

공간감각 형성을 위한 조작활동의 지도 방안

김 창 일 (단국대학교)

김 신 좌 (서울신용산초등학교)

자기 주위의 상황과 그 물체에 대한 직감(intuitive feeling)을 뜻하는 공간감각은 수학교육의 기본적인 구성요소로서, 수학과 과학에서 다른 영역을 공부하기 위한 도구로 사용될 수 있고, 주위의 구조와 대칭성을 볼 수 있게 도우며, 모든 수학에서 창의적 사고를 지원한다. 우리나라에서도 2000학년도부터 연차적으로 실시되는 제 7차 수학과 교육과정의 도형영역에 '공간감각 기르기'를 신설하여 그 중요성을 강조하였다.

따라서, 본 논문에서는 미국의 공간감각 지도의 변천과 우리나라 제 7차 교육과정의 공간감각 영역의 학습 내용을 비교, 우리나라 7차 교육과정의 공간감각영역의 학습내용을 살피고, 현행 7차 교육과정에 의거 초등학교 2학년의 공간감각 영역의 교수·학습과정을 실제 적용, 이후 아동의 학습 추이를 살펴봄으로써, 앞으로 우리나라 초등학교 아동의 공간감각 형성을 위한 여러 가지 지도방법을 제시하고자 한다. 결론 및 제언에서는 이러한 수업으로 얻어진 결과를 토대로 하여 제 7차 교육과정에서 공간감각 영역의 적용에 대한 시사점을 몇 가지 기술하였다.

1. 서 론

NCTM(1998)에서는 학교의 수학적 경험은 학생들이 수학적 소양을 갖춘 시민이 될 수 있게 해주며, 취학 전부터 2학년까지 아동은 발달 변화가 굴곡이 심한 시기이므로, 수학적인 지식의 성장률이 가장 눈에 띄는 시기라고 하였다. 이 시기 아동의 수학적 아이디어는 시기·방식·교육적 상황에 따라, 형식적인 교육프로그램을 받기 시작하는 나이가 서로 다를 수 있게 된다고 주장하였다.

따라서, 이 시기의 어린 학습자들을 위한 수학 프로그램은 취학 전~2학년에 어울리는 기술공학을 이용할 것을 권유하고 있다. 기술공학을 사용함으로써 학생들은 수 패턴을 탐구할 수 있으며, 문제 해결 과정 및 실제적인 응용문제, 기하학적인 탐구, 공간적인 탐구에 초점을 맞출 수 있다고 주장하였다.

2000년부터 실시된 우리나라의 7차 교육과정에서의 수학교육은 단계형 수준별 교육과정, 보충·심화 교육과정을 지향하고 있다. 또, 수학의 영역을 도형, 수 연산, 규칙성과 함수, 확률과 통계, 문자와 식, 측정의 6개 영역으로 구분하였다. 특히 6차 교육과정과 비교하여 두드러진 특징은 도형영역의 소영역에서 '공간감각 기르기'가 신설되었다는 점이다.

NCTM(1992)에 의하면, 공간감각은 자기 주위의 상황과 그 물체에 대한 직감(intuitive feeling)을 뜻한다. 그리고, 저학년(k-4까지)의 경우, 공간감각과 관련하여 학습의 필요성을 다음과 같이 설명하고 있다.

공간에 대한 이해는 우리가 가지고 있는 고유의 기하학적 세계를 해석하고, 이해하고, 음미하는 데 필요하다. 2차원과 3차원의 도형과 그들의 특징에 대한 직관과 통찰, 도형 사이의 상호관계, 그리고 도형의 변화는 공간감각의 중요한 측면이다. 공간관계에 대하여 좋은 감각을 가진 아동들과 기하에 대한 개념과 언어를 습득한 아동들은 수의 개념과 측정의 개념뿐만 아니라, 다른 상급의 수학 주제를 배우는 데 유리하다. 아동들에게 여러 위치에서 도형을 시각화하고, 그리게 하고, 비교하게 하는 훈련은 공간감각의 발달을 촉진한다.

