韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 337-360.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 337-360.

함수 그래프 과제에서의 오류 분석 및 처치
-테크놀러지를 활용한 교수학적 환경에서-

안 가 영 (이화여자대학교 대학원)
권 오 남 (이화여자대학교)

그래프 능력을 바탕으로 한 함수의 그래프 표현은 함수 교수·학습상 중요한 위치를 차지한다. 그러나 부적절한 함수 그래프 과제 교수·학습 방법은 학생들의 지식 구성, 이해 과정에 영향을 주면서 수학적 오류를 형성하게 하였다. 그러므로 체계적인 오류 분석을 기반으로 한 좋은 교수학적 프로그램을 통해 수학적 오류를 예견하고 학습 과정에서 그것을 잘 처치, 활용하는 것이 효과적인 함수 교수·학습을 위해 요구된다. 본 연구에서는 지필 환경하에서 함수 그래프 과제를 수행한 학생들에게서 일반적으로 나타나는 수학적 오류를 점검하고, 새로운 교육용 테크놀러지 환경하에서 이러한 수학적 오류가 변화되는 과정을 살펴보고자 하였다. 첫 번째 연구 문제를 위해 고등학생 119명을 대상으로 양적 연구를 실시하였으며, 함수에 대한 개념 이미지로부터의 오류가 가장 많이 나타났음을 확인할 수 있었다. 두 번째 연구문제를 위해 고등학생 2명을 대상으로 사례 연구를 실시하였는데, 그 결과 기존의 수학적 오류가 새로운 교수학적 환경하에서 변화, 극복되는 것을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

21세기에 접어들면서, 현대 사회는 지식 기반·정보화 기반 사회로 변화해 가고 있으며, 이에 따라 학교 교육도 단순 기능인의 양성에서 벗어나 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 초점을 맞추고 있다(교육부, 1999). 특히 수학은 개인의 일상과 직업, 과학·기술적 공동체 속에서 중요한 역할을 담당하며, 가치 있는 문화적 유산이 된다는 점에서 그 의미가 부각되고 있다(NCTM, 2000).

수학의 여러 영역들 중에서 함수 영역은 우리의 생활 주변에서 일어나는 현상을 관찰하여 그 속에 내재된 수학적 법칙이나 형식을 발견하고 이를 구조화시킴으로써 변화하는 현상을 정리하기 위해 필수적으로 요구되는 지식이다(우정호, 1998; 이종희, 1999). 함수 개념을 보다 잘 이해하기 위해서는 다양한 표현 방식을 통해 함수를 이해하는 과정이 요구되는데, 이때 함수 개념을 표현하기 위한 대표적인 시각적 표현 중 하나가 바로 그래프이다.

오늘날 함수 교수·학습 방법은 함수적 경험을 통해 함수적 사고를 신장시키기 보다는, 이미 생성된 산물로써의 지식 형태로 함수 개념을 지도하여 습득시키고 있다(송순희·오정현, 1997). 그리고 함수적 관계 인식을 위해 다중 표현 체계를 활용하기보다는 특정 표현 체계를 중심으로 함수 개념을

교수하였고(정영옥, 1997), 함수 그래프 구성 활동과 함수 그래프 해석 활동을 불균형적으로 전개하였다(Mokros & Tinker, 1987). 또한 주로 지필식 방법에 의존해 그래프 과제를 수행함으로써 교수·학습상의 한계점을 수반하게 되었다(류희찬 · 지현희 · 조민식, 2000).

함수 교수 · 학습 방법상의 문제는 함수 개념에 대한 학생들의 지식 구성 · 이해 과정에 영향을 주면서, 수학적 오류를 형성하게 하였다. 그러므로 체계적인 오류 분석을 기반으로 한 교수학적 프로그램을 통해 수학적 오류를 예견하고 학습 과정에서 그것을 잘 처치, 활용하는 것이 효과적인 함수 교수 · 학습을 위해 요구된다. 이와 관련해 교수학적 프로그램 중에서 교육용 테크놀러지 환경은 함수 그래프 학습을 효과적으로 수행할 수 있게 할 뿐만 아니라 기존의 수학적 오류를 변화, 처치하는데 영향을 줄 수 있다는 가능성으로 인해 주목받고 있다.

본 연구에서는 지필 환경하에서 함수 그래프 과제를 수행한 학생들에게서 일반적으로 나타나는 수학적 오류를 점검하고, 새로운 교육용 테크놀러지 환경하에서 이러한 수학적 오류가 변화되는 과정을 살펴 보고자 한다. 이는 새로운 교육용 테크놀러지 환경이 학생들의 함수 그래프 과제 수행이나 오류 처치를 위한 교육적 가능성을 제시해 줄 수 있는지를 확인할 수 있다는 점에서 중요할 뿐만 아니라, 테크놀러지의 활용이라는 수학 교육 방법의 변화로 인한 새로운 수학적 오류의 출현을 예상해 볼 수 있다는 점에서 중요하다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. 함수의 그래프 표현

함수의 그래프 표현은 그래프 능력(Graphicacy)을 필요로 한다. 그래프 능력에 대해 Roth와 Bowen(2001)은 그래프로부터 의미를 얻거나 이해하는 활동이라고 정의했으며, Friel, Bright(1996)는 그래프적인 방법으로 양적 현상을 이해하는 능력이라고 정의했다. 그리고 Friel, Curcio, Bright(2001)는 그래프에서 나타난 구성 요소들과 이들간의 상관 관계, 효과를 인식하는 것, 특정 그래프 언어를 통해 그래프 형태에서 표현된 정보를 추론하는 것, 그래프들간의 관계를 인식하는 것, 그래프에서 나타난 정보를 해석하는 것을 그래프 능력이라고 정의했다.

그래프 능력은 주로 교육과 공학에서 많이 요구되는데, 공학, 과학에서의 그래프 능력이 특정 함수 그래프에서 나타나는 특징들에 대한 이해와 해석 능력을 의미하는 것에 비해, 교육에서의 그래프 능력은 특정 함수로부터 추상적인 일반화 과정을 유도해 낼 수 있는 능력을 의미한다(Harvey, 1991). 그러므로 본 연구에서는 교육학적 관점에 기반하여 그래프 능력을 '그래프로부터 의미를 얻거나 이해하는 활동'이라고 정의하고자 한다.

그래프 능력은 과제 유형, 과제에 대한 접근 방법, 과제 수준을 통해 확인될 수 있다.

첫째 과제 유형적 측면에서 살펴 보았을 때, 그래프 능력은 그래프 해석 과제와 그래프 구성 과제

를 통해 확인될 수 있다(Bell, Brekke & Swann, 1987; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). 그래프 해석 과제란 그래프 전체나 그래프 일부로부터 의미를 이해하거나 의미를 얻는 활동이다. 그래프 구성 과제란 그래프를 그리는 활동으로, 완전한 의미에서의 그래프 구성은 데이터를 선택하여 축에 이름을 붙이고 축의 눈금을 선택하며 단위를 확인하여 그래프를 그리는 것까지를 의미한다. 그래프 해석 과제와 그래프 구성 과제 뿐만 아니라, 그래프 능력은 예측, 분류, 번역, 축척 과제를 통해서도 확인될 수 있다(Leinhardt 등, 1990). 이때 예측 과제란 분명하게 주어지지 않거나 또는 분명하게 그려지지 않은 그래프를 보고, 그래프의 다른 점들이 어디에 있는지 또는 그래프의 다른 부분이 어떻게 될 것인지를 추론하는 활동이다. 분류 과제란 어떤 특별한 관계가 함수인지를 결정하거나 다른 관계들 속에서 함수임을 확인하는 것, 또는 다른 함수들 사이에서 특별한 종류의 함수를 확인하는 것이다. 번역 과제는 다양한 표현 체계에서 같은 함수인 것을 인식하거나 또는 한 함수를 다양한 표현으로 구성하는 것을 의미한다. 축척 과제는 좌표축, 축에 표시될 눈금의 단위와 관련된 활동이다.

둘째, 접근 방법적 측면에서 살펴 보았을 때, 그래프 능력은 양적/질적 접근법과 국소적/광의적 접근법을 통해 확인될 수 있다(정영옥, 1997; Leinhardt 등, 1990). 양적 접근법이란 그래프에 나타나 있는 수치적인 값에 초점을 맞추는 방법으로써, 주로 축에 주어진 양을 기반으로 한 해석, 구성 활동을 의미한다. 그리고 질적 접근법이란 그래프를 보고 두 변수 사이의 관계나 의미를 구하는 것으로써 정확한 양에 기초하기보다는 그래프의 대략적인 경향을 스케치하거나 해석하는 접근법을 의미한다. 국소적 접근법은 그래프의 한 곳이나 일부분에 집중하여 접근하는 방법이며 광의적 접근법은 국소적인 특징을 구하여 비교하는 활동이다.

셋째, 과제 수준적 측면에서 살펴 보았을때, 그래프 능력은 기본, 중간, 전체 수준에 따라 확인될 수 있다(Caldwell, 1994; Curcio, 1987; Friel 등, 1996; Friel 등, 2001; Mueller & Forster, 2000). 기본 수준은 시각적으로 그래프 요소를 인식하여 읽는 단계이다. 중간 수준은 그래프로부터 자료들을 통합하거나 최소한 한단계 이상의 논리적 추론을 통해 그래프를 이해하는 단계이다. 전체 수준은 과제에 적절한 대답을 일반화하기 위해 정신적 표상과 문맥에 대한 이해를 통합하는 단계이다.

