韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 305-316.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 305-316.

벡터를 이용한 삼각형의 무게중심에 관한 정리 증명에 관련된 탐구 능력 추출[1)]

한 인 기 (경상대학교)

벡터는 수학 문제해결을 위한 중요한 도구로써, 벡터를 이용한 문제해결 과정에서 학생들은 수학적 탐구 활동에 관련된 풍부한 경험을 가질 수 있다. 본 연구에서는 벡터를 이용하여 삼각형의 무게중심에 관한 정리를 증명하기 위한 수학적 탐구 능력이나 아이디어를 학생들이 준비할 수 있도록 정리 증명과 관련된 몇몇 문제들을 체계화하여 제시하였다. 이 문제들을 해결하는 과정에 관련된 탐구 능력을 추출하였으며, 체계화된 문제에 바탕을 둔 무게중심에 관한 정리 증명을 제시하였고, 증명 과정과 관련된 수학적 탐구 능력을 제시하였다.

1. 서 론

중·고등학교 수학 교육과정의 내용들 중에서 좌표나 벡터, 삼각함수 등은 개념 자체로써 뿐만 아니라 문제해결을 위한 탐구 도구로써 중요한 의미를 가진다. 특히, 좌표나 벡터는 기하학이나 물리적인 문제들을 대수화시키는 도구로써 이미 오래 전부터 많은 수학자나 공학자들에 의해 그 중요성과 유용성이 인정되었다.

중·고등학교 학생들의 수학적 탐구 능력 신장은 수학교육의 중요한 목표들 중의 하나이다. 물론, 수학적 탐구 능력을 신장시키기 위해서는 수학적 탐구 활동의 유형을 추출하여, 학생들이 탐구 활동 도구에 대한 심도있게 이해하고, 다양한 탐구 활동을 경험하도록 해야 할 것이다.

수학적 탐구 활동에 관련된 연구들을 살펴보면, Polya(1957)는 수학 문제해결을 위한 탐구 활동에 도움을 줄 수 있는 발견술적인 권고를 이해-계획 수립-실행-반성과 같은 문제해결 과정에 상응하여 포괄적으로 제시하였으며, Schoenfeld(1980)도 수학 문제해결에 관련된 발견술의 목록을 제시하여, 학생들의 문제해결을 위한 효율적인 탐구 활동을 도우려 하였다. 그밖에도 문제해결에 관련된 많은 연구들은 대부분 포괄적인 발견술적 권고들을 제시하고 있기 때문에, 좌표나 벡터와 같은 수학적 탐구 도구에 대한 심도있는 이해를 제공하지 못했으며, 이러한 탐구 도구들을 효율적으로 수학 교수-학습에 활용할 수 있는 교수 방법 개발에 별다른 도움을 주지는 못했다.

본 연구는 벡터를 활용한 수학 탐구 활동의 본질 및 벡터에 대한 효율적인 교수-학습 방법의 개발을 위한 기초 연구로써, 벡터를 이용한 삼각형의 무게중심에 대한 정리 증명과 관련된 탐구 능력들을 추출할 것이다. 특히, 본 연구에서는 이 정리의 증명에 필요한 수학적 탐구 능력이나 아이디어

---

1) "이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음"(KRF-2001-030-D00004)

를 학생들이 스스로 준비할 수 있도록 정리 증명과 관련된 몇몇 문제들을 체계화하여 제시한 후, 정리에 대한 우리들의 증명을 제시할 것이다.

2. 벡터를 이용한 문제해결에 관련된 탐구 능력

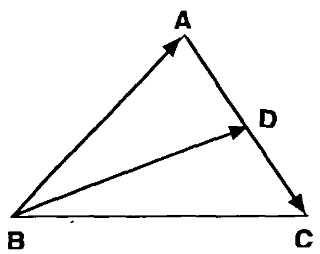
삼각형의 무게중심에 관한 정리인 '삼각형의 세 중선이 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다'는 정리의 증명을 위한 탐구 능력과 아이디어를 학생들이 준비할 수 있도록 관련된 몇몇 문제들을 체계화하여 제시할 것이며, 이 체계화된 문제에 대한 벡터를 이용한 해결에 관련된 탐구 능력들을 구체적으로 추출하도록 하자.

