韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 265-274.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 265-274.

독일 7학년 학생들의 증명문제 해결능력 분석

Jeeyi Kwak (University of Oldenburg, Germany)
Kristina Reiss (University of Oldenburg, Germany)
Joachim Thomas (University of Gießen, Germany)

이 프로젝트[1)]는 수학 수업 중 '추론'과 '증명'에 관련된 "문제해결과정"에 관심을 가지고, 처음 증명문제를 접하는 독일 7학년 학생들을 대상으로 문제해결능력에 필요한 요인들, 즉, 문제 해결을 위한 수학적 기본지식, 해결된 문제에 대한 인지정도, 논리적 사고 등을 관찰 분석하고 수학교사의 수학에 대한 신념(Beliefs)과 수업 방식이 학생들의 문제해결에 미치는 영향을 조사하는 것에 그 목적을 둔다. 이 프로젝트의 일부의 결과로써, 본 논문에서는 학생들 개개인의 문제해결과정과 그 능력, 그리고 수학에 대한 신념을 서술하고, 수학교사와 학생들의 서로 다른 수학에 대한 신념을 비교 분석한다.

I. 서 론

추론과 증명은 과학적 사고와 연구에 매우 중심적인 부분이며 또한 수학교육의 한 핵심이지만 아쉽게도 수학적 추론과 증명부분이 수학수업에서는 소홀히 다루어져왔다. 그러나 NCTM(1998)에서는 문제풀이 과정에서 "논리적 추론서술"과 "정확한 증명진술"을 제시하는 능력을 수학수업의 중요한 목표중의 하나로 보고 있고, 최근 NCTM(2000)에서는 이렇게 서술한다 :

"Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to ...
... recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
.. .make and investigate mathematical conjectures
... develop and evaluate mathematical arguments and proofs
... select and use various types of reasoning and methods of proof"

학생들이 수학적 추론과 증명에 관한 어떤 이해력을 가지고 있는가에 대한 물음은 수학교육연구의 주요 주제중의 하나였고, 특히 지난 몇 년간 중점적으로 추론과 증명에 관한 다양한 연구들이 진행되었다. 예를 들면, '증명의 역할과 본질'(Hanna & Jahnke, 1993; Hersh, 1993; Moore, 1994), '증명 모델의 분석과 발전'(Boero, 1999 - Phasemodel; Balacheff, 1988), 그리고 '학생의 증명능력과 증명방법'(Senk,1985; Usiskin,1987; Harel & Sowder, 1998)등 이다. 특히, Healy & Hoyles(1998)는 '증명 이

1) 두 번째와 세 번째 저자들이 주 연구 책임자인 본 프로젝트는 독일연구재단(DFG-Deutsche Forschunsgemeinschft)의 지원을 받고 있는 "학교의 교육의 질적 향상(Bildungsqualität von Schule)"에 관련된 23 가지 연구과제중 하나이다.

해력, 증명서술능력, 그리고 증명의 역할에 관한 학생들의 관점'에 관해서 깊이 있게 연구하였다. 영국의 10학년 학생들 중 상위권 학생들만 선발하여 위 연구를 실시하였는데, 이들의 연구결과는, 증명에 필요한 다소 깊이 있는 전문지식을 가지고 있는 학생들조차도, 기하문제에 대한 형식적 증명(진술)에 대부분 어려움을 느끼고 있음을 지적했다.

또한 지난 80년대부터 소위 '신념(Beliefs)' 이란 용어로 표현되어질 수 있는 수학교육의 한 연구분야가 발달되어졌다(참고, Törner, 1998). 이와 관련된 연구결과들은, 학생들의 수학문제해결의 어려움이 학생들의 '신념(Beliefs)'에 의존됨을 보여준다. Pehkonen(1995)은 제기된 문제의 해결 성공여부는 단지 '수학적 지식이나 능력'에 의존하는 것이 아니라, '수학에 대한 신념'(Beliefs)이 문제 해결여부를 설명할 수 있는 하나의 구성인자로써 그 역할을 해야한다고 주장했다.