위에서 살펴본 그래프 능력을 기반으로 한 그래프 표현을 통해 함수를 교수·학습하는 것은 다음과 같은 점에서 유용하다.

첫째, 그래프는 함수와 관련된 복잡한 개념과 아이디어를 간결하고 순차적인 방법으로 의사소통할 수 있게 하는 매개체의 역할을 담당한다(Barclay, 1986; Caldwell, 1994; Padilla, McKenzie & Shaw, 1986; Vellom & Pape, 2000). 질문 제기, 자료 수집, 자료 분석, 결과 해석의 단계를 거치는 함수 과제에서, 그래프 표현은 자료 분석 단계에 해당되며 주로 이차원 표면 위에 있는 점이나 선, 영역의 위치를 통해 정보를 전달하는 역할을 담당한다(Friel 등, 1996). 특히 그래프는 함수와 관련된 수치적 자료들의 관계성, 경향, 과정, 결과를 간단하고 순차적으로 보여줄 수 있다. 그래프를 통해 학생들은 일상 생활로부터의 경험적 함수와 대수적 형식에 의해 정의된 수학적 함수와의 관계를 효과적으로 의사소통 할 수 있다(Gravemeijer & Doorman, 1999).

둘째, 그래프는 언어적, 대수적으로 의미 전달시 한계가 있는 정보들을 시각적 형태로 요약하여 효과적으로 제시해 줄 수 있다(우정호, 1998; Michael, 1995). 학생들은 그래프 표현을 통해 대수 방정식에서 쉽게 인식하지 못했던 함수적 관계와 특징들을 역동적, 전체적으로 인식할 수 있을 뿐만 아니라, 함수적 관계에 대한 개별적이고 고립적인 경험 대신 전체적이고 질적인 경험을 할 수 있다(Dugdale, 1987). 또한 학생들은 그래프 표현을 통해 함수 관계들에 대한 패턴을 시각적으로 인식하고 더 나아가 변수들간의 관계를 예측하여 그 성질을 구체화시킬 수 있다(Mokros 등, 1987).

셋째, 함수의 시각적 표현과 관련된 그래프는 변화 현상을 해석하며 구체적인 수학적 지식과 추상적인 수학적 지식을 연결시킬 수 있다는 점에서 함수 개념 이해를 위한 효과적인 수단이 된다(Leinhardt 등, 1990). 이는 그래프가 문자적인 표현 수단으로서의 역할을 담당하면서 일종의 그림 형태로 존재하기 때문에 현상과 수학적 지식을 연결시켜 줄 수 있음을 의미한다(Mueller 등, 2000).

B. 함수 그래프 학습에서의 오류

일반적으로 오류란 착각이나 관측상의 오차 등으로 인한 지각상의 착오를 의미한다. 특히 학문적인 관점에서 오류란 외견상으로는 바르게 보이지만 사실은 틀린 논리적 추론 과정을 뜻하므로 논리학적 문제에 그 토대를 두고 있다. 이러한 관점에서 보았을 때, 수학적 오류란 수학적 지식과 관련된 바르지 못한 논리적 과정으로 정의될 수 있다(송순희 등, 1997).

구성주의적 관점에 따르면, 학생들은 수학적 지식을 개인적으로 구성하고 해석하여 개념화하며, 알려진 규칙이나 절차를 나름대로 고안해서 정정하는 활동을 수행하게 되는데, 이 과정에서 수학적 오류가 나타날 수 있다(Mueller & Forster, 1999). 학생들이 수학적 지식에 대한 잘못된 이해를 바탕으로 하여 특정 문제를 해결하는 과정에서, 수학적 오류는 나름대로의 체계적인 규칙을 지니게 된다. 그러므로 수학적 오류는 문제 해결 과정에서 발생하거나 문제에서 상술된 제한과 부합되는 자신만의 지식을 형성하고 유지시키기 위한 학생들의 적극적인 지식 구성 시도라고 볼 수 있다(Tuska, 1992). 또한 수학적 오류는 수학적 지식에 대한 단순한 장애가 아니라 합당하고 형식적인 근거를 가진 사고 체계라고 할 수 있으며, 반복적이고 분명한 형태를 취한다(Leinhardt 등, 1990).

(가) 개념 이미지로부터의 오류

일반적으로 연역적, 추상적인 수학적 개념은 개념 구조와 비언어적 실체인 개념 이미지에 의해 학습자의 내면에 형성된다. 이때 개념 이미지는 개념과 관련된 시각적 표현이나 심상이나 성질로써, 다양한 경험을 통해 변화, 수정된다(Vinner & Dreyfus, 1989; Vinner, 1992). 그러므로 개념에 대한 완전한 이해는 형식적 정의를 통한 이해 뿐만 아니라 적절하게 형성된 개념 이미지를 통해 이루어진다고 할 수 있다.

함수 개념이 오랜 역사 발생적 과정을 거치는 동안, 중요한 함수적 사고는 상당 부분 감추어지고

형식적인 측면만 남게 되었다. 그러나 학생들은 형식적·표면적인 함수 개념 정의 뿐만 아니라 그 이면에 있는 내적 구조를 모두 이해할 수 있어야 하며 이 과정에서 올바른 개념 이미지의 형성이 요구된다(Vinner, 1992). 하지만 학생들이 함수에 대한 형식적 정의에 부합되는 올바른 개념 이미지를 형성하는데 장애를 지니게 된다면, 개념 이미지로부터의 오류가 나타날 수 있다. 예를 들어 학생들은 자신들이 배운 함수의 대부분이 그래프화 되었을 때 인식하기 쉽거나 명백한 패턴으로 표현되었다는 점에 주목하여, 함수 개념에 대한 형식적인 정의와는 달리 패턴화된 그래프나 연속 그래프만을 함수로 인식하려 한다(Leinhardt 등, 1990; Tuska, 1992). 또한 다대일 대응에 대한 충분한 교육적 예시의 부족과 일대일 대응을 중심으로 한 함수 개념의 도입은 학생들에게 함수가 일대일 대응 관계를 통해 구성된다는 그릇된 개념 이미지를 심어줄 수 있으며, 그들로 하여금 일대일 대응이 아닌 대응 관계에서 비롯될 수 있는 함수 그래프를 부정하게 한다(Vinner 등, 1989).

(나) 특정 관점에의 집착으로 인한 오류

함수 학습에서 특정 관점에의 집착으로 인한 오류는 표현과 관련해 주로 나타난다. 특히 함수 교육이 대수적 표현에 주로 의존하여 진행되어 왔다는 사실은 대수적 관점에의 집착으로 인한 오류를 낳았다(Harvey, 1991; O'Callaghan, 1998). 예를 들어 학생들은 주로 대수적 표현을 통해 함수적 관계나 특징을 해석하려는 경향이 강하다. 이는 방정식에서 그래프로의 이동이 순서쌍을 형성하고 그것을 직교 좌표계에 이동시키는 것과 같은 간단한 일련의 과정만을 포함하고 있는 것에 비해, 그래프에서 방정식으로의 이동은 패턴 발견과 관계되기 때문에 더 어렵다는 점으로 설명될 수 있다(Caldwell, 1994).

(다) 지나친 일반화로 인한 오류

함수 개념을 학습하는 과정에서 학생들은 특정 상황에 적용되는 성질을 다른 상황에까지 확장해 적용하려는 오류를 나타내는데, 본 연구에서는 이러한 오류를 지나친 일반화의 오류라고 정의한다. 예를 들어 학생들은 두 점에 의해 결정되는 직선이 오직 하나라는 선형 함수의 특별한 성질을 지나치게 일반화함으로써, 두 점에 의해 결정되는 함수 그래프는 오직 직선 하나라는 결론을 내린다. 이러한 오류는 학생들에게 처음 도입된 함수 그래프가 선형 함수 그래프였다는 점과, 선형 함수에 대한 학습 기회가 많았다는 교수학적 변인과 밀접하게 연관된다(Bell 등, 1987; Leinhardt 등, 1990). 또한 학생들은 부등식 $p(x)>q(x)$를 그래프로 해결하는 과정에서, 두 함수 $p(x)$와 $q(x)$의 그래프가 교점을 가지지 않는다면 근을 가지지 않는다고 답한다. 이러한 오류는 $p(x)=q(x)$라는 방정식을 그래프로 해결하는 과정에서 얻은 기존 지식, 즉 $p(x)=q(x)$라는 방정식이 그래프로 교점을 가지지 않을 때 근을 가지지 않는다는 것을 지나치게 일반화하여 부등식에 적용한 결과로 나타난다(Tuska, 1992).

(라) 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류

학생들은 어떤 상황에 대한 그래프를 관계적으로 해석·판단하는 과정에서 오류를 나타낸다. 관계

적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류는 점과 구간을 혼동하는 오류, 기울기와 높이를 혼동하는 오류, 그래프를 상황에 대한 그림으로 인식하는 오류로 다시 분류될 수 있다(Leinhardt 등, 1990).