본 연구에서는 문제 풀이에 대한 논리적인 기술 뿐만 아니라, 그 탐색 과정을 자세히 기술하였다. 이를 통해, 벡터를 이용한 문제 탐구 과정에 관련된 탐구 능력들을 효율적으로 추출할 수 있으며, 문제해결에 대한 체계적인 기술이 가능했다.

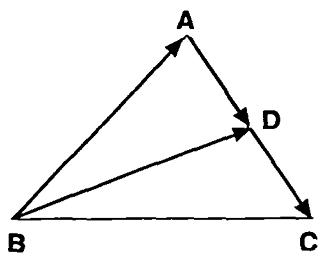
문제 1. 선분 BD가 삼각형 ABC의 중선일 때, $\overrightarrow{BD}$를 $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{AC}$로 나타내라.

풀이. 상응하는 작도(그림 1a)를 하고, 주어진 것과 구하는 것을 분석하자.

1. $\triangle$ABC
2. $\overrightarrow{BD}$: $\triangle$ABC의 중선 (주어진 것, 그림 1a)
3. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$: 주어진 벡터
4. $\overrightarrow{BD}$를 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$로 나타내기(구하는 식)



<그림 1a>



<그림 1b>

그림 1a에서 $\overrightarrow{BD}$를 $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{AC}$를 이용하여 나타내야 한다. **이를 위해서 무엇을 해야 하는가?** 만약, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{AC}$를 포함하는 삼각형을 찾을 수 있으면, 문제를 풀 수 있을 것이다. 그러나, 그러한 삼각형은 존재하지 않는다. 이제, 구하는 벡터 $\overrightarrow{BD}$를 포함하는 삼각형을 살펴보자. 삼각형 BAD는 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{BA}$를 포함하고 있다. 만약, 보조 요소로 $\overrightarrow{AD}$를 도입하면(그림 1b), 벡터에 관한 식 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$을 얻을 수 있다. **구하는 식 (4)를 얻기 위해,** $\overrightarrow{AD}$를 $\overrightarrow{BA}$ **또는**

$\overrightarrow{AC}$로 **나타낼 수는 없을까?** 라는 물음이 발생한다. 물론, 가능하다. 점 D가 선분 AC의 중점이므로, $\overrightarrow{AD} = ½\overrightarrow{AC}$. 결국, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+½\overrightarrow{AC}$를 얻을 수 있다. 문제해결 과정을 체계적으로 기술하면,

5. 삼각형 BAD를 보자.
6. $\overrightarrow{AD}$를 도입하자(1, 2, 그림 1b).
7. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$ (3, 5, 6, 벡터의 합)
8. $\overline{AD} = \overline{DC}$ (2)
9. $\overrightarrow{AD} = ½\overrightarrow{AC}$ (3, 6, 8)
4. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+½\overrightarrow{AC}$ (7, 9)

문제 1의 해결과정에서는,

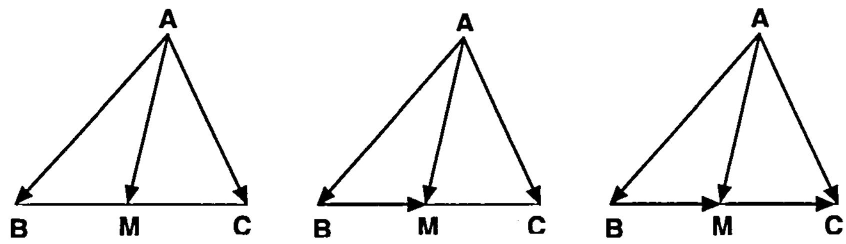
① 기하학적 언어로 표현된 식 (8)을 벡터의 언어로 번역하여 식 (9)를 얻는 능력;

② 벡터 $\overrightarrow{BD}$를 벡터들의 합 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$로 나타내는 능력

등을 추출할 수 있다. 뿐만 아니라, 벡터 문제해결을 위한 발견술로 '벡터를 다른 벡터들로 나타내려면, 이러한 벡터들을 변으로 포함하는 삼각형을 찾고, 벡터의 합이나 차에 관한 규칙을 이용하기'를 추출할 수 있다.