5학년에서 8학년까지의 경우에서 Freudenthal(1973, p.403)은 기하는 공간을 파악하는 것이며, 아동이 생활하며, 호흡하고, 활동하는 공간, 그 속에서 보다 잘 살고, 호흡하고, 활동하기 위하여 아동은 공간을 알고, 탐구하고, 정복해야 한다는 주장을 인용하면서, 공간감각의 학습의 중요성을 주장한다. NCTM(1998)에서는 기하와 공간감각은 수학교육의 기본적인 구성요소로서, 물리적 환경의 추상화를 통해 해석하고 반영하는 방법을 제공하고, 기하와 공간감각은 수학과 과학에서 다른 영역을 공부하기 위한 도구로 사용될 수 있고, 주위의 구조와 대칭성을 볼 수 있게 도우며, 모든 수학에서 창의적 사고를 지원한다고 주장한다.

이러한 공간감각의 필요성을 인식하여 우리나라에서도 2000학년도부터 연차적으로 실시되는 7차 교육과정의 도형영역에 ‘공간감각 기르기’를 신설하여 그 중요성을 강조하였다고 볼 수 있다. 그러나, 실제 교육현장에서의 교육과정 및 교과서의 구성 및 운영에서 체계의 혼란을 갖고 오고 있음도 주지할 사실이다.

따라서, 본 논문에서는 미국의 공간감각 기르기를 위한 지도내용의 체계와 7차 교육과정의 공간감각 영역의 학습 내용을 비교, 우리나라 7차 교육과정의 공간감각영역의 학습내용을 살펴보고, 현행 교육과정에 의거, 초등학교 2학년 가 단계의 공간감각 영역을 추출하여, 서울시 소재 한 초등학교의 1개 학급에 적용하고, 이후 아동의 학습 추이를 살펴봄으로써, 앞으로 우리나라 초등학교 아동의 공간감각 형성을 위한 여러 가지 지도방법을 제시하고자 한다.

결론 및 제언에서는 이러한 수업으로 인하여 얻어진 결과를 토대로 하여 7차 교육과정에서 공간감각 영역의 적용에 대한 시사점을 몇 가지 기술하고자 한다.

I. NCTM의 수학교육과정에서의 ‘공간감각 기르기’

2000년대를 맞이한 NCTM(1998)에서는 기하와 공간 감각에 대한 수학 교수프로그램의 기준을 다음과 같이 제시한다.

- ① 2, 3차원 기하학적 대상의 특징과 성질을 분석
- ② 좌표기하, 그래프 이론 등의 여러 가지 표상 체계의 선택 및 사용
- ③ 수학적 상황 분석에서의 변환과 대칭의 유용성 인식
- ④ 수학 내·외적인 문제를 해결하는 데 있어서의 시각화와 공간 추론 능력 사용

이러한 교수프로그램의 기준으로부터 학생들은 모양과 구조에 대하여 학습하며, 물체나 도형의 변형과 대칭, 공간시각화, 공간 추론, 공간 기억 등의 유용한 경험을 하게 된다.

NCTM(2000)에 의하면, 이러한 경험들은 학교의 기하와 연결되고, 기하와 수학의 다른 영역의 문제 해결에 중요한 도구로 사용되고, 학생들의 발달을 통하여 기하와 공간 이해는 성장하는 것이 아니라 구조가 변화하는 것이라고 주장한다. 아동들은 도형, 구조, 위치, 변형, 공간 추론에 관한 능력을 발달시킴으로써, 자신들이 공간적 세계에 대한 이해뿐만 아니라 수학의 다른 영역과 예술, 자연 과학, 사회 과학 등과 같은 영역들에 대한 이해의 토대를 마련할 수 있다고 주장한다.