점과 구간을 혼동하는 오류는 점별 초점 방식, 이산적 그래프 구성 방식을 통해 함수 그래프를 학습한 학생들에게서 종종 나타난다. 이 경우, 학생들은 그래프의 일반적인 모양이나 전반적인 특징보다는 개별적인 점들에 초점을 맞춤으로써 오류를 보인다(Preece & Janvier, 1992). 기울기와 높이를 혼동하는 오류는 함수 그래프에서 경사도와 최대값이 의미하는 바를 혼동하는 것에서 비롯되며, 축이나 변수에 대한 이해의 부족과도 연결될 수 있다(Bell 등, 1987; Caldwell, 1997). 이러한 오류는 기울기 대신 높이를 보는 오류, 높이 대신 기울기를 보는 오류, 높이의 차 대신 높이를 보는 오류 등의 오류들과 같은 범주에 속한다. 그래프를 상징적인 표현으로 보는 것이 아니라 상황에 대한 그림으로 인식하는 오류는 문제 상황에 대한 경험으로부터 비롯된 잘못된 직관, 문제 상황에 대한 경험의 부족으로 인한 문제 이해 능력 부족, 그래프 능력의 부족, 축에 대한 인식의 부족, 교수학적 경험으로 인해 나타난다(Bell 등, 1987; Dugdale, 1987; Mokros 등, 1987; Tuska, 1992). 특히 학생들이 처음 접하게 되는 가장 쉬운 그래프의 형태가 주로 그림 그래프였다는 사실은 이후 학생들이 그래프를 상황에 대한 그림의 일종으로 인식하게 하는데 영향을 주었다(Mokros 등, 1987). 이러한 오류는 그래프의 국소적 특징들을 상황에 대한 특징적인 사건에 대응시키려는 국소적 대응 오류, 그래프의 전반적인 특징들을 전체적인 사건에 대응시키려는 전반적 대응 오류의 형태로 다시 분류된다.

(마) 축에 대한 인식상의 장애로 인한 오류

학생들은 축에 대한 이해와 관심의 부족으로 인해 축과 관련된 오류를 나타낸다. 예를 들어 학생들은 축의 눈금을 변화시키는 것이 함수 그래프의 형태에 변화를 줄 수 있다는 것을 잘 이해하지 못한다. 그리고 학생들은 정의역과 치역을 좌표평면에서의 축과 동일하게 생각함으로써, 함수의 정의역과 치역이 각각 수평축, 수직축 전체를 의미한다고 생각한다(Tuska, 1992).

(바) 변수 개념에 대한 장애로 인한 오류

변수는 변화하는 현상에 대한 함수적 관계를 나타내기 위해 사용될 수 있는 효과적인 표현 수단이다. 그러므로 변수에 대한 올바른 이해가 선행되지 않는다면, 함수 그래프 학습에서 학생들은 오류를 나타낼 수 있다. 예를 들어 함수 그래프에서 나타난 변수의 특징을 이해하지 못할 때 학생들은 오류를 나타낸다. Barclay(1986)는 시간과 거리를 두 변수로 다룬 그래프에서 학생들이 거리와 마친가지로 시간도 가역적이라고 생각하고 그래프를 잘못 해석하는 것을 발견하였다. 또한 학생들은 한 변수만을 다룬 함수 그래프 과제는 잘 수행할 수 있지만, 두 개의 변수를 다룬 그래프를 다루는데 있어서는 오류를 보이게 된다. 이때 학생들은 한 변수에 집중하여 다른 변수와의 관계를 인식하지 못하는 고착화 현상을 보이기도 한다. 특히 변수들간의 비율적인 추론이 요구되는 함수 그래프 과제에서는 오류 빈도가 더 높다(Bell 등, 1987). 그리고 변수들 각각의 움직임을 관찰하는 정적 모델에

따라 그래프를 해석하는 학생들은 각각의 점들이 그래프에서 의미하는 바는 이해할 수 있어도 변수들간의 변화량간 대응을 통해 그래프를 역동적으로 해석하는 데에는 장애를 보인다.

C. 함수 그래프 교수·학습에서의 테크놀러지 활용

1. 함수 그래프 교수·학습에서 테크놀러지 활용 효과

테크놀러지를 활용한 함수 그래프 교수·학습은 다음과 같은 교육적 가능성이 확인되었다. 첫째, 함수 그래프 교수·학습에서의 테크놀러지 활용은 함수의 그래프 표현을 잘 이해하게 하고, 다중 표현들간의 번역 능력이나 이들에 관한 해석 능력을 향상시킬 수 있다(권오남·김민경, 2000; 권오남·박경미, 1997; Caldwell, 1994; NCTM, 2000). 둘째, 함수 그래프 교수·학습에서의 테크놀러지 활용은 실제적인 자료에 근거한 함수 학습을 가능하게 하고 학습자가 주도적으로 질문 제기, 자료 수집, 자료 분석, 결과 해석의 단계를 거칠 수 있게 함으로써 함수적 사고 능력을 개발할 수 있게 한다.

이 절에서는 함수 그래프 교수·학습을 위해 활용되는 교육용 테크놀러지 중에서 Microcomputer-Based Laboratory(MBL), Calculator-Based Laboratory(CBL), Calculator-Based Ranger(CBR), 그래픽 계산기에 대해 소개하고 이들의 효과에 대해 고찰해 보도록 하겠다.

(가) 실시간 그래핑 테크놀러지 (Real-time Graphing Technology)

실시간 그래핑이 가능한 테크놀러지 도구로는 MBL, CBL, CBR이 있다.

Microcomputer-Based Laboratory(MBL)는 Technical Education Research Center(TERC)에서 개발한 것으로 컴퓨터를 이용하여 데이터를 수집하고 기록하며 분석하는 실험 시스템 전반을 의미한다. MBL은 수집된 자료들로부터 함수적 관계를 표현하고 이를 의사소통하기 위해 그래프 표현 체계를 사용하므로 효과적인 함수 그래프 교수·학습 방법으로 여겨진다. MBL의 효과는 다음과 같다.

첫째, MBL은 실세계의 물리적 현상에 기반한 구체적 경험과 그 경험으로부터 생성된 그래프 표현이라는 상징적 표현간의 연계성을 확고히 할 수 있다(Barclay, 1986; Beichner, 1990; Brasell, 1987; Lapp & Cyrus, 2000; Michael, 1995; Mokros 등, 1987). 피아제 이론에 따르면 MBL은 구체적 조작과 형식적 조작 사이를 연결하는 교량 역할을 담당하며, 학생들은 실제의 자료를 모으고 분석하는 MBL 활동을 통해 그래프라는 추상화 과정을 직접적으로 경험하게 된다. 이러한 과정들은 물리적인 사건들과 그것들의 그래프 표현 능력 간의 번역에 도움을 줄 수 있으며, 이를 통해 그래프에 대한 일련의 내적 원형을 개발할 수 있게 할 뿐만 아니라 그래프를 통한 의사소통 능력을 향상시키는데 도움이 된다.

둘째, MBL은 학생들이 그래프를 그리는 번거로움으로부터 해방되어 그래프의 특징과 관련 상황을 분석하고 이해하는데 더 많은 시간을 할애하게 해 준다(Brasell, 1987; Lapp 등, 2000; Mokros 등,

1987).

셋째, MBL은 수업 시간에 다룰 수 있는 학습 범위를 확장시킬 수 있다(Lapp 등, 2000; Michael, 1995; Mokros 등 1987). MBL은 물리적 대상을 기반으로 하여 실시되므로, 추상적인 수학적 지식을 물리적인 운동학적 개념과 연결시킬 수 있을 뿐만 아니라 수학에서의 동형 개념과 물리에서의 동형 개념을 연결시킴으로써 과목간의 개념 전이를 쉽게 할 수 있게 해 준다.

넷째, MBL은 실시간에 자료를 수집하여 이를 그래프로 표현할 수 있다(Barclay, 1986; Brasell, 1987; Lapp 등, 2000; Mokros 등, 1987). 컴퓨터 스크린 위에서 빠르고 역동적으로 자료들을 수집하여 그래프로 표현하는 것은 그 속도와 역동성으로 인해 학습자에게 인지적 자극을 줄 수 있으며, 이는 학습자로 하여금 물리적 사건과 그래프간의 인지적 연결을 효과적으로 수행할 수 있게 도와줄 수 있다.

다섯째, MBL은 학습자에게 다양한 학습 형태를 제공해 줄 수 있다(Brasell, 1987; Lapp 등, 2000; Michael, 1995; Mokros 등, 1987). MBL 활동을 통해 학생들은 물리적 실험 자료들과 탐침기를 조작하는 운동학적 경험을 직접 수행할 수 있으며, 자신들의 경험으로부터 얻은 자료들이 의미하는 바를 그래프를 통해 직접적으로 경험할 수 있다. 이와 관련해 Beichner(1990)는 물리적 사건과 그래프 표현에 대한 학생들의 직접적인 경험과 통제가 MBL을 통한 그래프 능력 향상에 결정적인 영향을 미친다는 결론을 내렸다.

CBL과 CBR은 Texas Instrument(TI)사에서 개발한 도구로서 수학 및 과학 학습을 위한 실험실 체제 구축을 가능하게 하며 MBL에서의 기능을 거의 대부분 포함하고 있으므로, 학생들로 하여금 실질적인 경험으로부터 수학적 연관성을 탐구할 수 있게 하는데 효과적이다(김래영, 1999; Kwon, 2002). CBL은 계산기와 연결된 탐침기를 통해 움직임, 온도, 빛, 산성도, 힘, 소리 등으로부터의 자료를 그래픽 계산기에 표현함으로써 학생들이 직접 자료들을 분석하고 수학적 경험과 학교 수학과의 관계를 효과적으로 연결하는데 도움을 줄 수 있다(Bruneningsen & Krawiec, 1998). CBR은 CBL의 여러 쓰임 중에서 움직임만을 관찰하기 위해 고안된 것이다.