문제 2. $\overline{AM}$이 삼각형 ABC의 중선이면, 등식 $\overrightarrow{AM} = ½(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$가 성립한다는 것을 증명하여라.

1. △ABC
2. $\overline{AM}$: △ABC의 중선 (주어진 것, 그림 2a)
3. $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$: 주어진 벡터
4. $\overrightarrow{AM} = ½(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (증명할 것)



<그림 2a> <그림 2b> <그림 2c>

벡터 등식 (4)를 증명해야 한다. **이를 위해서 무엇을 해야 하는가?** 식 (4)의 벡터들을 변으로 포

함하는 삼각형 ABM과 ACM을 보자. 삼각형 ABM은 두 벡터 $\overrightarrow{AM}$과 $\overrightarrow{AB}$를 변으로 포함하고 있다. 그런데, 이 두 벡터를 관련지우기 위해선, 보조 벡터가 필요한데, 예를 들어, $\overrightarrow{BM}$이나 $\overrightarrow{MB}$를 도입할 수 있다. 만약, $\overrightarrow{BM}$을 도입하면(그림 2b), 벡터 등식 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$-㉠을 얻을 수 있다(만약, $\overrightarrow{MB}$를 도입하면, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MB}$를 얻게 됨). 얻어진 등식을 식 (4)와 비교하면, $\overrightarrow{BM}$을 다른 벡터들로 나타내야 한다는 것을 알 수 있다. 만약, $\overrightarrow{MC}$를 도입하면(그림 2c), 점 M이 $\overline{BC}$의 중점이므로, $\overrightarrow{MC}$는 $\overrightarrow{BM}$과 같다. 이제, $\overrightarrow{MC}$를 다른 벡터들로 나타내면, 벡터에 대한 뺄셈 규칙에 의해, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$-㉡. 얻어진 등식 ㉠과 ㉡로부터, $\overrightarrow{AM} = ½(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$임을 증명할 수 있다. 이제, 얻어진 증명의 아이디어를 체계적으로 기술하자.

5. △ABM을 보자.
6. $\overrightarrow{BM}$을 도입하자(5, 그림 2b).
7. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ (3, 5, 6, 벡터의 합)
8. △ACM을 보자.
9. $\overrightarrow{MC}$를 도입하자(8, 그림 2c).
10. $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$ (8, 9, 벡터의 차)
11. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ (2, 6, 9)
12. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$ (7, 10, 11)
13. $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (12)
4. $\overrightarrow{AM} = ½(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (13)

문제 2의 해결과정에서는,
③ 벡터 $\overrightarrow{MC}$를 벡터들의 차 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$로 나타내는 능력;
④ 벡터 등식 (7), (10), (11)을 연립하는 능력;
⑤ 식 (12)에서 벡터 등식을 원하는 형태로 변형시키는 능력

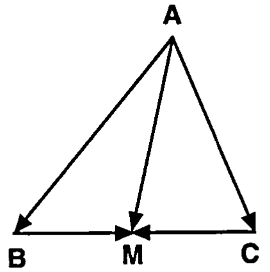
등을 추출할 수 있다. 한편, 본 연구에서는 문제해결 탐색 수행 과정에서 학생들의 탐구 활동을 촉발시킬 수 있는 적절한 상승 분석적 물음을 제시하고 있는데, 예를 들어 문제 2의 경우에는 '등식 (4)를 증명하기 위해서, 무엇을 해야 하는가?'를 탐색 과정에서 제시하였다. 그리고, 다른 문제의 해결과정에서도 그러한 물음을 굵은 글씨로 제시하였다.

문제 3. 삼각형 ABC에서 변 BC의 점 M에 대해 등식 $\overrightarrow{AM} = ½(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$이 성립하면, $\overline{AM}$이 중선임을 증명하여라.

