용량제약이 있는 설비의 위치선정 및 수요자 할당문제에 대한 최적화 모형 및 해법

강성열* · 손진현**

*홍익대학교 경영정보학과 · **선문대학교 경영학부

요 약

본 논문에서는 용량제약이 있는 설비의 위치선정 및 수요자 할당 문제(Capacitated Facility Location-Allocation Problem)에 대한 정수계획 모형과 해법을 제시하였다. 이 문제는 설비를 설치할 수 있는 후보지의 집합과 각 후보지별로 설치 가능한 설비의 용량 및 설치비용, 수요를 만족시켜야 할 수요자의 집합 및 각 수요자와 설치 후보지 사이의 운반비용이 주어져 있을 때, 설비들의 설치비용과 수요의 운반비용의 합을 최소화하는 설비의 설치 위치 및 대수 그리고 수요자와 설비간의 연결상태를 구성하는 문제이다. 본 논문에서는 이 문제에 대한 두 가지 정수계획모형을 제시하고, 이 모형에 대한 최적해를 구하기 위한 다면체적 절단평면을 이용한 분지-절단해법(Branch-and-cut algorithm)과 열생성기법을 이용한 분지-평가해법(Branch-and-price algorithm)을 제시하였다. 제시된 모형과 해법은 물류시스템의 설계 및 정보통신시스템의 통신설비 위치선정 등에 활용될 수 있다.

Optimization Models and Algorithms for the Capacitated Facility Location-Allocation Problem

Sung-yeol Kang* · Jin-hyeon Sohn**

ABSTRACT

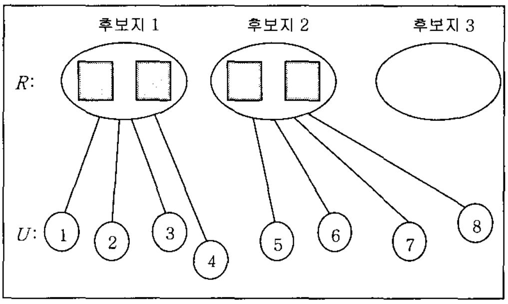
In this paper, we present integer programming models and algorithms for the Capacitated Facility Location-Allocation Problem (CFLP). The models and algorithms can be used for the design of logistics networks and for the location of telecommunication facilities. We are given a set of candidate facility installation sites, one type of facility for each candidate site with its capacity and installation cost, a set of customers with their demand requirement, and flow cost for one unit of demand flow from each customer to each candidate site. (CFLP) is to determine the number of facilities for each candidate site and the set of customers which are connected to each site with minimum cost, while satisfying the demand requirement of each customer and constraints imposed on the allocation of customers to facilities. We present two integer programming models for (CFLP), and devise a branch-and-cut algorithm and a branch-and-price algorithm for the problem.

Ⅰ. 서 론

본 논문에서는 용량제약이 있는 설비(facility)의 위치선정 및 수요자 할당을 위한 정수계획 모형과 해법을 제시한다. 제시된 모형과 해법은 물류시스템의 설계 및 정보통신시스템의 통신설비 위치선정[7] 등에 활용될 수 있다. 본 논문의 연구대상이 되는 문제는 다음과 같이 정의되는데, 이후로 본 논문에서 다루고 있는 문제를 CFLP(Capacitated Facility Location-Allocation Problem)라고 부르도록 하겠다.