(나) 그래픽 계산기(Graphic Calculator)

그래픽 계산기를 활용한 함수 그래프 교수·학습에서의 효과에 대해 살펴 보도록 하겠다. 우선 그래픽 계산기를 통해 학생들은 여러 종류의 함수를 빠르고 정확하게 그릴 수 있으며, 다양한 방법으로 그래프를 조작할 수 있다(권오남 등, 1997; Waits & Demana, 1990). 즉 기존의 지필식 방법으로 그래프를 그릴 때에 비해 그래프로부터 함수적 관계나 그래프 표현에 더 집중할 수 있으며 함수의 추상성과 구체성 사이의 간격을 효과적으로 연결함으로써 반영적 추상화 과정을 거칠 수 있게 된다(Ayers, Davis, Dubinsky & Lewin, 1989; Heid, 1988). 그리고 학생들은 함수값들을 점별로 수치 측정하지 않으면서도 그래프에 접할 수 있게 되어, 그래프의 전체적인 특징들에 집중할 수 있게 된다(Rich, 1990). 이는 함수 그래프에 대한 학생들의 접근 방법이 산술적이고 계산적인 것으로부터 시각

적이고 직관적인 방법으로 변화됨을 의미한다. 둘째, 그래픽 계산기는 다양한 표현 체계를 통해 함수적 관계를 효과적으로 나타낼 수 있다(권오남 등, 1997; Ruthven, 1990; Tuska, 1992). 특히 그래픽 계산기는 학생들에게 수학적 결과에 대한 추측을 검토하게 할 수 있는 수치적, 그래프적 피드백을 제공해 줌으로써, 학생들로 하여금 수치적, 대수적, 그래프 표현을 효과적으로 연결할 수 있게 하여 함수 개념을 전체적인 관점에서 이해할 수 있게 해 준다.

2. 학습자와 테크놀러지의 상호 작용 유형

테크놀러지를 활용한 교수학적 환경에서 새롭게 나타날 수 있는 수학적 오류는 테크놀러지와 학습자와의 상호 작용 유형에 따라 다르게 나타난다. 그러므로 이 절에서는 테크놀러지와 학습자와의 상호 작용 유형을 고찰해 보고자 한다(Galbraith, Renshaw, Goos & Geiger, 1999; Mueller 등, 2000).

첫째, 테크놀러지가 학습자의 수학 학습에서 주체가 되는 상호 작용 유형(technology as master)이 있다. 이러한 상호작용은 학습자가 테크놀러지 활용에 대해 두려움을 지니고 있거나 충분히 수학적 지식을 이해하지 못했을 때 나타나게 된다. 이 경우 학생들은 테크놀러지를 제한적으로 사용하게 되거나 통제하지 못하게 되며 그것의 한계성을 인식하지 못함으로, 테크놀러지 활용을 통해 나타난 풀이 결과를 절대적, 맹목적으로 받아들이게 되기 쉽다.

둘째, 테크놀러지가 수학적 문제 해결에서 단순한 기계적 작업만을 도와주는 보조자 역할을 하는 상호 작용 유형(technology as servant)이 있다. 이러한 상호 작용에서 학습자는 테크놀러지를 통제할 수 있으며, 테크놀러지는 암산이나 지필식 계산을 대신해 주는 단순한 기술적 보조자의 역할을 담당한다. 그러나 만일 학습자가 테크놀러지를 지나치게 신뢰하게 된다면 그는 테크놀러지로 인해 유발될 수 있는 오류 가능성을 모니터하여 결과를 판단하는 일련의 과정을 간과하게 되기 쉽다.

셋째, 테크놀러지가 학습 동료로서의 역할을 담당하게 되는 상호 작용 유형(technology as partner)이 있다. 이러한 상호 작용에서 테크놀러지는 단순히 결과를 만들어내는 것 이상으로 함께 탐구하는 동료의 역할을 담당하며 이때 학습자와 테크놀러지의 권위는 균형을 이루게 된다. 그리고 학습자는 테크놀러지를 통제할 수 있을 뿐만 아니라 다른 수학적 성질들을 활용해서 테크놀러지가 대신한 수학적 결과들을 모니터하고 평가할 수 있다.

넷째, 테크놀러지가 자아의 확장 형태로서 역할을 담당하게 되는 상호 작용 유형(technology as an extension of self)이 있다. 이러한 상호 작용에서 학습자는 테크놀러지를 효과적으로 사용할 수 있으며 단순한 문제 해결 뿐만 아니라 자신의 수학적 행위를 확장시키는 것에까지 테크놀러지를 활용할 수 있다.

3. 테크놀러지를 활용한 함수 그래프 교수·학습에서의 오류

테크놀러지를 활용한 함수 그래프 교수·학습에서의 오류 유형을 살펴 볼 수 있는데, 기존의 연구

가 주로 그래픽 계산기와 관련된 오류 분석이었음을 고려하여, 그래픽 계산기의 활용으로부터 나타날 수 있는 오류 유형을 주로 살펴 보고자 한다.

그래픽 계산기의 사용으로 인한 함수 그래프 학습에서의 오류는 그래픽 계산기의 잘못된 사용으로 인한 오류와 그래픽 계산기로부터 발생한 오류로 구별될 수 있다(Mueller 등, 1999; Mueller 등, 2000).

첫째, 그래픽 계산기의 잘못된 사용으로 인한 오류는 그래픽 계산기의 조작법이나 기능을 잘 모르는 학생들에게 나타나는 오류로서, 그래픽 계산기의 잘못된 사용으로부터 수용 불가능한 대답이나 문제와 무관한 답의 유도를 허용하는 것을 포함한다. 그리고 그래픽 계산기의 한계점을 인식하지 못하는 데에서 나타나는 오류도 포함된다.

둘째, 그래픽 계산기로부터 발생한 오류는 그래픽 계산기 창에 나타난 그래프 해석 과정에서 발생하는 오류가 대부분이며, 이는 그래픽 계산기의 한계점을 고려하지 않은 채 해석한 것에서 기인하므로 그래픽 계산기의 잘못된 사용으로 인한 오류와 중복될 수 있다. 이 경우에 해당되는 오류로는 다음과 같은 것들이 있다. 첫째, 학생들은 그래픽 계산기 창 위에 나타난 곡선을 곡선으로 보는 것이 아니라 작은 직선들의 집합으로 보는데, 이는 그래픽 계산기가 그래프의 곡률을 충분히 잘 나타내는 데 있어 기술적 한계를 지니고 있다는 점을 인식하지 못하는 것에서 비롯된다. 둘째, 학생들은 유리수가 모든 수체계를 나타낸다는 오류를 나타낼 수 있다(Tuska, 1992). 무리수근을 가지는 함수의 그래프를 계산기 화면에 나타냈다 할지라도 학생들은 그래픽 계산기에 나타난 십진법수에 의해 근을 잘못 결정할 수 있으며, 모든 근 혹은 모든 수가 유리수 체계만으로 설명될 수 있다는 오류를 나타낼 수 있다. 셋째, 학생들은 그래픽 계산기에서 표현된 그래프가 불연속점을 나타내지 못한다고 생각하는데, 이 역시 그래픽 계산기의 기술적 한계에 대한 인식의 부족에서 비롯되었다고 설명할 수 있다. 넷째, 학생들은 함수적 관계에 대한 적절한 수치적, 대수적 정보를 고려하지 않은 채, 시각적으로 나타난 그래프만을 해석하는 과정에서 오류를 범한다. 다섯째, 학생들은 그래픽 계산기에서의 좌표축을 설정하는 과정에서 오류를 범할 수 있다. 이때 학생들은 부적절한 축척 설정을 통해 그래프의 전반적인 특징을 확인하는데 실패하게 된다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 함수 그래프 과제에서의 일반적인 수학적 오류들을 살펴 보고, 그러한 오류가 그래픽 계산기와 CBR을 활용한 교수학적 상황에서 어떻게 변화해 갈 수 있는지에 대해 고찰해 보기 위해 다음과 같은 실험을 실시하였다.

A. 연구 절차 및 대상

우선 본 연구에서는 지필 환경에서 함수의 그래프 표현을 학습한 학생들이 보이는 수학적 오류를 살펴 보고자 하였다. 이를 위해 서울과 춘천 소재 고등학교 2학년 남녀 학생 119명을 대상으로 하여 함수 그래프 과제 검사를 실시하였다. 학생들은 수학에서의 학업 성취도가 중위권 수준이었으며, 문과 계열에 속하였고 모두 지필식 방법으로 함수를 배웠다.

그런 다음 그래픽 계산기와 CBR을 활용한 교수학적 환경에서 기존의 수학적 오류가 변화해 가는 것과 새로운 오류가 발생되는 것을 살펴 보기 위해, 과제 기반 면담 연구를 실시하기로 하고, 위의 검사에 참여한 학생 중 2명을 선발하였다. 연구 대상자는 서울의 Y 여자 고등학교 2학년 학생 B와 T였다. 총 6번의 과제 학습은 방과후에 실시되었으며, 매회 2시간 정도의 시간이 소요되었다. 과제 학습이 끝난 후에는 사후 검사를 통해 학생들의 오류 변화를 관찰하였다.