만약 학생의 '수학에 관한 신념'이 수리능력 발전에 영향을 끼치는 주요인자라면, 근본적으로 '학생의 신념은 수업담당교사나 수업형태로부터 직-간접적으로 영향을 받는가?' 묻는 것은 무척 자연스러운 것이다. 이 물음에 대한 한 연구결과로써, 수학과목 담당교사의 '수업에 대한 신념'은 미국과 일본의 수업을 비교 분석한 Jacobs, Yoshida, Stigler & Fernandez(1997)의 연구결과에서 확인할 수 있다. 더불어 Grigutsch, Raatz & Törner(1998) 또는 Grigutsch & Törner(1998)의 연구결과를 통해서 독일의 수학교사와 대학교수의 수학에 대한 신념이 두 그룹간의 뚜렷한 차이가 있다는 것도 알 수 있다.

한편 독일의 수학교육자들은 TIMSS를 계기로 추론과 증명이해력에 관한 문제를 다시 되돌아보게 되었지만 지난 10년 간 독일의 학교현장에서는 눈에 띄는 많은 변화에도 불구하고, 사실상 위에서 지적된 문제들에 대한 인식이 매우 미약하였으며, 심지어 일부 학교 수학수업에서 교사들은, 정규교과과정에 포함된 '기하학에 관련된 추론과 증명'을 매우 소홀히 다루어왔다는 것이 사실이다. 하지만 현재는 교육현장의 이 같은 현실에 대한 점진적인 변화의 불가피성이 강하게 인식되고 있으며, 더불어 이와 관련된 효과적인 교수법과 학습방법이 요구되어짐에 따라, 학교수업에 대한 좀더 구체적인 현실을 파악하고 인식된 수학수업문제에 관한 대안을 제시할 목적으로 우선 '학생들의 학습방법' 대한 아래 제시된 물음들에 대한 연구를 시작하게 되었다.

1. 연구 주제

1) 독일 7학년 학생들의 증명문제 풀이 능력(성취도)은 어떠한가?

2) 추론-증명의 서술능력은 '수학적 기본지식', '증명방법-이해지식' 또는 '학문으로써 수학에 대한 학생의 신념'과 어떤 상관관계가 있는가? 개별학생의 상의한 '추론-증명 서술능력'을 이해하기 위해, 이런 요인들 중 상대적으로 중요한 것은 무엇인가?

3) 전공과목인 수학에 대한 수업교사의 신념이 수학과목에 대한 학생의 신념에 어떤 발전과 영향을 끼치며, 학생의 '지식획득'과는 어떤 상관관계가 있는가?

II. 본 론

1. 연구 구성

본 연구를 위해 우리는, 지난 1년 6개월 간 독일 북부 니더작센주의 7학년 27개 학급, 총 659명(남-301, 여-358)을 대상으로, 학생들의 증명능력 수준평가를 위한 지필 고사, 수학과목에 관한 신념과 논리적 사고에 관한 설문조사, 해당 학년 수학교사를 대상으로 '수학전공에 관한 신념'에 대한 설문조사를 실시하였다. 그리고 현재 '교수방법'과 '수업형태의 효과성'을 비교 분석하기 위해 규칙적으로 수업현장을 비디오 녹화하는 중이다. 그러나, 본 논문에서는 이를 통해 얻어진 연구결과 중 서론 I 의 1 에서 제시된 세 가지 연구주제를 중심적으로 다루었다.

먼저 7학년 학생들의 성취도를 소개하기에 앞서, 지필 고사의 문항들이 어떻게 이루어졌는지에 대해서 소개를 하고자 한다. 모든 문항은 Beoro(1999)의 증명모델을 기초로 교과서와 TIMSS 문항들을 응용하였고, 특히 제시된 문제(총 13문제)는 객관식이 아닌 '기하학에 관련된 증명수행능력'을 확인하기에 적합한 주관식이다. 이 간추려진 문항들을 좀더 세부적 말해서, "수학적 기본지식능력", "단계별 추론-증명능력" 그리고 "증명방법의 이해능력"을 확인할 수 있는 문항들이다.