- 수요자의 집합(U)과 설비들의 설치후보지 집합(R)이 주어져 있다.
- 하나의 설치후보지에는 여러 개의 설비들을 설치할 수 있으며, 설치 가능한 설비 대수에 상한이 있을 수 있다.
- 하나의 설치후보지 $r \in R$ 에 설치 가능한 설비 한 대의 설치비용은 C_r , 최대공급용량은 B_r 이다.
- 각 수요자 $u \in U$ 는 양의 정수값을 갖는 l_u 만큼의 수요량을 가지며, 이를 일정거리(L) 이내의 하나의 설치후보지에 설치된 설비들에 연결되어 충족해야 하며, 모든 수요자의 수요가 충족되어야 한다.
- 수요자 $u \in U$ 가 설치후보지 $r \in Rz$ 로 부터 수요를 충족하는 데에는 d_{ur} 만큼의 운반비용이 소요된다.
- 위와 같은 상황 하에서, 설비들의 총 설치비용과 총 운반비용의 합을 최소화하는 설비들의 설치위치 및 대수, 그리고 수요자와 설비들 사이의 연결상태를 결정한다.

연구대상 문제에 대한 하나의 해를 예로 보이면 (그림 1)과 같이 나타낼 수 있다. (그림 1)에서 타원은 설비들의 설치후보지를 나타내며, 그 속에 있는 사각형들은 설치된 설비들을 의미한다. 선은 수요자와 설치된 설비들 사이의 논리적인 연결을 나타낸다. 하나의 타원(설치후보지)속에 있는 여러 개의 사각형(설비)들은 동일한 위치에 설치된 설비들이다.



(그림 1) (CFLP)의 실현가능해 예시

(CFLP)의 계산복잡도를 살펴보면, NP-hard 에 속하는 문제인 PARTITION 문제[5]를 (CFLP)로 변환함으로써 이론적으로 NP-hard 에 속하는 문제임을 보일 수 있다.

(CFLP)와 직간접적으로 연관이 있는 기존의 연구들을 살펴보면, 먼저, 용량제약이 없는 설비위치선정문제[2, 3, 4, 11]와 용량제약이 있는 설비위치선정문제[4, 11]가 있는데, 이 문제들은 설비의 설치비용과 운반비용을 고려한다는 점에서 (CFLP)와 유사하지만, 하나의 설치후보지에 한 대 이하의 설비를 설치할 수 있고, 수요자가 하나이상의 후보지에 설치된 설비들로부터 물량을 공급 받을 수 있으며, 하나의 설비로부터 공급 받을 수 있는 물량이 반드시 정수값을 가질 필요가 없다는 점에서 (CFLP)와 차이가 있다. 다음으로 p-median 문제[4]는 수요자가 하나의 설비에 연결되어야 한다

는 점과 운반비용을 고려한다는 점에서는 (CFLP)와 유사하지만, 설치해야 할 설비의 총수가 정해져 있고 설비의 용량에 제한이 없으며 설비의 설치비용이 없다는 점에서 차이가 있다. (CFLP)와 가장 유사한 연구로는 Neebe and Rao[10]의 논문이 있는데, 거기에서 다루고 있는 문제는 (CFLP)에서 하나의 후보지에 설치할 수 있는 설비 대수의 상한이 1인 경우이다. 이들은 그 문제에 대해 열생성기법을 이용한 해법을 제시하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 (CFLP)에 대한 두 가지 정수계획모형을 제시하고, 3 장에서는 개발되어진 정수계획모형들에 대한 최적해를 구하기 위한 다면체적 절단평면을 이용한 분지-절단해법과, 열생성기법을 이용한 분지-평가해법을 제시한다. 전산실험을 통해 개발된 알고리듬의 성능평가 결과를 4장에 보이고, 5장에서는 결론을 서술하였다.

Ⅱ. 정수계획모형

여기에서는 용량제약이 있는 설비배치-할당문제(CFLP)의 두 가지 정수계획모형을 제시한다. 하나는 표준모형(Standard Formulation)이고 다른 하나는 분해모형(Decomposed Formulation)이다.

2.1. 표준모형

먼저, (CFLP) 의 표준모형을 제시하기위해 필요한 결정변수들은 다음과 같다.

w_{ur} : 수요자 $u \in U$ 가 설치후보지 $r \in R$ 에 설치된 설비에 연결되면 1, 아니면 0.

y_r : 설치후보지 $r \in R$에 설치하는 설비의 대수.