B. 연구 방법 및 도구

1. 함수 그래프 과제 검사지

본 연구에서는 첫 번째 연구 문제를 살펴 보기 위해, 함수 그래프 과제 검사지를 개발하였다. 검사지는 현재 학생들이 학습하고 있는 수학 교과의 내용과 직접적으로 관련된 함수 그래프 문항과, 교과 외적 맥락에서의 함수 그래프 문항으로 구성되었다. 학생들이 현재 학습하고 있는 수학 교과의 내용과 관련된 문항은 공통수학의 함수 단원과 수학 I 과정의 미분 단원에 해당되며, 이를 위해 Tuska(1992)의 실험 문항을 재구성하였다. 그리고 교과 외적 맥락에서의 함수 그래프 문항 구성을 위해 Barclay(1986)의 실험 문항, Bell 등(1987)의 실험 문항, Michael(1995)의 실험 문항(GIST, MCT)을 재구성하였다. 이때 검사지의 문항 신뢰도는 0.6374로 나타났다.

검사지의 문항들은 과제 유형에 따라 해석/구성 과제와 예측/번역/스케일 과제로 분류되었으며, 과제에 대한 접근 방법에 따라 국소적/광의적, 양적/질적 접근 과제로, 과제 수준에 따라 기본 수준, 중간 수준, 전체 수준으로 문항들을 분류하여 해당 수준에서의 학생들의 그래프 능력을 살펴 보고자 하였다. 또한 검사지의 문항들은 개념 이미지로부터의 오류(가군), 특정 관점에의 집착으로 인한 오류(나군), 지나친 일반화로 인한 오류(다군), 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류(라군), 축에 대한 인식상의 장애로 인한 오류(마군), 변수 개념에 대한 장애로 인한 오류(바군) 유발 가능성에 따라 다시 분류되었다.

<표 1> 함수 그래프 과제 검사지의 문항 분류

검사 내용		문항 번호
과제 유형	해석 과제	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13
	구성 과제	3, 9, 11, 12
	예측 과제	3, 11
	번역 과제	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12
	축척 과제	13
과제에 대한 접근법	양적 접근법	1, 2, 12, 13
	질적 접근법	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
	국소적 접근법	1, 2, 4, 5, 13
	광의적 접근법	2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
과제 수준	기본 수준	1, 4, 6, 7
	중간 수준	3, 5, 10, 11, 12, 13
	전체 수준	2, 8, 9
오류 영역	가군	6
	나군	1, 2, 6, 12
	다군	6
	라군	3, 8, 9, 10, 11
	마군	7, 13
	바군	4, 5

2. 그래픽 계산기(TI-92)와 CBR / 과제학습 활동지

본 연구에서는 TI-92 기종의 그래픽 계산기를 사용하였다. 함수 그래프 학습시 TI-92는 대수식과 그것의 그래프 표현, 수치적 표현을 함께 보는데 매우 효과적이며, 축 설정 기능이나 *zoom* 기능은 함수 그래프의 특징적인 면들을 확인하는데 매우 유용하다. CBR은 TI-92에 연결되어 움직임이라는 물리적 자료들을 수집하는데 활용되었으며, 실시간으로 그래픽 계산기의 창에 그래프로 표현되었다.

활동지는 공통 수학의 함수 단원과 수학1의 미분 단원에 관련된 함수 그래프 과제로 구성되었다. 활동지 1-4를 위해 공통수학과 수학1(박두일 · 신동선 · 김기현 · 박복현, 1994)에 있는 내용들을 재구성하였다. 그리고 활동지 5-6를 위해 최선준(2000)의 과제 학습 활동지를 재구성하였다.

활동지 1과 2는 공통 수학의 함수 단원에 해당하는 내용으로 구성되었다. 활동지 3과 4는 수학1의 미분 단원에 해당하는 내용으로 구성되었다. 활동지 1-4는 TI-92를 활용하면서 함수 그래프 과제를 학습할 수 있도록 구성되었다. 활동지 5와 6은 활동지 4에서 학습한 위치와 속도, 가속도 개념을 그래프적 표현을 통해 좀 더 심층적으로 학습하기 위해 구성되었다. 즉 물리적인 변화 개념과 상징적인 변화 개념을 체험할 수 있는 실험을 통해, 학생들에게 직접 변화의 개념을 경험할 수 있는 기회를 제공함으로써 위치와 속도, 가속도 개념을 학습할 수 있게 하였으며 CBR이 사용되었다.

3. 자료 수집 및 처리

학생들의 일반적인 오류를 살펴보기 위해, 함수 그래프 과제 검사지의 답안을 분석하였다. 이때 문항에 따른 각 학생들의 답안 표기 빈도를 백분율로 정리한 후, 이를 바탕으로 각 오류 유형에 해당되는 문항의 정·오답 비율과 그래프 능력 관련 요소들을 평가하였다.

학생들의 오류 변화를 살펴보기 위해, 과제 기반 면담 연구법의 형식으로 진행된 사례 연구에서는 학생의 지식 구조, 인지적 과정, 정서 등을 파악하고자 하였다. 그리고 연구 대상자와 연구자간의 상호 작용과 연구 대상자의 학습 과정은 녹음·기록되었다.

Ⅳ. 결과 분석

A. 함수 그래프 과제 검사지에서 나타난 학생들의 오류 유형 분석

함수 그래프 과제 검사지의 문항들은 과제 유형, 과제에 대한 접근법, 과제 수준, 오류 유형에 따라 분류되었다. 각 유형별 정답율, 오답율은 아래와 같다.

<표 2> 검사지의 문항 유형별 정답율

	과제별 그래프 능력					접근별 그래프 능력				수준별 그래프 능력		
	해석	구성	예측	번역	축척	양적	질적	국소적	광의적	기본	중간	전체
정답율 (%)	67.88	52.73	66.81	62.77	60.50	64.29	62.94	68.07	60.69	72.90	63.03	50.70

<표 3> 오류 유형별 오답율

오류 유형	가군	나군	다군	라군	마군	바군
오답율(%)	57.10	40.12	57.10	41.02	24.35	31.95

첫째, 개념 이미지로부터의 오류는 그래프에 대한 해석 능력, 광의적 접근 능력이 부족한 것에서 비롯되었다. 둘째, 특정 관점에의 집착으로 인한 오류는 그래프에 대한 해석, 구성, 번역 능력과 양적, 국소적 접근 능력의 부족할 때 주로 나타났다. 셋째, 지나친 일반화로 인한 오류는 그래프에 대한 해석, 번역 능력과 질적 접근 능력이 부족할 때 주로 나타났다. 넷째, 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류는 해석, 구성, 예측, 번역 능력과 질적, 광의적 접근 능력이 부족할 때 주로 나타났다. 다섯째, 축에 대한 인식상의 장애로 인한 오류는 해석, 번역, 축척 능력과 양적, 국소적 능력이 부족할 때 주로 나타났다. 여섯째, 변수 개념에 대한 장애로 인한 오류는 해석, 번역 능력과 질적, 국소적 접근 능력이 부족할 때 주로 나타났다.

B. 사례 연구 분석

1. 연구 대상 B의 사례

(가) 함수 그래프 과제 검사지에 대한 분석

함수 그래프 과제 검사지의 문항들은 과제 유형, 과제에 대한 접근법, 과제 수준, 오류 유형에 따라 분류되었다. 각 유형별 정답율, 오답율은 아래와 같다.

<표 4> 검사지의 문항 유형별 정답율 (학생 B)

	과제별 그래프 능력					접근별 그래프 능력				수준별 그래프 능력		
	해석	구성	예측	번역	축척	양적	질적	국소적	광의적	기본	중간	전체
정답율 (%)	44.44	0	0	30	100	50	30	60	22.22	25	33.3	33.3

<표 5> 오류 유형별 오답율 (학생 B)

오류 유형	가군	나군	다군	라군	마군	바군
오답율(%)	100	75	100	100	0	0

첫째, 개념 이미지로부터의 오류는 기울기에 대한 형식적인 개념 정의와 그것의 그래프적 개념 이미지를 연결시키지 못하는 것에서 나타났다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 번역 능력, 질적, 국소적 접근 능력이 부족한 것에서 비롯되었다. 둘째, 특정 관점에의 집착으로 인한 오류는 주어진 대수식이 의미하는 바를 그래프로 정확하게 표현하지 못하고, 그래프로부터 대수식을 만들 수 없는 것에서 나타났다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 구성, 번역 능력과 양적, 국소적, 광의적 접근 능력이 부족한 것에서 비롯되었다. 셋째, 지나친 일반화로 인한 오류는 함수 그래프에 대한 선형성 선호에서 나타났다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 번역 능력과 질적, 국소적 접근 능력이 부족한 것에서 비롯되었다. 넷째, 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류는 그래프를 상황에 대한 그림으로 인식하는 것에서 나타났다. 이러한 오류는 해석, 구성, 번역 능력과 질적, 광의적 접근 능력이 부족한 것에서 나타났다.

(나) 테크놀러지를 활용한 교수학적 환경에서의 오류 변화

개념 이미지로부터의 오류는 정의역에 대한 인식에서 나타났다. 학생 B에게 함수에서의 정의역과 치역의 정의에 대해 질문했을 때, 그는 x라는 변수가 포함되어 있는 단항식 전체를 정의역으로 정의하고 그래프상에서 정의역을 x축 좌표 전체라고 대답하였다. 이러한 오류는 정의역에 대한 정확한 개념의 부재와 그로 인한 그래프 해석 능력, 국소적, 양적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 정의역과 치역에 대한 개념을 다시 설명하고 그래픽 계산기의 trace키를 활용하여 그래프 위의 점들

을 확인하게 하였다. 그 결과 학생 B는 정의역을 정확하게 정의할 수 있게 되었으며, 그래프를 통해 정의역 구간을 지적할 수 있게 되었다.