NCTM(1998)에 의하면, 모양과 구조 측면에서 보면, 속성퍼즐이나 탱그램 퍼즐은 기하 문제해결에 도움이 되는 교수 재료이다. 규칙성 찾기, 함수, 전-대수 등의 개념에 토대가 되며, 모양과 공간의 구조를 인식하고 직관력을 키우는 데 도움을 준다. 아동들은 어떤 도형으로는 평면을 빈틈없이 덮을 수 있지만, 어떤 도형으로는 그렇게 할 수 없음을 배운다.

변형과 대칭 측면에서 2학년까지의 아동들은 탱그램 퍼즐을 할 때 도형을 직관적으로 움직이고, 탱그램 조각들이 새로운 배열을 갖도록 돌려보고 밀어본다. 교사로부터 안내된 탐구를 통해 아동들은 패턴 블록과 같은 구체물을 다룸으로써 선대칭성과 점대칭성을 갖는 디자인을 만들고, 이러한 자신들의 고유한 물리적 경험과 도형들을 다루면서, 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등이 도형의 위치나 방향은 변화시키지만 도형의 모양이나 크기는 변화시키지 않음을 배우게 된다.

공간 시각화는 도형, 관계, 변형 등에 대한 정신적 표상을 만들고 다루는 활동에 관련된다. 2학년 까지에서 탱그램이나 속성 블록과 같은 구체적인 도형을 다루는 활동은 공간 감각에 대한 기본으로서, 교사는 학생들의 능력을 발달시키기 위하여, 활동 결과가 어떻게 될 것인가를 ‘마음의 눈’으로 판단하도록 지도할 수도 있다.

항해 활동 또한 공간적 추론을 발달시킨다. 아동에게 방금 도서관에서 걸어왔던 길을 시각화하고 설명하도록 질문하기, 또는 빌딩 블록으로 교실 모델을 만들 때, 다른 관점에서 그 모델을 보기 등의 활동을 통하여 아동은 공간적 추론의 경험을 하게 된다.

공간기억의 경험을 위한 활동으로는 다음과 같은 예들을 들 수 있다.

- ① 도미노에서 점의 배치를 상기하여 점의 개수를 세지 않고 한 번에 알아맞히기
- ② 수많은 물건들을 OHP 위에 놓고서 잠깐 동안만 보여준 다음, 아동들로 하여금 본 것의 이름을 말하게 하기
- ③ 눈을 감고 어떤 하나의 물건을 치운 다음에 없어진 물건이 무엇인가를 질문하기
- ④ ‘빠른 이미지’ 활동에서(Yackel and Wheatley 1990), 제시된 간단한 그림을 잠깐 본 다음에 그대로 그려보기, 수정하기, 반복하기, 접근한 방법 알아보기

II. 7차 교육과정 ‘공간감각 기르기’

7차 교육과정에 신설된 초등학교 2학년 ‘공간감각 기르기’ 해당 교육내용 가운데 3단원 ‘도형과 도형움직이기’로서 소개된다. 도형의 이동이란, 물건 또는 도형이 다른 운동에 의하여 한 위치에서 다른 위치로 움직이는 것을 뜻하며, 이동에는 평행이동(옮기기)을 비롯하여 회전이동(돌리기), 대칭이동(뒤집기) 등이 있다. 이 단원에서는 공간 감각을 기르기 위해서 구체물을 밀어서 옮기고, 또 뒤집어 보고 돌려봄으로써 실제적인 조작을 통하여 자연스럽게 공간 감각을 기르도록 하는 데 단원의 목표가 있으며, 교수학습활동은 ‘모양 옮기기’, ‘모양 뒤집기’, ‘모양 돌리기’의 학습주제를 주축으로 구성·계획되어 있다.

이러한 학습을 통하여 아동은 다음과 같은 내용을 학습하게 된다.

- ① 구체물을 옮길 때 달라지는 것과 달라지지 않는 것을 구분할 수 있다.
- ② 양면이 다른 구체물이나 그림을 뒤집기 하여 달라지는 모양에 대해 말할 수 있다.
- ③ 구체물을 돌릴 때 돌리는 정도에 따라 모양이 달라짐을 안다.