여기에서 y_r 은 비음의 정수값을 가지는 변수이고, w_{ur} 는 이진변수(binary variable)이다. 위의 변수를 사용한 표준모형은 다음과 같다. 여기에서 수요자와 설치후보지 사이의 거리가 주어진 거리제한 L 을 초과하면, 그 사이의 운반비용을 충분히 큰 값으로 지정한다고 가정한다.

$$\min \quad \sum_{u\in U}\sum_{r\in R} d_{ur}w_{ur} + \sum_{r\in R} C_r y_r$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r\in R} w_{ur} = 1, \text{ for all } u\in U, \tag{1}$$

$$\sum_{u\in U} l_u w_{ur} \le B_r y_r, \text{ for all } r\in R, \tag{2}$$

$$w_{ur} \in 0, 1, \text{ for all } u\in U \text{ and } r\in R,$$

$$y_r \text{ 은 비음정수, for all } r\in R .$$

제약식 (1)은 하나의 수요자는 반드시 하나의 설치후보지에 설치된 설비들에 연결되어야 함을 나타내고, 제약식 (2)는 하나의 설치후보지에 설치된 설비들의 총용량이 여기에 연결된 수요자들의 총수요량보다 크거나 같아야 한다는 의미이다. 목적함수는 설비들의 설치비용과 수요자와의 연결에 따른 운반비용의 합을 나타내며, 이 모형에서는 이를 최소화하고자 하는 것이다. 한편, 하나의 설치후보지에 설치가능한 설비 대수의 상한이 k_r 로 주어진 경우에는 $y_r \le k_r$ (for $r\in R$)이라는 제약식이 첨가되어야 한다. 이러한 표준모형에서는 (CFLP)에서 추구하는 목표를 바탕으로 자연스럽고 직접적인 의미를 지니는 결정변수를 사용하였다.

2.2. 분해모형

여기에서는 결정변수의 정의를 표준모형과 달리

하여 다른 형태의 모형화를 시도하였으며, 이를 분해모형이라고 부른 이유는 모형을 제시한 후에 설명하도록 하겠다.

(그림 1)에서 예시하고 있는 (CFLP)의 하나의 실현가능해를 보면, 이것은 다시 하나의 설치후보지에 설치된 설비의 수와 여기에 할당된 수요자들의 집합으로 나누어 볼 수 있다. 즉, (그림 1)에서의 실현가능해는 후보지 1에 놓인 설비 두 대와 수요자 집합({1, 2, 3, 4})과 후보지 2에 놓인 설비 두 대와 수요자 집합({5, 6, 7, 8})으로 나누어 볼 수 있다. 이와 같이 하나의 설치후보지 $r \in R$ 에 놓인 설비 대수와 여기에 할당된 수요자의 집합을 "후보지 r 의 배치-할당 패턴"으로 정의하도록 하자. 즉, 후보지 r 의 하나의 배치-할당 패턴을 이루는 요소는 후보지 r 에 설치된 설비의 수 및 여기에 할당된 수요자의 집합이 된다. 그러면 (CFLP)의 하나의 실현가능해는 설치후보지들의 배치-할당 패턴들을 조합하여 얻어질 수 있다. 먼저, 분해모형을 제시하기위해 필요한 기호 및 결정변수를 다음과 같이 정의하겠다.

- $Q(r)$: 후보지 $r \in R$ 의 가능한 모든 배치-할당 패턴들의 집합
- $U(r,q)$: 후보지 r 의 하나의 배치-할당 패턴 $q \in Q(r)$ 를 이루는 수요자들의 집합
- f_{rq} : 후보지 r 의 하나의 배치-할당 패턴 $q \in Q(r)$ 의 총 비용
- n_{rq} : 후보지 r 의 하나의 배치-할당 패턴 $q \in Q(r)$ 를 이루는 설비 대수
- x_{rq} : 후보지 r 의 하나의 배치-할당 패턴 $q \in Q(r)$ 를 선택하면 1, 아니면 0.