1. $\triangle ABC$
2. $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$: 주어진 벡터 (주어진 것, 그림 2a)
3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

4. $\overline{AM}$: $\triangle ABC$의 중선(증명할 것)

$\overline{AM}$이 삼각형 ABC의 중선임을, 즉 $\overline{BM} = \overline{CM}$임을 증명해야 한다. **이를 위해 무엇을 알아야 하는가?** 조건에서 벡터 등식이 주어졌기 때문에, 벡터 개념에 관련하여 질문에 대한 답을 생각해 보자. 이를 위해, $\overrightarrow{BM}$과 $\overrightarrow{CM}$을 도입하자(그림 3). 이때, 물음에 대한 가능한 대답 중의 하나로 '$\overline{BM}$과 $\overline{CM}$이 같다는 것을 증명하기 위해, $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{CM}|$을 증명해야 한다'고 생각할 수 있다. 그러면, 다시 **이를 위해 무엇을 알아야 하는가?** $\overrightarrow{BM}$과 $\overrightarrow{CM}$이 같은 선분에 속하고, 그 방향이 반대이므로, $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM} = \vec{0}$을 증명하면, 문제가 해결될 것이다.



<그림 3>

5. $\overrightarrow{BM}$과 $\overrightarrow{CM}$을 도입하자(그림 3).
6. $\overrightarrow{BM}$과 $\overrightarrow{CM}$이 같은 선분에 속함(작도에 의해).
7. $\triangle ABM$을 보자.
8. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$ (7, 벡터의 차)
9. $\triangle ACM$을 보자.
10. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$ (9, 벡터의 차)
11. $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}$ (8, 10)
12. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ (3)
13. $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ (11, 12)
14. $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{CM}|$ (6, 13)

4. $\overline{AM}$: 삼각형 ABC의 중선 (14)

문제 3의 풀이 과정에서는,

⑥ 벡터들 사이의 관계식 (13)에서 벡터들의 길이에 관한 관계식 (14)를 유도하는 능력;

⑦ 벡터의 언어로 된 식 (14)를 기하학의 언어로 된 식 (4)로 번역하는 능력

등을 추출할 수 있다. 탐구 능력 ⑦은 탐구 능력 ①의 역에 해당하는 능력이다. 한편, 문제 3의 내용은 삼각형에서 벡터의 언어로 어떤 선분이 중선이 될 조건을 나타내고 있다. 이 조건은 삼각형의 무게중심에 관한 정리에 대한 효율적인 증명 방법 탐구의 바탕이 된다.

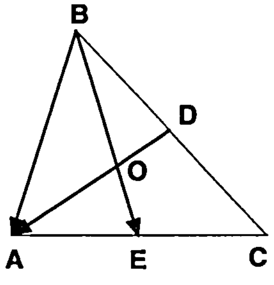
문제 4. 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$와 $\overline{BE}$는 중선이고, 이들의 교점을 O라 하자. 이때, $\overrightarrow{BA}$를 $\overrightarrow{DA}$와 $\overrightarrow{BE}$로 나타내라.

1. △ABC
2. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$: △ABC의 중선 (주어진 것, 그림 4a)
3. O: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$의 교점
4. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BE}$: 주어진 벡터
5. $\overrightarrow{BA}$를 $\overrightarrow{DA}$와 $\overrightarrow{BE}$로 나타내기(구하는 식)

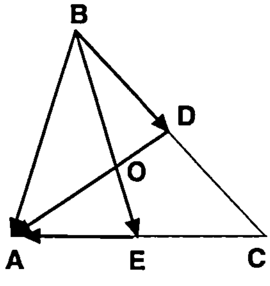
$\overrightarrow{BA}$를 $\overrightarrow{DA}$와 $\overrightarrow{BE}$로 나타내야 한다. **이를 위해서 무엇을 해야 하는가?** 그림 4a를 보면, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DA}$, 그리고 $\overrightarrow{BE}$가 서로 연결되어 있지 않기 때문에, $\overrightarrow{BA}$를 $\overrightarrow{DA}$와 $\overrightarrow{BE}$로 나타내는 것이 쉽지 않다. 다른 보조 벡터들을 도입해 보자.