이 단원의 공간감각을 익히기 위한 수업 내용은 초등 교육 과정에서는 처음으로 도입되는 내용이 다. 이 단원의 특성은 구체적인 자료를 활용하여 지도되다가 점차 도형 쪽으로 가게 된다는 데 있다.

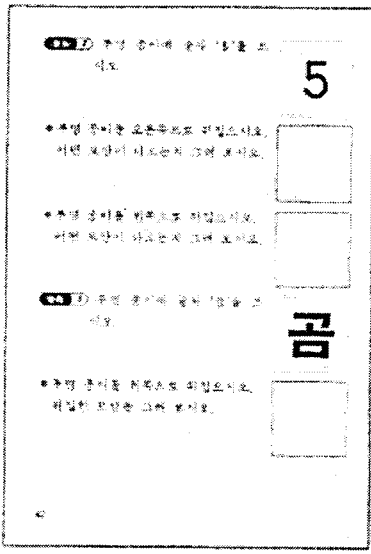
‘모양 옮기기’는 처음 시작되는 도입단계에서는 물체를 옮기는 과정을 계속적으로 한눈으로 볼 수 있는 미닫이문을 생활 장면을 예를 들어, 이러한 활동을 통하여 아동은 서로의 느낌을 이야기하는 시간에서 물체를 밀어서 움직이게 하였을 때는 위치는 바뀌나 모양은 바뀌지 않는다는 것을 알게 된다. 이러한 활동의 교재로는 수학 교과서를 자료화하였으며, 이로써 아동은 수학 교과서에 그려진 그림도 수학 교과서의 전체 모양 사각형과 같이 모양에 변화는 없으나, 위치가 달라진 점을 알 수 있도록 구성하였다.

‘모양 뒤집기’는 자신의 몸을 움직이며 변화 모양을 이야기하도록 하여, 위치 변화에서의 변화된 모양을 말하는 활동을 거치도록 되어 있다. 또 다른 활동으로는 투명종이에 큰 글씨로 ‘5’자를 쓰고 나서, 모양이 써진 투명 카드를 위로 뒤집을 때, 아래로 뒤집을 때, 오른쪽으로 뒤집을 때, 왼쪽으로 뒤집을 때 달라지는 모양에 대해 이야기하도록 하고 나서 직접 뒤집게 한다. 예상했을 때의 내용과 같은지를 확인하고, 예상과 어긋났다면 ‘왜 그렇게 되었을까’에 대해서도 확인하도록 배려하였다(<그림 1> 참고).

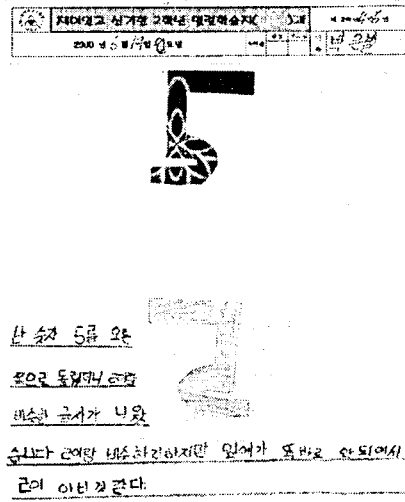
배중수(1999)에 의하면, 초등학교 저학년에서 지도하는 ‘도형뒤집기’ 또는 ‘모양뒤집기’ 활동은 도형이 이동하여도 그 모양은 변하지 않는다는 사실을 감각적으로 익히게 할 뿐이며 변화를 관찰하는데 목적이 있다고 한다.