그러면, 분해모형은 다음과 같다.

$$\min \quad \sum_{r \in R} \sum_{q \in Q(r)} f_{rq} x_{rq}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{q \in Q(r)} x_{rq} \le 1 \text{ , for all } r \in R, \tag{3}$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{q \in Q(r) | u \in U(r,q)} x_{rq} = 1 \text{ , for all } u \in U, \tag{4}$$

$$x_{rq} \text{ 는 비음정수, for all } q \in Q(r) \text{ and } r \in R. \tag{5}$$

$$\text{단, } f_{rq} = C_r n_{rq} + \sum_{u \in U(r,q)} d_{ur}, \text{ for all } q \in Q(r) \text{ and } r \in R \text{ .}$$

제약식 (3)은 하나의 후보지의 배치-할당 패턴 중에서 하나이하의 패턴을 선택해야 함을 의미하고, 제약식 (4)는 하나의 수요자는 반드시 하나의 배치-할당 패턴에 의해 포함되어져야 한다는 의미이다. 제약식 (3)에 의해 이진변수인 결정변수가 (5)와 같이 비음의 정수값을 가진다고 해도 무방하다.

분해모형의 특징은 결정변수의 수가 무수히 많다는 것이다. 즉, 하나의 설치후보지 r 의 가능한 배치-할당 패턴의 수는 대략 수요자집합의 부분집합의 총수에 달하므로, 각각에 해당되는 결정변수 또한 수요자 수에 대해 지수적으로 많다. 따라서 가능한 모든 결정변수들을 미리 생성하여 분해모형에 대한 최적해를 구하는 것이 불가능한 것은 아니라 하더라도 매우 비효율적이라고 할 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 미리 모든 결정변수를 생성하지 않고 필요한 결정변수를 필요한 시점에 생성하여 사용하는 방법을 해법개발에 이용하였다.

표준모형과 분해모형을 이용한 각각의 해법은 각 모형에서 결정변수의 정수조건을 실수조건으로

완화한 선형계획완화문제〔11〕를 이용하는데, 분해모형의 경우에는 이 선형계획완화문제 또한 무수히 많은 결정변수를 포함하게 되므로 결정변수를 필요한 때에 생성하는 열생성(Column generation) 기법〔1〕을 이용하였다. 여기서 열(column)은 결정변수를 지칭하는 다른 말로 이해하면 된다. 열생성기법을 이용하여 필요한 결정변수를 생성할 때는 일부의 결정변수만을 포함한 선형계획완화문제를 푼 결과로 얻어지는 선형계획완화문제의 쌍대변수(dual variable)의 값을 이용, 열생성문제를 해결하여 필요한 결정변수를 얻게 된다. 이 때, 열생성문제의 해는 필요한 결정변수, 즉, (CFLP)에서는 하나의 배치-할당 패턴이 된다. 이렇게 얻어진 필요한 결정변수는 선형계획완화문제에 첨가된다. 보통 위에서 제시된 모형을 주문제(Master problem)라고 부르며, 여기에 필요한 결정변수를 생성하는 열생성문제를 하위문제(sub-problem)라고 부른다. 이와 같이 전체 문제를 주문제와 하위문제로 나누어 접근한다는 의미에서 제시된 모형을 분해모형이라고 지칭하였다.