첫 번째로, 만약 $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DA}$와 같은 선분에 속하는 두 벡터 $\overrightarrow{BO}$와 $\overrightarrow{OA}$를 도입하면, 이들을 $\overrightarrow{BO} = a\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{DA}$와 같이 나타낼 수 있고, 벡터의 덧셈에 의해 $\overrightarrow{BA} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{DA}$. 그러나, a와 b의 값을 모르므로, $\overrightarrow{BO}$와 $\overrightarrow{OA}$를 도입해서는 이 문제가 쉽게 풀리지 않는다. 두 번째로, 만약 $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{CA}$를 도입하면, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$를 얻을 수 있지만, 이 식에는 $\overrightarrow{BE}$와 $\overrightarrow{DA}$가 포함되어 있지 않다.

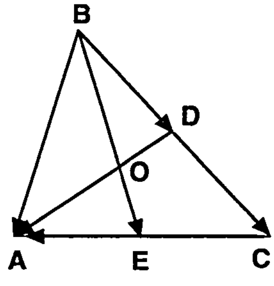
세 번째로, $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{EA}$를 도입하면(그림 4b), 벡터의 덧셈에 의해 $\overrightarrow{BA}$를 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$-㉠ 또는 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}$-㉡와 같이 나타낼 수 있다. 이제, $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{EA}$를 $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}$로 나타내 보자. 점 D와 E가 $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$의 중점이므로, $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{EA}$을 변 BC, CA에 도입된 벡터들을 이용하여 나타낼 수 있다. 이제, $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{CA}$를 도입하자(그림 4c). 그러면, $\overrightarrow{BD} = ½\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EA} = ½\overrightarrow{CA}$. 한편, 두 번째 경우에서 보았듯이, $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{CA}$의 합은 $\overrightarrow{BA}$와 같으므로, $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{EA}$를 $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}$로 나타낼 수 있다. 이제, 등식 ㉠과 ㉡을 더하면, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, 그리고 $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{CA}$의 합을 포함한 등식을 얻을 수 있고, 이 등식에 의해 문제가 해결된다.



<그림 4a>



<그림 4b>



<그림 4c>

6. $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{EA}$를 도입하자(그림 4b).
7. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$ (4, 6, 벡터의 합)
8. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA}$ (4, 6, 벡터의 합)
9. $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{CA}$를 도입하자(그림 4c).
10. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ (2, 9)
11. $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ (7, 10)
12. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ (8, 10)
13. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ (11, 12)
14. $2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$ (13)
15. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ (1, 9, 벡터의 합)
16. $2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (14, 15)
5. $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE})$ (16)

문제 4의 해결 과정에서는 앞의 문제들에서 살펴본 능력들 이외에,
⑧ 식 (7)과 (8)에서와 같이 한 벡터를 다양한 방식으로 나타내는 능력;
⑨ 주어진 벡터를 다른 벡터의 실수배로 나타내는 능력
등을 추출할 수 있다. 한편, 우리는 문제해결 탐색 과정에서 등식 $\overrightarrow{BA} = a\overrightarrow{BE}+b\overrightarrow{DA}$를 잠깐 살펴보았다. 문제 4의 결과로부터, $a = b = \frac{2}{3}$임을 알 수 있고, 이로부터 $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$임을 알 수 있다. 이 사실은 무게중심에 관한 정리의 증명에서 사용된다.

문제 5. 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$는 중선이고, O를 이들의 교점이라 하자. 이때, $\overrightarrow{CO}$를 $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$로 나타내라.

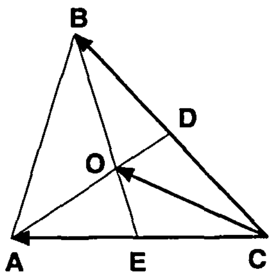
1. △ABC
2. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$: △ABC의 중선
3. O: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$의 교점
4. $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$: 주어진 벡터

(1–4: 주어진 것, 그림 5a)

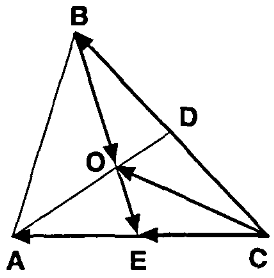
5. $\overrightarrow{CO}$를 $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$로 나타내기(구하는 식)