그러나, 투명 종이를 이용한 실제 교수·학습 상황에서의 아동은 도형을 뒤집어도 그 모양은 변하지 않는다는 것을 이해하는데 어려움을 보이고 있다. <그림 2>에서 볼 수 있듯이, 변환한 모양을 타

내도록 하는데 있어서, '5' 또는 '곰'이라는 문자는 아동 수준에서는 개념을 습득하기에 적절하지 못하다. 특히 '곰'자를 아래로 뒤집을 경우 '문'자가 된다고 주장하는 아동의 예가 그러하다. 따라서, 변환된 모양을 표현하는 데 있어서 아동이 좀 더 쉽게 개념을 습득할 수 있는 보조 자료가 필요함을 느낄 수 있다. 또한 변환과 대칭을 학습함에 있어 학습주제 및 과제 선택에도 좀 더 다양성이 추구되어야 할 것이다.



<그림 1> '모양 뒤집기' 교과서 예



<그림 2> 교과서에 의한 도형과 도형움직이기의 예

'모양 돌리기'의 교과서의 교육내용을 보면, 실물 벽시계 등을 이용하여 시계의 긴바늘이 정각부터 시작하여 15분, 30분이 될 때마다 처음 모양과 달라지는 것은 무엇일까 생각나는 대로 발표하도록 지도하게 되어 있다. 이로써, 아동은 움직인 모양을 보고 오른쪽으로 반 바퀴 돌리기, 반의 반 바퀴 돌리기, 왼쪽으로 반에 반 바퀴 돌리기, 한 바퀴 돌리기 등으로 설명하도록 하여 돌리기를 할 때 변화되는 모양을 감각적으로 느끼고, 아동은 오른쪽으로 반 바퀴 돌린 것과 왼쪽으로 반 바퀴 돌린 것은 어떻게 다른지 말할 수 있도록 지도하게 되어 있다. 또 다른 활동의 예로는 사각형·삼각형 모양을 그리게 하고, 1/4, 2/4, 3/4바퀴만큼 돌릴 때, 모양이 그대로 된 것에 대해 왜 그렇게 되는지 여러 가지 경우를 생각하여 이해하는 과정을 거치도록 구성되어 있다.

배중수(1999)는 초등학교 저학년에서 지도하는 회전이동에서는 정의에 입각하여 회전하는 중심과 회전하는 양을 정하여 이동하는 것이 아니라, 사물이 이동하더라도 도형의 모양은 변하지 않는다는 사실을 감각적으로 익히고, 실제로 이동하는 활동을 통하여 감각을 기르며 변화를 관찰하는 데 목적이 있다고 주장한다.

III. 물리적 조작적 자료의 활용의 결과

현행 7차 교육과정에서는 도형의 이동을 위한 학습자료로 투명한 종이를 제시하고 있다. 이 자료의 적절성에 대한 논의는 앞의 '모양 뒤집기'에서 언급한 바와 같다. 따라서, 대안 활동으로 본 논문에서는 Kroner, L. R.(1994)가 제시한 모눈종이를 응용하여, 가로와 세로 각각 6칸씩 그려진 '모눈종이'를 이용한 '모양 옮기기', '모양 돌리기', '모양뒤집기'와 'Negative Image'를 학습한 후 아동이 각각의 도형의 움직임에서 모양의 변화를 관찰하고 그 변화된 모양을 전반적으로 파악하고 차이를 인식하는 학습활동을 관찰하였다(<그림 3>, <그림 4> 참고).

A. '모양 옮기기'

'모양 옮기기'의 학습활동의 경우 전체 아동 35명 가운데 학습지에서 모양 옮기기의 이해를 나타낸 학생은 27명이었다. 이는 모눈종이를 이용하여 '모양 옮기기' 학습을 하면, 아동이 평행이동의 성질을 학습하는데 좀 더 수월함을 보여준다.

B. '모양 돌리기'

'모양 돌리기'의 학습에서는 교육과정 상 아직 '각'이나 '각도'의 의미를 학습하지 않은 단계이므로, 시계의 방향과 시계 바늘의 위치에 따라 모양의 변화를 관찰하도록 지도하였다. 아동의 반응 결과는 다음과 같다.