특정 방법에의 집착으로 인한 오류는 거리, 속도, 가속도의 관계를 살펴보는 과정에서 나타났다. 학생 B는 거리에 대한 식이 주어졌을 때 대수적인 방법으로 그냥 식을 미분해서 대입하는 방법을 통해 속도와 가속도를 구하려 하였다. 대수적 방법에의 집착은 그래프를 통해 속도, 가속도의 변화를 살펴보는데 있어 오류를 유발시켰다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 번역 능력, 질적, 광의적 접근 능력의 부족, 대수적 방법 중심의 기존 학습 경험에서 비롯되었다. 그래서 CBR을 활용한 과제 학습을 통해 위치, 속도, 가속도의 관계를 그래프로 인식하게 하고, 대수식으로부터 그래프를 구성하여 이를 적절하게 해석할 수 있도록 지도하였다. 그 결과, 학생 B는 그래프를 통해 함수적 관계를 이해할 수 있게 되었다.

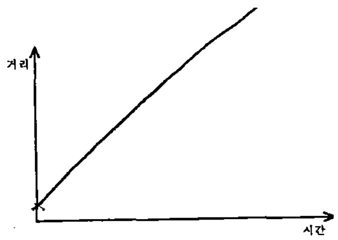
지나친 일반화로 인한 오류는 시간-거리 그래프에 관한 예측 과제에서 나타났다.

R : 이번에는 점점 더 속도를 빨리 하면서 멀리 걸어나간다고 생각해봐요.

B : 속도가 증가한다고 해서... 그냥 증가하는 거니까, 직선으로...

R : 직선만 있다고 생각했어요?

B : 네... 그냥 직선인 줄 알았어요.

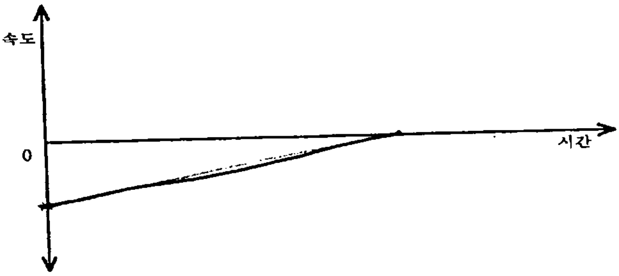


<그림 1> 지나친 일반화로 인한 오류의 예 (학생 B)

위의 상황에서 학생 B는 걸어 나갈 때 그래프가 양의 기울기를 가지게 된다는 것은 알고 있었으나, 속도가 점점 빨라질 때 그래프가 유선형으로 변한다는 것을 이해하지 못했다. 대신 그는 속도의 변화와는 상관없이 그래프가 직선의 형태로 나타난다고 대답하였다. 이러한 오류는 등속도 운동을 하는 물체의 시간-거리 관계가 직선 그래프로 표현되었다는 학습 경험으로부터의 사고 경직과 그래프 구성, 예측, 번역 능력, 질적, 광의적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 CBR을 활용한 과제 학습을 통해 속도의 변화가 그래프에서의 곡률 변화에 영향을 미친다는 것을 확인시켰다. 그 결과 학생 B는 선형 그래프를 선호하는 경향에서 벗어날 수 있었으나, 대신 유선형 그래프를 선호하는 경향을 보이기도 하였다.

학생 B는 그래프를 상황에 대한 그림으로 인식함으로써 관계적 해석과 판단상의 장애로 인한 오류를 나타냈다.

R : 이번에는 점점 빠른 속도로 가까이 걸어온다고 생각해 봐요. 그렇다면 시간-속도 그래프는 어떻게 그려질 것 같아요?
B : 가까이 다가오니까... 아래에 그려지겠네요... 그리고 가까이 다가오니까... (원점으로 다가오는 직선 그래프를 그린다)



<그림 2> 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류의 예 (학생 B)

이때 학생 B는 다가올 때 속도가 음의 값을 가진다는 것은 알고 있었으나, 속도의 변화에 초점을 맞추지 않고 다가온다는 움직이는 방향에 집중하면서 축에 다가오는 그래프를 그렸다. 그래프를 상황에 대한 그림으로 인식하는 오류는 그래프에 대한 해석, 구성 능력과 광의적, 질적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 CBR을 활용한 과제 학습을 통해 시간-속도 그래프를 확인하게 함으로써 기존 오류를 처치하였다.

(다) 테크놀러지를 활용한 교수학적 환경하에서 나타난 오류들

학생 B는 자신과 테크놀러지와의 관계가 지배적 관계, 협동적 관계일 때 오류를 나타냈다. 이때 나타나는 학생 B의 오류는 다음과 같다.

첫째, 처음 과제학습을 시작했을 때 학생 B는 그래픽 계산기의 사용법을 잘 몰랐기 때문에 그래픽 계산기의 창에서 나타난 그래프 특징을 확인할 수 없었다. 그래서 학생은 대략적인 개형만을 보고 그래프 특징을 확인하였으며, 이때 수치적, 대수적 점검을 하지 않음으로써 오류를 나타냈다. 둘째, 학생 B는 그래픽 계산기 창에서 연속인 그래프가 불연속적인 직선들의 집합으로 보인다는 것을 알게 되었다. 이러한 그래픽 계산기의 기술적 한계는 그래픽 계산기를 통한 그래프의 연속성을 시각적으로 탐구하게 하는데 장애를 느끼게 하였으며, 결국 학생 B는 연속 함수를 시각적으로는 불연속 함수로 인식하고 인지적으로는 연속 함수로 인식하는 괴리를 경험하게 되었다.

2. 연구 대상 T의 사례

(가) 함수 그래프 과제 검사지에 대한 분석

함수 그래프 과제 검사지의 문항들은 과제 유형, 과제에 대한 접근법, 과제 수준, 오류 유형에 따라 분류되었다. 각 유형별 정답율, 오답율은 아래와 같다.

<표 6> 검사지의 문항 유형별 정답율 (학생 T)

	과제별 그래프 능력					접근별 그래프 능력				수준별 그래프 능력		
	해석	구성	예측	번역	축척	양적	질적	국소적	광의적	기본	중간	전체
정답율 (%)	55.56	75	100	50	100	75	50	80	44.44	50	100	33.3

<표 7> 오류 유형별 오답율 (학생 T)

오류 유형	가군	나군	다군	라군	마군	바군
오답율(%)	100	50	100	40	50	0

첫째, 개념 이미지로부터의 오류는 기울기 개념에 대한 인식에서 나타났다. 이때 학생 T는 그래프 상에서 직선이 x축의 양의 방향과 θ 각을 이룰 때 $\tan\theta$ 가 기울기라는 사실은 알고 있었으나, θ 가 90도일 때도 기울기가 0라고 대답함으로써 정의역과 치역에 대한 부정확한 개념 이미지를 나타내었다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석 능력, 질적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 둘째, 특정 관점에의 집착으로 인한 오류는 극값에 대한 정의에서 나타났다. 학생 T는 극값을 대수적으로 구할 수 있었으나. 그래프를 보고 극값을 찾는 것에는 실패하였는데, 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 번역 능력과 양적, 국소적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 셋째, 지나친 일반화로 인한 오류는 기울기 개념과 관련해서 나타났다. 학생 T는 기울기값이 0일 때 직선이 x축과 평행하다는 점을 일반화하여, 직선이 y축과 평행할 때에도 기울기값이 0이라고 생각했다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석 능력, 질적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 넷째. 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류는 시간-거리 그래프에서 기울기와 높이를 혼동하는 것에서 나타났다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 번역 능력과 광의적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 다섯째, 축에 대한 인식에서의 장애로 인한 오류는 좌표축에 대한 인식에서 나타났다. 학생 T는 두 그래프를 비교하는 과제에서 축들의 간격이 동일한지의 여부에 대해 간과하였는데, 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 축척 능력과 양적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다.

(나) 테크놀러지를 활용한 교수학적 환경하에서의 오류 변화

개념 이미지로부터의 오류는 정의역과 치역을 정의하는 과정에서 나타났다. 학생 T는 정의역과 치역을 각각 x축과 y축에 있는 모든 점들이라고 설명하였는데 이러한 오류는 정의역에 대한 정확한 개념의 부재와 그로 인한 그래프 해석 능력, 국소적, 양적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 정의역과 치역에 대한 개념을 다시 설명하고 그래픽 계산기의 trace키를 활용하여 그래프 위의 점들을 확인하게 하였다. 그 결과 학생 T는 정의역을 정확하게 정의할 수 있게 되었으며, 그래프를 통해 정의역 구간을 지적할 수 있게 되었다.

특정 관점에의 집착으로 인한 오류는 거리, 속도, 가속도의 관계를 살펴보는 과정에서 나타났다.

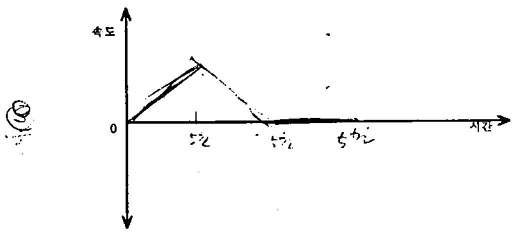
학생 T는 거리에 관한 함수식으로부터 속도, 가속도를 구할때 대수적 방법만을 사용하였으며, 그래프를 통해 이들간의 관계를 추론해 내지 못했다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 번역 능력, 질적, 광의적 접근 능력의 부족, 대수적 방법 중심의 기존 학습 경험에서 비롯되었다. 그래서 CBR을 활용한 과제 학습을 통해 위치, 속도, 가속도의 관계를 그래프로 인식하게 하고, 대수식으로부터 그래프를 구성하여 이를 적절하게 해석할 수 있도록 지도하였다. 그 결과, 학생 T는 그래프를 통해 함수적 관계를 이해할 수 있게 되었다.