$\overrightarrow{CO}$를 $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$로 나타내야 한다. **이를 위해 무엇을 해야 하는가?** 만약, $\overrightarrow{BO}$를 도입하면(그림 5b), 벡터의 합에 의해 $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BO}$. 이제, $\overrightarrow{BO}$를 $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$로 나타내야 한다. $\overrightarrow{BO}$에 대해서 무엇을 아는가? $\overrightarrow{BE}$를 도입하고(그림 5b), 문제 4의 결과를 이용하면, $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$임을

알 수 있다. $\overrightarrow{BE}$를 $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$로 나타낼 수 있는가? 그림 5b에 변에 $\overrightarrow{BE}$와 $\overrightarrow{CB}$를 포함하는 삼각형 BEC가 있기 때문에, 이 물음에 답하는 것이 그리 어렵지는 않다. 게다가, 만약 $\overrightarrow{CE}$를 도입하면(그림 5b), 점 E가 $\overline{AC}$의 중점이므로, $\overrightarrow{CE}$는 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$와 같다. 벡터의 뺄셈에 의해, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$. 결국, $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$이고, $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.



<그림 5a>



<그림 5b>

6. $\overrightarrow{BO}$를 도입하자(그림 5b).
7. $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO}$ (6, 벡터의 합)
8. $\overrightarrow{BE}$를 도입하자(그림 5b).
9. $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$ (1, 2, 3, 문제 4)
10. $\overrightarrow{CE}$를 도입하자(그림 5b).
11. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB}$ (8, 10, 벡터의 차)
12. $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ (2, 4, 10)
13. $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ (11, 12)
14. $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$ (9, 13)
15. $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$ (7, 14)
5. $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ (15)

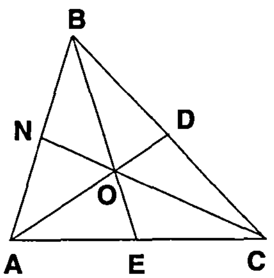
살펴본 문제 1~5는 삼각형의 무게중심에 관한 정리의 증명을 위한 수학적 지식과 증명의 탐구를 위한 기본 능력들을 포함하고 있다. 이러한 탐구 능력과 수학적 지식을 바탕으로 무게중심에 관한 정리에 대한 우리들의 증명을 살펴보기로 하자.

3. 삼각형의 무게중심에 관한 정리 증명

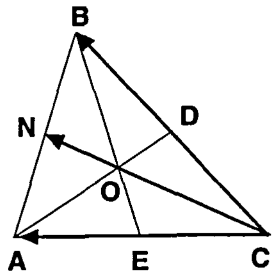
본 연구에서의 증명 방법은 한인기・강인주(2000)의 연구, 한인기・신현용(2002)의 연구에서 제시했던 무게중심의 증명 아이디어와 같은 탐구 방법으로, 우선 삼각형에서 두 중선을 긋고, 삼각형의 세 번째 꼭지점과 두 중선의 교점을 지나는 선분을 그어 이 선분이 중선임을 먼저 증명하고, 그 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하자.

우선, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하자. 본 연구에서 제시하는 증명의 바탕을 이루는 수학적 아이디어는 '삼각형의 두 중선 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$를 긋고, 꼭지점 C로부터 두 중선의 교점을 지나는 직선을 작도하여, 이 직선이 중선임을 증명하는 것'이다.

1. $\triangle ABC$
2. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$: $\triangle ABC$의 중선 (주어진 것, 그림 6a)
3. O: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$의 교점
4. 직선 CO를 작도하자.
5. N: 직선 CO와 변 AB의 교점 (1, 4)
6. $\overline{CN}$: $\triangle ABC$의 중선(증명할 것)