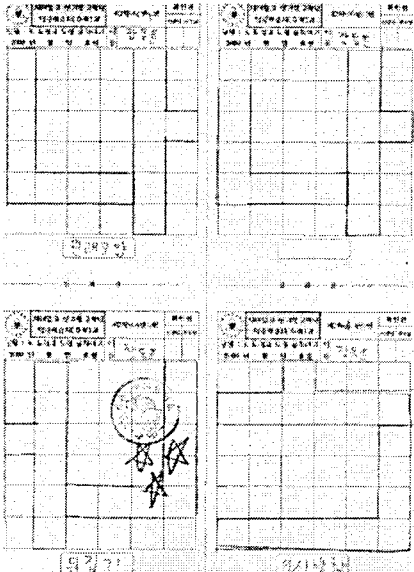
<표 1> '모양 돌리기' 학습 결과

이해 정도	'모양 돌리기'를 이해함	'9시 방향'과 '3시 방향'을 혼동함	방향의 의미를 모름	확인할 수 없음
학생수(%)	6(17.1%)	17(48.6%)	5(14.3%)	8(22.9%)

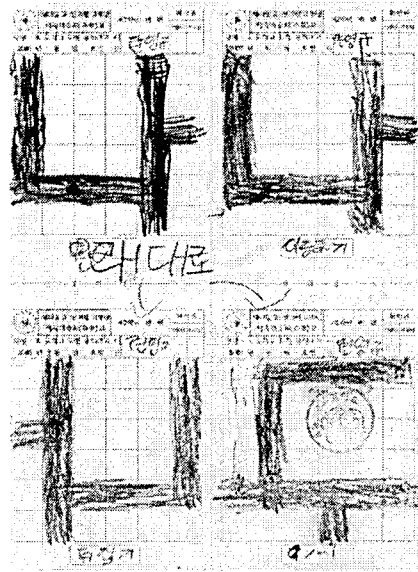
주목할 것은 교수·학습 결과 <그림 3>와 <그림 4>에서 알 수 있듯이 크게 두 가지 유형으로 나타났다.

즉, '나' 자의 경우 실제 활동하는 과정에서 '9시'와 '3시' 방향의 차이를 구분하지 못하고 문제를 해결하는 경우이다. 이는 90°회전과 270°회전을 아직 구분하지 못하는 경우이다. 따라서, 아동이 '모양 돌리기' 학습을 함에 있어 2학년 아동의 경우에는 도형의 각도를 시계와 연관하여 학습하는 데는 다소 무리가 있으나, 시계 바늘이 돌아가는 방향에 주의하면서 방향에 대한 정의가 이루어진 이후 학습을 한다면 '회전이동'에서도 원래 도형의 모양에는 변화가 없다는 개념을 학습할 수 있다는 것을 알 수 있다. 특히, 교과서에 의하면, 시계를 이용한 도형의 '회전이동' 학습은 제시한 <그림 3>

과 <그림 4>와 같이 지도 가능함을 알 수 있다. 또한 아울러 잠재적으로 방향에 대한 학습도 이루어질 수 있으며, 각 경우에 아동 스스로 논리적으로 생각해 보는 경험을 할 수 있음을 볼 수 있다.