지금, 앞선 언급한 추상적인 연구주제들에 구체적인 정의를 제시하고자 한다. 본 논문에서,

"수학적 기본지식"이란? 수업현장에서 다루어지는 '기초적인 정의와 개념'에 대한 바른 인식과 기본적인 계산을 수행할 수 있는 능력을 의미하고, '수학적 증명방법의 이해능력'이나 '수학적 추론-증명 능력'과는 구별하여 말한다.

"추론능력"과 **"증명능력"**은 함께 다루었고, 좀 더 자세히 분류하기 위해서 두 가지 유형의 지필 문항을 제시하였다. 그 중 하나는 '수업시간에 배웠던 개념을 단순 적용시키는 능력'이고 다른 하나는 '좀더 독립적인 창조성을 가지고 추론하고 증명을 진술하는 능력'이다.

"증명방법의 이해지식"이란? 증명된 진술의 옳고 그름을 판별하는 능력을 의미한다. 다시 말하면, 진술과정이 참인 증명을 옳은 것으로 인식하고, 그릇된 진술을 담고 있는 증명을 잘못된 증명으로 인식 할 수 있는가를 살펴보는 것이다. 이 개념은 Healy & Hoyles 에 의해 제시되었다.

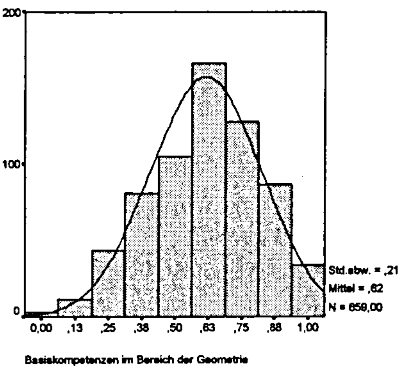
2. 연구 결과

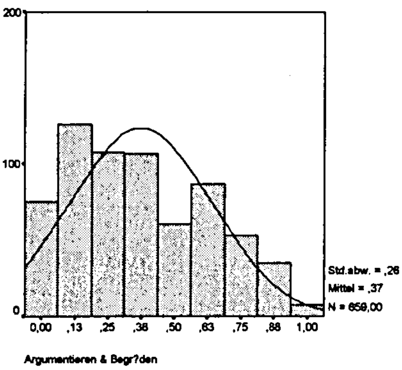
2.1 수학적 기본지식, 추론-증명능력

'수학적 기본지식'을 묻는 문제(6문항)들은, 유클리드 평면상의 대칭이동, 삼각형과 각(角)의 개념이해와 기초적인 계산으로 구성되었고, '추론-증명능력'에 해당문제(7문항)는 증명진술의 논리적 근거를 간단히 서술해야하는 것에서부터 적절한 개념의 이용뿐만 아니라 여러 가지 추론단계까지 요구되어지는 상이한 사고단계를 측정하는 것들로 구성하였다.

실시된 지필 고사는, 총 26점 중에 학생들은 평균 12.6을 가진다. 그러나 '수학적 기본지식'에서 총 12 점 만점 중 평균 7.4 그리고 '추론-증명능력'에서 총 14점 만점 중 평균 5.2의 결과를 보여, 이 양적 통계만으로도 학생의 '기본지식능력'과 '추론-증명능력' 사이에는 큰 차이가 있음을 확인할 수 있다.

시각화된 이해를 돕기 위해, 얻어진 결과들을 '기본지식능력'과 '추론-증명능력'으로 나누어 아래와 같이 그래프로 나타내 보았다.





2.2 증명능력수준

Klieme(2000)는 TIMSS의 문제들을 분석하여 12-13학년 학생들에 대한 **"수리능력수준"** 모델을 완성하였다. 우리는 이 모델을 기준 삼아, 7학년 학생들의 '기하학'에 대한 수리능력수준을 살펴보았고, 그 중 아래 표에 제시된 세 가지 단계의 수준이 일치되는 것을 확인하였다. 이 모델에서 제시된 수준별 이론분류는 우리 조사의 분석자료에 기초하였고, 그 중 한 문제는 TIMSS의 문항에서 응용하였기 때문에 고려하지 않았다. 이 문제는 TIMSS의 문항보다 실제는 더 어려운 문제였고, 그러나 추론을 요구하는 문제는 아니었다.