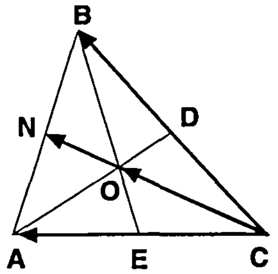
<그림 6a>



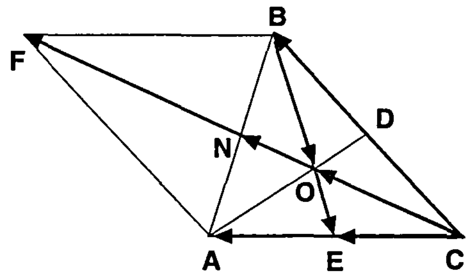
<그림 6b>

$\overline{CN}$이 삼각형 ABC의 중선임을 증명해야 한다. 문제 3으로부터, (6)을 증명하기 위해서 $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$임을 보여야 한다①. 그림 6a에 상응하는 벡터들을 도입하자(그림 6b). 우리는 $\overrightarrow{CN}$을 $\overrightarrow{CB}$와 $\overrightarrow{CA}$로 나타내야 한다. $\overline{AN}$과 $\overline{BN}$ 사이의 비를 모르기 때문에, $\overrightarrow{CN}$을 $\overrightarrow{CB}$와 $\overrightarrow{CA}$로 바로 나타내지는 못한다. 문제 5의 결과를 이용하면, $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$이고, $\overrightarrow{CO}$와 합 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$가 같은 직선에 속하며, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$가 같은 직선에 속한다는 결론을 얻을 수 있다. 물론, $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$의 합은 벡터들을 변으로 하는 평행사변형의 대각선인 $\overrightarrow{CF}$와 같다(그림 6d). 결국, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CN}$, 그리고 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$는 평행사변형 ACBF의 대각선 CF에 속한다. $\overline{AB}$가 평행

사변형 ACBF의 대각선이므로, 점 N은 평행사변형 ACBF의 대각선의 교점이고, 평행사변형의 성질에 의해, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$. 즉, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$.



<그림 6c>



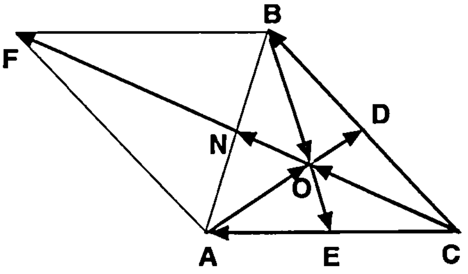
<그림 6d>

7. $\overrightarrow{CO}$를 도입하자(그림 6c).
8. $\overrightarrow{CO}$와 $\overrightarrow{CN}$은 같은 직선에 속함 (5, 7)
9. $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$[②] (2, 3, 4, 7, 문제 5)
10. $\overrightarrow{CO}$와 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$는 같은 직선에 속함 (9)
11. 평행사변형 ACBF를 작도하고, $\overrightarrow{CF}$를 도입하자(그림 6d).
12. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF}$ (11, 평행사변형에 의한 벡터의 합)
13. $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{CF}$는 같은 직선에 속하고 평행사변형 ACBF의 대각선에 속함 (8, 10, 11, 12)
14. N: 평행사변형 ACBF의 대각선의 교점 (5, 13)
15. $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$[⑨] (14, 평행사변형에 의한 벡터의 합)
16. $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$ (12, 15)
6. $\overrightarrow{CN}$은 △ABC의 중선임 (16, 문제 3)

이제, 정리의 두 번째 부분인 '중선의 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다'는 것을 증명하자. 우선, 벡터들이 도입된 중선 CN을 보자. 만약, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CN}$을 증명하면, 문제는 해결된다.

벡터의 뺄셈에 의해, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CO}$. 한편, (9, 12, 15)에 의해 $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$. 이 등식들로부터,

$\overrightarrow{ON} = (1/6)\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CN}$을 얻을 수 있다. 나머지 중선 AD와 BE를 보자. 우리가 중선 CN에 대해 증명했던 것처럼, $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BE}$와 $\overrightarrow{OE}$를 각각 도입하여(그림 6e), $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$를 증명할 수 있다.