학생 T는 절대값이 없는 함수식만이 미분가능한 함수식이라고 생각함으로써 지나친 일반화의 오류를 나타냈다. 이러한 오류는 절대값이 포함된 함수식을 미분 불가능한 함수의 예로 주로 다루어왔던 학습 경험, 그래프에 대한 해석 능력, 국소적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 그에 대한 반례를 제시하고 그래픽 계산기를 활용해 그래프를 그린 후 미분가능성을 직접 확인하게 하였다. 그 결과 학생 T는 절대값이 포함된 함수식도 미분가능할 수 있음을 이해했다.

학생 T는 시간-거리 그래프와 시간-속도 그래프를 혼동함으로써 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류를 보였다.

R : 처음 5초 동안은 같은 속도로 걸어 나갔고, 다음 5초 동안은 점점 느린 속도로 걸어 나갔어요. 그리고 마지막 5초 동안은 제자리에 가만히 서 있었어요. 그렇을 때 시간-속도 그래프를 그려봐요.

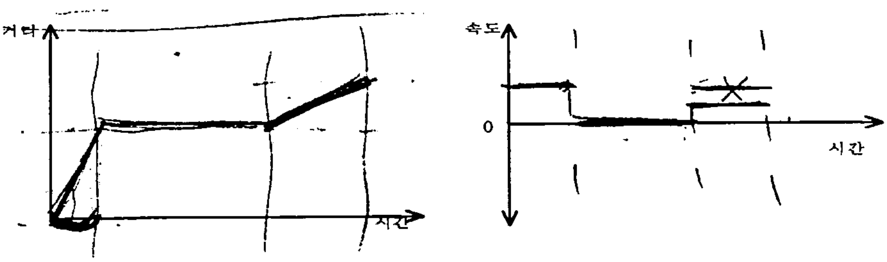
T : 일정한 속도로 걸어나간다고 했으니까 이렇게 그렸구요, 느린 속도로 걸어 나간다고 했으니까 이렇게 그렸어요. 그리고 가만히 있는다고 했으니까 이때는 속도가 0이잖아요. 그래서 이렇게 그렸어요.



<그림 3> 시간-거리 그래프와 시간-속도 그래프 혼동 (학생 T)

이때 학생 T는 처음 5초 동안의 움직임에 대한 그래프를 그릴 때 시간-속도 그래프 대신 시간-거리 그래프를 그렸다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 구성, 번역 능력과 질적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 CBR을 활용한 과제 학습을 통해 시간-거리 그래프와 시간-속도 그래프를 확인하게 함으로써 기존 오류를 처치하였다.

학생 T는 시간-거리 그래프를 시간-속도 그래프로 정확하게 번역하는데 있어 오류를 나타냈다.



<그림 4> 시간-거리 그래프로부터 시간-속도 그래프로의 그릇된 번역 (학생 T)

이때 학생 T는 등속도 운동을 하는 물체의 시간-속도 그래프가 시간축에 평행하게 그려진다는 사실은 알고 있었으나, 속도의 크기에 따라 그 높이가 다르게 나타난다는 것을 인식하지 못했다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 구성, 번역 능력과 질적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 CBR을 활용한 과제 학습을 통해 기존 오류를 처치하였다.

학생 T는 축의 변화가 그래프의 형태를 변화시킬 수 있다는 것을 잘 이해하지 못함으로써 축에 대한 인식상의 장애를 나타냈다. 이러한 오류는 그래프에 대한 해석, 축척 능력과 양적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 그래픽 계산기의 window 기능을 통해 축의 변화가 그래프의 형태에 영향을 줄 수 있음을 확인하게 하였다.

학생 T는 두 변수간의 관계성에 기반한 역동적인 변수 모델을 통해 그래프를 해석하기보다는 변수 각각에 주의를 기울인 정적인 변수 모델을 통해 그래프를 해석했다. 이러한 오류는 변수 개념에 대한 이해의 부족, 그래프에 대한 해석 능력과 질적 접근 능력의 부족에서 비롯되었다. 그래서 그래픽 계산기의 derivative 기능을 활용하여 질적이고 역동적인 방법으로 그래프를 해석할 수 있게 지도하였다.

(다) 테크놀러지를 활용한 교수학적 환경하에서 나타난 오류들

학생 T는 자신과 테크놀러지와의 관계가 지배적 관계, 보조적 관계일 때 오류를 나타냈다. 이때 나타나는 학생 T의 오류는 다음과 같다.

첫째, 학생 T는 계산기의 키를 사용하는 과정에서 장애를 나타냈다. 처음 계산기 사용에 익숙하지 않았을 때, 학생 T는 계산기 사용에서 나타나는 장애를 경험하고 혼동을 느꼈다. 둘째, 학생 T는 그래픽 계산기나 CBR의 특징으로 인해 문제 해결 과정에서 장애를 나타냈다. 처음 그래픽 계산기를 사용했을 때 축척을 조절하지 않으면 그래프의 전체적인 특징을 보는데 문제가 있을 수도 있다는 것을 인식하지 못했기 때문에, 학생 T는 그래픽 계산기의 창에 나타난 그래프의 일부만을 인식하는 오류를 나타냈다. 그리고 이 과정에서 학생 T는 대수적, 수치적 점검을 하지 않은채 그래프만을 보고 문제를 해결하려 했다.

V. 결 론

수학의 여러 영역들 중에서 함수 영역은 우리의 생활 주변에서 일어나는 현상을 관찰하여 그 속에 내재된 수학적 법칙이나 형식을 발견하고 이를 구조화시킴으로써 변화하는 현상을 정리하기 위해 필수적으로 요구되는 지식이다(우정호, 1998; 이종희, 1999). 그러나 오늘날의 함수 교수·학습 방법은 함수적 관계 인식을 위해 다중 표현 체계를 사용하기 보다는 특정 표현 체계를 중심으로 함수 개념을 교수하고 있으며(정영옥, 1997), 함수 그래프 구성 활동과 해석 활동을 불균형적으로 전개하였다(Kieran, 1993; Mokros 등, 1987; Rich, 1990). 또한 지필식 방법에 의존해 함수 과제를 수행함으로써 교수·학습상의 한계점을 수반하게 되었다(류희찬 등, 2000). 함수 교수·학습상의 문제는 함수 개념에 대한 학생들의 지식 구성·이해 과정에 영향을 주게 되면서 수학적 오류를 형성하게 하였다. 그러므로 체계적인 오류 분석을 기반으로 한 교수학적 프로그램을 통해 학습 과정에서 수학적 오류를 잘 처치, 활용하는 것이 함수 그래프 교수·학습을 위해 요구된다. 이와 관련해 교육용 테크놀러지 환경은 함수 그래프 학습을 효과적으로 수행할 수 있게 할 뿐만 아니라 기존의 수학적 오류를 변화·처치하는데 영향을 줄 수 있다는 가능성으로 인해 주목받고 있다.

본 연구에서는 함수 그래프 과제에서 나타나는 수학적 오류를 고찰하고, 새로운 교수학적 환경하에서 기존의 수학적 오류가 어떻게 변화하는지를 살펴보고자 하였다.

함수 그래프 과제에서 나타나는 일반적인 수학적 오류를 살펴본 결과, 개념 이미지로부터의 오류는 그래프에 대한 해석 능력, 광의적 접근 능력이 부족한 것에서, 특정 관점에의 집착으로 인한 오류는 해석, 구성, 번역 능력과 양적, 국소적 접근 능력의 부족한 것에서 비롯되었음을 확인할 수 있었다. 지나친 일반화로 인한 오류는 해석, 번역 능력과 질적 접근 능력이 부족할 때, 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오류는 해석, 구성, 예측, 번역 능력과 질적, 광의적 접근 능력이 부족할 때 주로 나타났다. 축에 대한 인식상의 장애로 인한 오류는 해석, 번역, 축척 능력과 양적, 국소적 능력이 부족할 때, 변수 개념에 대한 장애로 인한 오류는 해석, 번역 능력과 질적, 국소적 접근 능력이 부족할 때 주로 나타났다.

새로운 교수학적 환경하에서의 오류 변화를 살펴본 결과, 개념 이미지로부터의 오류, 특정 관점에의 집착으로 인한 오류, 지나친 일반화로 인한 오류, 축에 대한 인식에서의 장애로 인한 오류, 변수 개념에 대한 장애로 인한 오류는 그래픽 계산기와 CBR을 활용한 교수학적 처치를 통해 상당 부분 극복될 수 있었다. 특히 관계적 해석과 판단상의 장애로 인한 오류는 CBR을 활용한 과제 학습을 통해 상당 부분 극복될 수 있었으며, 이는 미분 단원에서의 위치, 속도, 가속도 개념을 그래프적으로 접근하여 해결하게 하는데 매우 큰 영향을 주었다. 그리고 새로운 교수학적 환경하에서 학생들은 예측 능력, 번역 능력을 향상시킬 수 있게 되었으며, 광의적, 질적으로 그래프를 접근할 수 있게 되었다. 테크놀러지 환경하에서 새롭게 나타날 수 있는 수학적 오류는 테크놀러지와 학습자와의 상호 관계가 어떠한 형태로 이루어지는지에 따라 결정되었다. 특히 학습자가 테크놀러지 활용 방법을 모르

는 상호 작용 유형이나 테크놀러지를 학습 보조 수단으로 활용하면서 그 결과를 비판적으로 인식하지 않고 받아들이는 상호 작용 유형에서 수학적 오류가 많이 나타난다는 사실을 확인할 수 있었다. 그러나 두가지 상호 작용 유형으로 인해 나타나는 수학적 오류는 테크놀러지와의 지속적인 상호 작용을 통해 학습자가 테크놀러지 결과물에 대해 비판적인 시각을 갖게 되었을 때 사라지게 되었다.