<표> 능력수준단계[2)]

	수준 I	수준 II	수준 III
	간단한 규칙의 적용과 기본적인 추론	추론과 증명 (한단계)	추론과 증명 (다단계)
	$\bar{X}$=0,69	$\bar{X}$=0,56	$\bar{X}$=0,24

2) 여기서, 그룹별 분류에서 제시된 숫자들은 상응되는 수준의 모든 문항들에 답안형태에 정해진 점수들의 평균을 의미하고, 수준별로 평균값은 그룹별로 제시된 값들의 평균을 의미한다.

하위그룹 N=238	0.51	0.22	0.00
중위그룹 N=215	0.72	0.61	0.18
상위그룹 N=206	0.85	0.89	0.50

수준 I에 관하여 제시된 다섯 문항은 어느 것도 형식적인 수학적 추론을 요구하는 문제들이 존재하지 않다. 여기에서는 단지 기초적인 개념과 기본적인 규칙을 응용과 간단한 계산 결과가 중요하다. 위의 표에서 보여지듯이, 이 수준 I의 단계는, 응시한 각 대상그룹의 50% 이상이 올바른 진술을 제시하였다. 결국 이 수준의 문제들을 풀기 위해서는 기초적인 기본지식이 전제조건으로 요구되어지고, 때로는 산술연산이 적용되어져야 한다.

수준 II에서 제시된 세 가지 문항은 위의 표에서 보여지듯이, 특히 하위 그룹에 있는 학생들 중 단지 적은 수의 학생들에 의해서 정확하게 해결하였다. 수준 II의 문항들을 좀 더 분석해보면, 제시된 문항들은 주어진 상황과 개별학생의 수학능력에 따라 문제해결에 다소 수준차이가 발생할 수 있는 중간수준의 '기하영역의 상위 개념과 지식'을 가진 문제들이다. 특히, 이 문항들은, 주어진 기하문제들을 학생이 정확하게 추론하고 논리적으로 서술할 수 있는지를 묻는데 매우 효과적이었다.

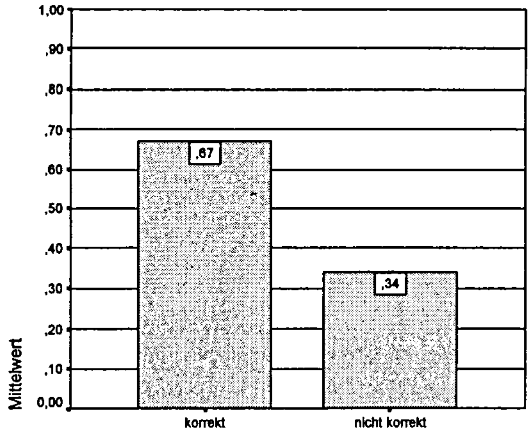
수준 III에서 제시된 네 가지 문항은 대부분 상위수준의 학생들만이 적절하게 답안을 제시하였다. 잘 진술된 답안들은, 먼저 착상한 추론과 논리를 적절하게 표현하였고 더불어 각 진술단계를 논리적이고 정확하게 서술하였다. 이 수준 III 은 특별하게 독립적이고, 부분적으로 창조적인 추론과 문제해결능력이 요구되어졌다.

2.3 추론과 증명진술의 방법적 이해 능력

이 능력을 평가하기 위해서 지필 고사에서 '삼각형의 내각의 합이 180˚이다'라는 명제에 대한 네 가지 종류의 증명답안을 제시한 후, 서술된 증명의 참과 거짓을 판별을 하도록 요구하였다. 제시되었던 첫 번째 답안은, 경험적 논거로써 직접 각을 잰 후 결론에 도달하였고, 두 번째 답안은 순환적 논증을 이용하는 방법으로 오류를 포함하고 있다. 나머지 답안들은 오류 없는 증명진술들로써, 하나는 서술적(narrative form)으로 다른 하나는 형식적(formal form)으로 엄밀하게 쓰여진 것들이다.