<그림 6e>

17. $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CO}$③ (벡터의 차)
18. $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$⑨ (9, 12)
19. $\overrightarrow{ON} = (1/6)\overrightarrow{CF}$ (15, 17, 18)
20. $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CN}$ (15, 19)
21. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$를 도입하자(그림 6e).
22. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO}$ (21, 벡터의 차)
23. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (2, 3, 문제 4)
24. $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ (22, 23)

증명 과정에 관련된 몇몇 탐구 능력을 표시하였으며, 그밖에도 정리 증명의 많은 부분에서 이미 추출된 탐구 능력이 중요한 역할을 함을 볼 수 있다. 예를 들어, 탐구 능력 ④는 식 (12)와 (15)를 연립하여 식 (16)을 얻는 과정과 관련되며, 탐구 능력 ⑦은 식 (16)에서 식 (6)이라는 결론을 유도하는 과정에 관련된다.

4. 결 론

본 연구는 벡터를 활용한 수학 탐구 활동의 본질 및 벡터에 대한 효율적인 교수-학습 방법의 개발을 위한 기초 연구로써, 벡터를 이용한 삼각형의 무게중심에 대한 정리 증명과 관련된 탐구 능력들을 추출하였다. 본 연구에서는 삼각형의 무게중심에 관한 정리에 대해, 두 중선을 작도하고, 그 교점과 세 번째 꼭지점을 연결한 직선이 중선이 됨을 증명하고, 그 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하였다.

본 연구에서는 이 정리의 증명에 필요한 수학적 탐구 능력이나 아이디어를 학생들이 스스로 준비할 수 있도록 정리 증명과 관련된 몇몇 문제들을 체계화하여 제시한 후, 정리에 대한 증명을 제시하였다. 무게중심에 대한 정리의 증명에 대한 체계적인 준비를 위해 구성한 문제는,

◦선분 BD가 삼각형 ABC의 중선일 때, $\overrightarrow{BD}$를 $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{AC}$로 나타내라.

◦ $\overrightarrow{AM}$이 삼각형 ABC의 중선이면, 등식 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$가 성립한다는 것을 증명하라.

◦삼각형 ABC에서 변 BC의 점 M에 대해 등식 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$이 성립하면, $\overrightarrow{AM}$이 중선임을 증명하라.

◦삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{BE}$는 중선이고, 이들의 교점을 O라 하자. 이때, $\overrightarrow{BA}$를 $\overrightarrow{DA}$와 $\overrightarrow{BE}$로 나타내라.

◦삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$는 중선이고, O를 이들의 교점이라 하자. 이때, $\overrightarrow{CO}$를 $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$

로 나타내라.

이 문제들을 해결하는 과정에서 추출된 벡터에 관련된 탐구 능력으로는, ① 기하학적 언어로 표현된 식을 벡터의 언어로 번역하는 능력; ② 주어진 벡터를 벡터들의 합으로 나타내는 능력; ③ 주어진 벡터를 벡터들의 차로 나타내는 능력; ④ 벡터 등식들을 연립하는 능력; ⑤ 벡터 등식을 원하는 형태로 변형시키는 능력; ⑥ 벡터들 사이의 관계식에서 벡터들의 길이에 관한 관계식을 유도하는 능력; ⑦ 벡터의 언어로 된 식 (14)를 기하학의 언어로 된 식 (4)로 번역하는 능력; ⑧ 주어진 벡터를 다양한 방식으로 나타내는 능력; ⑨ 주어진 벡터를 다른 벡터의 실수배로 나타내는 능력 등이다.

한편, 본 연구에서는 벡터를 이용한 문제해결에 관련된 발견술로 '벡터를 다른 벡터들로 나타내려면, 이러한 벡터들을 변으로 포함하는 삼각형을 찾고, 벡터의 합이나 차에 관한 규칙을 이용하기'를 추출하였다.

참 고 문 헌

한인기 · 신현용 (2002). 삼각형의 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(1)**, 서울: 한국수학교육학회.(게재예정)

한인기 · 강인주 (2000). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, 서울: 한국수학교육학회.

Polya G. (1957). *How to solve it.* New Jersey: Prinston University Press.

Schoenfeld A. (1980). Heuristics in the classroom. *Problem solving in school mathematics(1980 Yearbook).* Virginia: NCTM.