<그림 3> '모양돌리기' 활동의 예



<그림 4> '모양돌리기' 오개념 학습의 예

C. Negative Image와 '모양 뒤집기',

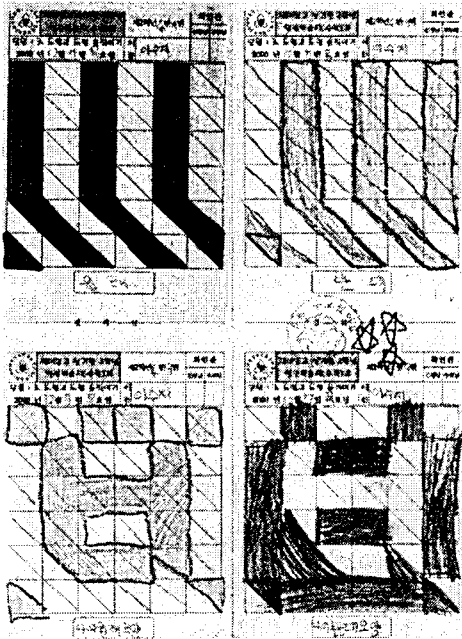
'모양 뒤집기' 활동의 경우 학습과제 제출한 아동(30명, 85.7%)은 모두 뒤집기의 개념을 이해하고 올바른 학습결과를 제시하였다. 따라서, 별도의 표를 제시하지 않고, 성취율을 보면, 아래 표의 이해정도에서 문제해결, 주어진 문제 해결하나 응용이 미흡, 오개념이 형성된 경우까지 '뒤집기'의 개념을 이해하는 것을 볼 수 있다. (N=35)

<표 2> negative image의 학습 결과 표

이해정도	문제해결	주어진 문제 해결하나 응용이 미흡	오개념이 형성된 경우	무응답
학생수(%)	16(45.7%)	7(20%)	7(20%)	5(14.3%)

그러나, 2학년 교육과정에 제시되지 않은 '모양 반대로(Negative Image)'의 경우의 학습 결과를 분석하여 보면, 문제를 해결한 경우는 교사가 안내한 학습과제를 주어진 활동의 정의에 따라 해결하고, 정의에 따라 문제를 응용하는 경우로서, 활동의 예는 제시된 <그림 5>와 같은 경우이다.

과제를 해결한 경우의 한 아동과의 면담 결과는 다음과 같다.



<그림 5> negative image의 활동

하지 않고 음영만 변화한다는 사실을 스스로 발견하는 것을 볼 수 있었다.

그러나, 오개념이 형성된 경우에 주목하여 보면, 주로 <그림 6>과 같다. 이 경우는 주로 ‘모양 뒤집기’와 ‘모양 반대로(Negative Image)’를 혼동한 경우이다. 이는 일상생활에서 사용하는 언어의 개념이 수학적 개념의 인식을 방해하는 경우로 보이며, 개념에 대한 좀 더 자세한 이해가 필요함을 보이는 경우로 해석된다.

IV. 결론

NCTM에서는 아동의 공간감각에 대한 중요성이 강조되어 왔고, 우리나라에서도 7차 교육과정에서 ‘공간감각 기르기’를 신설함으로써 공간감각의 중요성을 인정하게 되었다.

초등학교 2학년 아동의 ‘공간감각 가르기’를 위하여 제 7 차 교육과정에서 제공하고 있는 학습자료인 투명한 종이 외에도 본 논문에서는 Kroner, L. R. 가 제시한 모눈종이를 응용한 가로와 세로 각각 6칸씩 그려진 모눈종이를 학습에 제시하였다.

모눈종이를 이용한 학습에서 ‘모양옮기기’의 경우, 응답자의 77.1%가 ‘모양돌리기’의 개념을 이해하

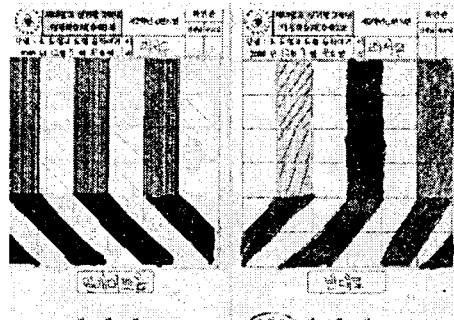
선생님 : 어떻게 이런 모양이 나왔나요?

수지 : 선생님의 말씀에 따라, 검은 부분은 하얗게 하얀 부분은 검게 색칠했어요.

선생님 : 알게된 점을 이야기 해 보아요.

수지 : 이런 방법으로 색을 칠해도 처음에 제가 그린 부분의 테두리 모양은 변하지 않고 색만 변했어요.