제시된 증명답안들에 대해 1) 오류를 내포하고 있는지? 2) 항상 성립한다는 것을 보여주고 있는지? 3) 어떤 특별한 삼각형에서만 성립하는 것인지? 또는 4) 이 증명을 다른 학생들에게 설명하기에 적합한지? 에 대해서, 응시 학생들에게 '예' 또는 '아니오'로 답하도록 요구하였다.

좀 더 구체적으로 살펴보면, 아래 그래프는 제시된 '증명진술답안'에 대한 응시 학생들의 참, 거짓을 판별의 비율을 나타낸 것이다.



위 그래프는, 오류를 포함하는 제시된 답안에 대해, 많은 학생들의 불명확한 판별을 하고 있음을 보여주지만, 2.1 에서 설명된 '추론-증명능력'과 비교해 볼 때, 학생들은 제시된 증명진술의 참, 거짓을 판별하는 것을 개별적-논리적 증명을 직접 서술하는 것보다 상대적으로 매우 쉽게 생각하고 있음을 알 수 있다.

2.4 학생과 교사들의 수학에 대한 신념('Beliefs' 또는 'Mathematische Weltbilder')

Grigutsch(1996)는 교사와 대학교수를 포함하는 연구가들을 대상으로 수학에 대한 신념을 묻는 항목들을 고안하였고, Klieme(2001)은 이 연구항목들을 좀 더 세분하여 분류 발전시켰다. 우리는 연구목적을 위해, 이들의 연구항목들을 학생들에게 물을 목적으로 다소 선택 변형하였다. 특히, 총 24 개인 설문항목을 분류평가하기 위해, 통계 프로그램인 SPSS 를 이용하였다. 이 프로그램을 이용하여 평가결과를 다섯 가지 요인으로 분류하여 얻을 수 있었지만, 연구목적의 편리를 위해서, 여기서는 단지 '응용'(Anwendung), '정확성'(Exaktheit), '과정'(Prozess)의 세 가지 요인으로만 분류하였다. 특히, 학생들에게 제시된 설문문항은 아래와 같은 생각을 가지고 선택하였다:

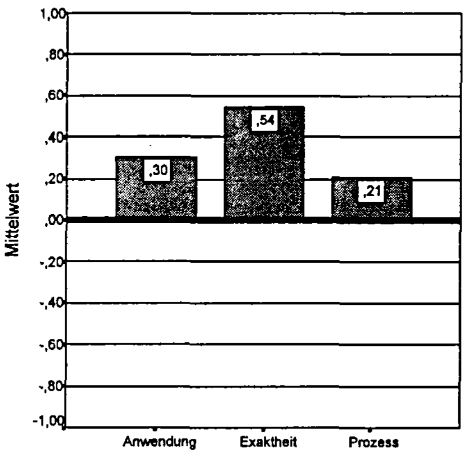
- '학문으로써의 수학'의 응용성에 대한 신념은, 일상생활에서 합리적으로 사고하도록 도움을 주고, 실제로 수학은 단지 사고방식 이상의 매우 효과적이고 유용한 현실적-실천적 삶의 방식을 제공해 주기도 한다.

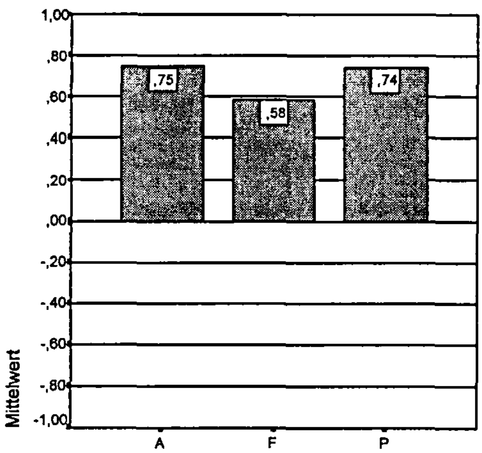
- 수학적 사고방식을 의미하는 '정확성에 대한 신념'은, 매사를 분석적 검증하고 논리적으로 판단하여 사고하도록 도움을 주고, 특히 개별적 관심분야에 대한 깊이 있고 정확한 판단을 하도록 도움을 준다.