이상의 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 이미 형성된 수학적 오류들에 대한 처치를 위해 교육용 테크놀러지를 활용한 교수학적 환경의 변화를 시도하였다. 이 과정에서 기존의 오류들이 어느 정도 처치되기는 하였으나, 반면에 새로운 오류들이 발생하기도 하였다. 그러므로 테크놀러지가 지닌 교수학적 한계점을 인식하고 새로운 교수학적 환경하에서의 오류를 대비, 처치하기 위한 교사의 역할이 어떻게 규정되어야 할지에 대한 논의가 더 이루어져야 한다.

둘째, 테크놀러지를 도입한 교수학적 환경은 학생들로 하여금 일상적인 경험과 형식적인 수학의 세계를 의미 있게 연결시킬 수 있게 할 뿐만 아니라, 학교 수학에서 다룰 수 있는 문제의 영역을 확장시키고 그 내용을 재배열화 시키는데 영향을 줄 수 있다. 그러므로 기존의 지필식 환경하에서 전개되었던 수학 학습 내용을 테크놀러지적 환경에 적합하도록 재배열화 하는 것에 대한 연구가 체계적으로 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1999). 중학교 교육 과정 해설(Ⅲ). 교육부 고시 제 1997-15호.

권오남 · 김민경 (2000). The Effects of Using Graphing Calculators on Students' Understanding Functions and Attitudes towards Mathematics and Graphing Calculators. 한국 수학교육학회지 시리즈 D <수학교육연구>, **4(1)**, pp.1-22.

권오남 · 박경미 (1997). 그래픽 계산기를 이용한 함수 지도에 관한 연구, 한국 수학교육학회 <수학교육>, **36(1)**, pp.35-48.

김래영 (1999). 그래픽 계산기(Graphic Calculator)를 활용한 중등 수학과 교육과정의 교수 기초 자료, 이화여자대학교 대학원 석사학위 청구논문.

류희찬 · 지현희 · 조민식 (2000). Mathview를 도구로 한 고등학교 함수단원 구성, 대한 수학교육학회지 <학교수학>, **2(1)**, pp.182-202.

박두일 · 신동선 · 김기현 · 박복현 (1994). 수학 I, 교학사.

송순희 · 오정현 (1997). 수학과 학교 함수 영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구, 한국 수학교육학회 <수학교육>, **36(1)**, pp.11-22.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

이종희 (1999). 이해에 대한 수학교육적 고찰, 서울대학교 대학원 박사학위 청구논문.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 청구논문.

최선준 (2000). Calculator-Based Ranger(CBR)을 활용한 그래프 능력의 변화 과정에 관한 연구 : 세 학생의 사례 연구, 이화여자대학교 대학원 석사학위 청구논문.

Ayers, T.; Davis, G.; Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition functions. *Journal for Research in Mathematics Education* **19(3)**, pp.246-259.

Barclay, W.L. (1986). Graphing Misconceptions and Possible Remedies Using Microcomputer -Based Labs. Paper presented at the 7th National Educational Computing Conference, San Diego, CA.

Bell, A.; Brekke, G. & Swann. M. (1987). Diagnostic Teaching : 5 Graphical interpretation teaching styles and their effects. *Mathematics Teaching* **120(3)**, pp.50-57.

Beichner, R.J. (1990). *The Effect of Simultaneous Motion Presentation and Graph Generation in a Kinematics Labs*, Paper Presented at the National Association for Research in Science Teaching Annual Meeting, Atlanta.

Brasell, H.M. (1987). The Effect of Real-Time Laboratory Graphing on Learning Graphic Representations of Distance and Velocity, *Journal of Research in Science Teaching,* **24(4)**, pp.385-395.

Brasell, H.M. & Rowel, M.B. (1993). Graphing Skills among High school Physics students. *School Science and Mathematics* **93(2)**, pp.63-70.

Bruneningsen, C. & Krawiec, W. (1998). *Exploring physics and mathematics with the CBL system. Dallas*, Texas : Texas Instruments, Inc.

Caldwell, F.W. Jr. (1994). *Effect of Graphics Calculators on College Students' Learning of Mathematical Functions and Graphs*, Paper Presented at the Annual Conference of the American Mathematical Association for Two-Year Colleges, Tulsa, OK.

Curcio, F.R. (1987). Comprehension of Mathematical Relationships expressed in Graphs, *Journal for Research in.Mathematics Education* **18(5)**, pp.382-393.

Dugdale, S. (1987). Pathfinder : a Microcomputer experience in Interpreting Graphs, *Journal for Educational Technology System* **15(3)**, pp.259-280.

Friel, S.N. & Bright, G.W. (1996). *Building a Theory of Graphicacy : How do students read graphs?*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association(AERA), New York.

Friel, S.N.; Curcio, F.R. & Bright, G.W. (2001). Making Sense of Graphs : Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications, *Journal for Research in Mathematics Education* **32(2)**, pp.124-158.

Galbraith, P.; Renshaw, P.; Goos, M. & Geiger, V. (1999). Technology, Mathematics and People : Interactions in a Community of Practice, In Truran, J.M.(Ed), *Making the Difference, Proceedings of the twenty-second annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* pp.223-230. Sydney, MERGA.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education : a Calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics,* **39(1-3)**, pp.111-129.

Harvey, W. (1991). *Improving the Teaching and Learning of Algebra Using a Visual Approach* : Rethinking Algebra in secondary mathematics education. Reports and Papers in progress.

Heid, M.K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a tool, *Journal for Research in Mathematics Education* **19(1)**, pp.3-25.

Kieran, C. (1993). Functions, Graphing, and Technology : Integrating research on learning and instruction. In Romberg, T.A.; Fennema, E. & Carpenter, T. P.(Eds), *Integrating Research on the Graphical Representation of Function,* pp.41-68.

Kwon, O.N. (2002). The Effect of Calculator-Based Ranger Activities on Students' Graphing Ability. *School Science and Mathematics*, **102(2)**, pp.5-15.

Lapp, D.A. & Cyrus, V.F. (2000). Using Data-collection Devices to Enhance Students' Understanding. *Mathematics Teacher* **93(6)**, pp.504-510.

Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. & Stein, M.K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing : Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research* **60(1)**, pp.1-64.

McKenzie, D.L. & Padilla, M.J. (1984). *Effect of Laboratory Activities and written Simulations on the acquisition of Graphing Skills by eighth grade students*, Paper presented at the meeting of the National Association for Research in Science Teaching, New Orleans, Louisiana.

Michael, T.S. (1995). *Effect of Microcomputer-Based Laboratory on Graphing Interpretation skills and Understanding of Motion*, Paper presented at the annual meeting of the National Association of Research in Science Teaching, San Francisco, CA.

Mokros, J.R. & Tinker, R.F. (1987). The Impact of Microcomputer-Based Labs on Children's Ability to interpret Graphs. *Journal of Research in Science Teaching* **24(4)**, pp.369-383.

Mueller, U. & Forster, P.A. (1999). Graphics Calculators in the Public Examination of Calculus : Misuses and Misconceptions. In Truran, J.M.(Ed), *Making the Difference, Proceedings of the twenty-second annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia,* pp.396-403. Sydney, MERGA.

Mueller, U. & Forster, P.A. (2000). *Graphics Calculator Usage in the West Australian Tertiary*

Entrance Examination of Calculus, Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association(AERA), New Orleans, LA.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

O'Callaghan, B.R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Function. *Journal for Research in Mathematics Education* **29(1)**, pp.21-41.

Padilla, M.J.; McKenzie, D.L. & Shaw, E.L. (1986). An Examination of the Line Graphing Ability of Students in grades seven through twelve. *School Science and Mathematics* **86(1)**, pp.20-26.

Preece, J. & Janvier, C. (1992). A Study of the interpretation of Trends in Multiple curve graphs of ecological situations, *School Science and Mathematics* **92(4)**, pp.299-306.

Rich, B.S. (1990). *The Effect of the Use of Graphing Calculators on the learning of Function Concepts in Precalculus Mathematics*, Ph. D. diss. University of Iowa.

Roth, W.M. & Bowen, G.M. (2001). Professional Read Graphs : a Semiotic Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education* **32(2)**, pp.159-194.

Ruthven, K. (1990). The Influence of Graphing Calculator use on translation from Graphics Symbolic Forms. *Educational Studies in Mathematics* **21(5)**, pp.431-450.

Tuska, A. (1992). *Students' Errors in Graphing Calculator-Based Precalculus Classes*. Ph. D. diss. The Ohio State University.

Vellom, R.P. & Pape, S.J. (2000). EarthVision 2000 : Examining Students' Representations of Complex Data Sets. *School Science and Mathematics* **100(8)**, pp.425-437.

Vinner, S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. In E. Dubinsky & G. Harel.(Eds), *The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy* pp.195-214.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Image and definition for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education* **20(4)**, pp.356-366.

Waits, B.K. & Demana, F. (1990). The Role of Technology in Teaching Mathematics, *The Mathematics Teacher* **83(1)**, pp.27-31.