학생과의 면담은 아동이 주어진 학습과제를 ‘negative image’의 경우에서도, 도형의 모양은 변



<그림 6> negative image의 오개념

고 있으며, 이러한 조작활동은 도형의 평행이동이 모양의 변화에는 영향을 미치지 않음을 직관적으로 이해하는 데 도움이 된다는 것을 보여주었다. '모양돌리기'의 학습활동에서는 모눈종이 학습을 경험한 아동 80%가 회전이동에서 도형의 위치나 방향은 변하나 원래의 도형의 모습은 변하지 않는다는 내용을 이해하는데 도움이 됨을 보여 주었다. 그러나, 이 활동에서는 아동의 62.9%가 방향에 대한 학습의 어려움을 나타내고 있는 것으로 보아, 방향의 의미를 학습하는 데에는 이 시기의 아동에게 다소 어려움이 있으며, 좀 더 세심한 주의가 필요하다는 점을 살펴볼 수 있었다. 'Negative Image'나 '모양뒤집기'의 학습 활동에서도 모눈종이를 이용한 학습은 각각의 활동에 따라 도형의 모양에는 변화가 없고 위치의 변화에는 영향을 준다는 점을 직관적으로 학습하는 데 유용하였음을 학습과정 이 후 얻을 수 있었다.

이러한 탐색과정을 통하여, 본 논문에서는 공간감각 형성을 위한 조작활동의 지도방안을 다음과 같이 제안하고자 한다.

첫째, 의미 있는 교구의 개발이 필요하다. 교구는 주어진 차시에서 제시한 학습 목표 도달을 추구할 뿐만 아니라, 아동 개개인의 능력을 고려한 잠재적 학습도 가능한 교구의 개발에 방향을 맞추어 개발되어야 한다.

둘째, 공간감각이 공간추론, 공간시각화, 모양과 구조 등의 다양한 의미를 내포하고 있는 만큼 적절하고 다양한 교구의 개발이 필요하다. 즉 한 가지에 국한된 교구가 아니라, 아동으로 하여금 다양한 학습 경험을 제공할 수 있도록 다양한 교구가 제공되어야 한다.

참 고 문 헌

- 강완·백석윤 (1998). 초등수학교육론, 서울: 동명사.
- 교육부 (2000). 수학2-가 초등학교 교사용 지도서, 서울: 대한교과서 주식회사.
- 구광조 (1999). 제 7차 교육과정 시대의 수학 학습 자료, 한국수학교육학회지시리즈 F <수학교육학술지> 3, pp.3-5.
- 구광조·오병승·류희찬 (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.
- 김용태·황우형·이중권·안병곤 (1998). 초등교사를 위한 진단과 처방 수학, 서울: 경문사.
- 배중수(1999). 초등수학교육 내용 지도법, 서울: 경문사.
- 손용규(1992). 직관과 조작을 통한 논리적인 사고를 육성하는 도형지도의 연구, 진주교육대 과학교육 연구 논문집, pp.21-33.
- 손용규 (1995). 조작활동을 통한 도형의 지도연구, 진주교육대 과학교육 연구 논문집, pp.19-28.
- 송상현·김경우(2001). 초등수학교구활용, <http://www.inue.ac.kr/~shsong/>
- 신국환 (1998). 초등학생의 공간 지각 발달에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 전평국 (1998). 공간감각 지도를 위한 활동, 서울초등수학교육연구회 논문집 <제 22회 초등수학 교육

- 세미나>, pp.27-35.
- Freudenthal, Hans. (1973) *Mathematics as an Educational Task*, p.403, Dordrecht, Netgerlands : D.Reidel Publishing Co.
- Kroner, L.R. (1994). *Slides Flips and Turns*, Dale Seymour Publications.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA : NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Principles and Standards for School Mathematics : Discussion draft*, Reston. VA : NCTM.
- Yackel, E. & Wheatley, G.H. (1990). Promoting visual imagery in young people. *Arithmetic Teacher* 37(6), pp.52-58.