 해주고 이런 패턴의 아름다움을 통해 더 나아가 수학이라는 학문이 미술분야에도 사용되고, 우리 일상에서도 쉽게 살펴볼 수 있다는 사실을 깨닫게 할 수 있었다.

우리들은 거의 대부분 기하의 아름다움을 채 느끼기도 전에 딱딱한 수업 진행으로 기하란 재미없고 매우 어려운 과목으로 인식하고 있다. 수학을 배워서 어디에 사용할 수 있을까라는 질문에 뚜렷한 답도 얻지 못한 채 어려운 연역적 증명만을 되풀이하면서 말이다. 기하학습이 이런 능동적인 자료를 통한 본인의 경험으로부터 이루어진다면 연역적 증명의 필요성과 함께 수학의 실용적 가치와 심미적 가치를 추구하며 보다 재미있는 기하 수업으로 이끌 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

강행고 외 9인 (2000). 중학교 수학 7-나 교사용지도서, 서울: 중앙교육진흥연구소.

고상숙 (2001). 기하 교수 · 학습 연구와 미국의 교사교육과정 사례, 단국대학교 교과교육연구소 학술발표대회, 47-73.

교육부 (2001). 제7차 교육과정 해설서, 서울: 교육부.

김용운 · 김용국 (1996). 圖形 이야기, 서울: 도서출판 祐成.

나귀수 (1998). 증명의 본질 분석과 지도방향 탐색, 1998년 춘계 대한수학교육발표대회, pp.387-417.

류희찬 · 유공주 · 조민식 (1999). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안 탐색, 1999년 추계 대한수학교육발표대회, pp.227-253.

방승진 (1995). 유클리드 기하학의 재건, 한국수학사학회지 8, pp.41-45.

신동선 · 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

이준열 외 4인 (2000). 중학교 수학 7-나 교사용지도서, 서울: 도서출판 디딤돌.

채희진 외 8인 (1999). 새롭게 다가가는 평면도형 · 입체도형, 서울: 수학사랑.

Choi-Koh, S.S. (1999). A student's learning of geometry using the computer. *Journal of Educational Research* **92(5)**, pp.301-311.

National Council of Mathematics of Teachers. (1991). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. 구광조, 오병승, 류희찬 (공역)(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

National Council of Mathematics of Teachers. (1993). *Activities for Active Learning and Teaching*. Reston, VA: National Council of Mathematics of Teachers.

Hölzl, R. (1996). How does "Dragging" affect the learning of geometry? *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, pp.169-187.

Galindo, E (1998). Assessing justification and proof in geometry classes taught dynamic software. *Mathematics Teacher* **98(1)**, 76-82.

Steen, L.A. (1988). The science of patterns. *Science*, 616(April 29).

http://www.cut-the-knot.com/triangle/Morley/

http://www.cut-the-knot.com/Generalization/NapTess.html