- 추상화된 학문인 수학을 학습하는 과정에서 얻게 되는 다소 경험적으로 축적하는 철학적 사고방식을 의미하는 '과정에 대한 신념'은, 일상에서도 제한적인 방법으로 사고하는 것보다는 스스로 찾고 시도하도록 도움을 주며, 이런 신념을 형성해오지 않은 다른 사람들보다 훨씬 더 창조적으로 자신의 삶과 세계를 개척할 수 있도록 돕는다.

비록, 자료분석을 통해서 얻어진 결과들은, 학생의 '성취 능력'과 '신념'사이에 특별한 상관관계 없음을 보여주고 있지만, 적어도 '수학에 대한 학생들의 신념'은 무척 긍정적임을 알 수 있다. 특히, 주목할 만한 사항은, '학문으로써의 수학'을 바라보는 학생들의 관점은 기본적으로 '정확성' 즉, '형식주의'로 인식되어 있고, 그 다음으로 '응용', 마지막으로 '과정'이라고 인식하고 있는 것으로 평가되었다.

그러나, 같은 문항으로 구성된 설문조사를 통해서 얻어진 '교사들의 수학에 대한 신념'에 대한 평가는 학생들의 인식과 많은 차이가 있음을 아래의 그래프에서 확인 할 수 있었다. 수학교사의 '수학에 대한 신념'은 학생들의 신념형성에 별다른 영향을 주지 못하고 있는 것으로 평가되어진다.





III. 결론 및 제언

본 연구결과를 통해서, 우리는 '수학적 기본지식'과 '증명능력'의 상관관계를 명확히 규명할 수는 없었다. 그렇지만, 학문으로써 수학을 학습하는데 있어서 '수학적 기본지식'이 '추론-증명능력'의 기초적인 전제조건은 아닐지라도, 적어도 논리적으로 사고하고 판별하는 능력에 많은 도움을 주는 '증명진술'의 참이나 거짓을 판별하는 사고방식에 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있었다.(참고, Healy & Hoyles, 1998, Reiss, Klieme & Heinze, 2001).

또한 이미 앞에서 언급한 바 있지만, '추론-증명서술능력'과 '증명방법의 이해력'을 비교해 보았을 때, 학생들은 이미 진술된 증명모델의 참이나 거짓을 판별능력이 뛰어났지만, 그렇다고 이런 이해능력이 '추론-증명서술능력'에 별다른 영향을 주지 않는 것으로 평가된다.

많은 학생들은 '수학'을 "무척 형식적이고 정확한 것"이라고 인식하고 있지만, 이런 신념이 직접적으로 추론하고 증명을 진술하는 능력에는 거의 영향을 주지 못하는 것으로 평가된다. 특히, 이 결과는 표본 조사된 모든 학급에서 비슷한 결과가 얻어졌다. 반면에, 수학교사의 수학에 관한 신념은 학생들의 성취도에 영향을 주는 것으로 평가되었다. 그 예로써, 성취도가 중, 하위인 학급의 학생들을

담당하는 교사들의 신념은 '수학의 응용성'과 '주어진 문제의 해결의 과정'에 더 많은 의미를 부여하고 있었지만, 성취도 상위하급의 학생을 담당하는 교사의 경우엔 상대적으로 위에서 언급했던 모든 세 가지 요인에 고른 관심을 부여하고 있는 것으로 평가되었다. 이것은 수학수업에서 형식적인 면에 좀더 관심을 두는 학급의 경우, 그렇지 않은 학급에 비해, 다소 좋은 성취도를 얻게 됨을 의미한다. 하지만, 아쉽게도 교사를 대상으로 한 설문조사는 표본이 상대적으로 적기 때문에 특별한 의미를 주지는 못한다.

참고로 한가지 덧붙이면, 지필 조사를 통해서 얻어진 한가지 흥미로운 발견은, '간단한 계산문제'에 대한 답을 제시할 때라도 주어진 공란에 적절한 근거를 서술했던 학생들이, 그렇지 않은 다른 학생들에 비해, 보다 높은 난이도의 추론문항들에 대해서도 '상대적으로 정확한 근거'를 제시했고 있음을 확인할 수 있었다.

유감스럽게도 지금까지의 얻어진 연구결과로는, 관심을 두었던 연구요소들이 학생의 증명능력에 얼마나 영향을 주고 있는지는 확언할 수는 없었다. 본 연구담당자들은, 이에 대한 한가지 이유로써, 연구조사 대상이었던 7 학년 학생들은, 처음으로 증명을 접하는 시기였던 까닭에 실제로는 '증명'(특히 '수학적 증명')에 대한 기초적인 개념인식 조차 거의 형성되지 않은 상태에 있음을 지적하지 않을 수 없다. 이런 현실적인 교육현장의 문제점들을 감안하여, 현재 8 학년이나, 고학년 학생들을 대상으로 본 연구에서 실행되어진 연구요소들을 연구진행하고 있다. 더불어, 지금까지의 연구방향이었던 양적인 연구만으로는 학생의 개별적 능력을 서술하고 판별하기에는 무척 부족함이 많으므로 앞으로는 표본 선택된 학생들과의 잦은 면담을 통해, 그 후속 질적 연구를 진행해야 할 것이고, 연구대상인 교사들의 표본집단도 넓혀서 보다 객관적인 결과들을 바탕으로, 학교현장에서의 수학수업형태와 교사 학생간의 수학에 대한 신념들에 관한 더 깊이 있게 연구를 계획하고자 한다.

참 고 문 헌

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils Practice of School Mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers, and Childern*, pp.216-235. London: Hodder and Stoughton

Baumert, J. & Lehmann, R. etc. (1997). *TIMSS Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde.* Opladen: Leske + Budrich.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7/8.

Grigutsch, S. (1996). Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflussfaktoren. Duisburg: Universität.

Grigutsch, S., & Törner, G. (1998). Mathematische Weltbilder von Hochschullehrenden im Fach Mathematik. Duisburg: Schriftenreihe des Fchbereichs Mathematik der Universität.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Mathematische Weltbilder bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik* **19**, pp.3-45.

Klieme, E. (2000). Fachleistungen im voruniversitäten Mathematik- und Physikunterricht: Theoretische Konzepte, Kompetenzstufen und Unterrichtsschwerpunkte. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Sekundarstufe II.* Opladen: Leske & Budrich.

Klieme, E. & Ramseier, E. (2001). *The impact of school context, student background, and instructional practice.* Vortrag auf der Tagung der EARLI, Fribourg, Schweiz.

Healy, L & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey.* Mathematical Science. London: Institute of Education, University of London.

Hersh, R. (1993). Proving Is Convincing and Explaining. Educational Studies in Mathematics **24**, pp.389-399

Jacobs, J. K., Yoshida, M., Stigler, J. W. & Fernandez, C. (1997) Japanese and American teachers' evaluations of mathematics lessons: a new technique for exploring beliefs. *The Journal of Mathematical Behavior*, **16(1)**, pp.7-24

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof, Educational Studies in Mathematics **27**, pp249-266

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Pehkonen, E. (1995). Vorstellungen von Schülern zur Mathematik: Begriff und Forschungsresultate, *Mathematica didactica,* **18** pp.35-65

Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* **4**, pp.97-104, Utrecht: Utrecht University.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* ,pp.334-370, New York, NY: Simon & Schuster.

Senk, S. (1985). How well do students write proofs? *Mathematics Teacher* **78**, pp.448-456

Thompson, A.G. (1984). The relationship of teachers conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional *practice. Educational Studies in Mathematics* 15, pp.105-127.

Thompson, A.G. (1992). Teachers beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* pp. 127-146. New York, NY: Simon & Schuster.

Törner, G. (Ed.) (1998). *Current State of Research on Mathematical Beliefs VI*. Proceedings of the MAVI Workshop. Duisburg: Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik der Universität.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. Learning and teaching geometry, K-12. pp.17-31. Reston, VA: NCTM.