그러면 열생성문제, 즉 주문제에 첨가할 결정변수를 구하는 문제를 정식화 하겠다. 먼저, 일부의 결정변수만을 포함한 주문제의 선형계획완화문제를 푼 결과로 이에 해당되는 쌍대변수의 값을 알고 있다고 가정한다. 주문제의 제약식 (3)과 (4)에 해당되는 쌍대변수의 값을 각각 α_r (for $r \in R$) 그리고 β_u (for $u \in U$)라고 나타내겠다. 여기서 제약식 (3)에 해당되는 쌍대변수의 값은 비음의 실수값이고, (4)에 해당되는 값은 제약이 없다. 그러면, 하나의 설치후보지 r 의 배치-할당 패턴 중에서 필요한 것이 있는지, 있다면 어떤 것인지를 구하는 문제 SUB(r)은 다음과 같이 모형화 할 수 있다.

SUB(r)

$$\max \quad \sum_{u \in U} (\beta_u - d_{ur}) z_u - C_r y_r$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{u \in U} l_u z_u \le B_r y_r , \qquad (6)$$

$$z_u \text{ 는 이진변수, for all } u \in U,$$

$$y_r \text{ 은 비음정수, for all } r \in R .$$

결정변수 z_u는 후보지 r의 배치-할당 패턴에 수요자 u를 포함시킬 것인지 여부를 결정하는 변수이고, y_r 은 후보지 r 에 설치할 설비의 수를 결정하는 변수이다. 제약식 (6)은 구한 배치-할당 패턴이 실현가능한 패턴이 될 조건을 말한다.

위의 SUB(r)의 최적해를 구했을 때, 해당되는 목적함수의 값이 α_r 보다 크면 구한 배치-할당 패턴이 필요하다고 판단하여 이를 주문제에 추가하고 그렇지 않으면 필요하지 않다고 판단한다. 이에 대한 기준의 이론적 배경에 대해서는 Barnhart et al.〔1〕을 참고하기 바란다. 한편, 하위문제 또한 PARTITION 문제〔5〕를 이용하여 이론적으로 NP-hard 문제임을 증명할 수 있다.

Ⅲ. 해 법

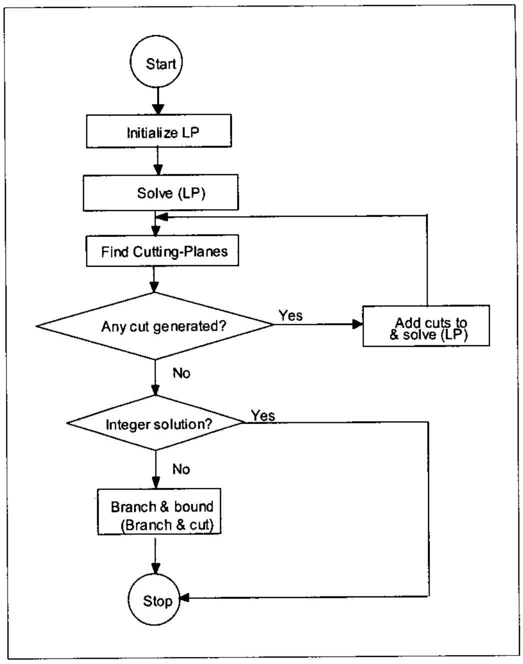
여기에서는 앞서 제시된 (CFLP)의 두 가지모형의 최적해를 구하기 위한 해법을 제시한다. 표준모형에 대해서는 절단평면기법을 이용한 분지-절단해법을 개발하였고, 분해모형에 대해서는 열생성기법을 이용한 분지-평가해법을 개발하였다. 먼저 해법의 개발에 이용된 절단평면기법과 열생성기법에 대해 설명하겠다.

3.1. 절단평면기법(Cutting plane method)

절단평면기법[11]은 정수계획문제를 해결하기 위해 선형계획완화문제를 반복적으로 해결하면서 선형계획완화문제의 비정수 최적해를 제거할 수 있는 절단평면(cutting plane)을 이용하는 방법이다. 이 기법은 주어진 정수계획문제의 정수가능해들이 정의하는 해집합에 대해 유효한 절단평면들의 집합을 정의하고, 이 절단평면들 중에서 선형계획완화문제의 비정수 최적해를 제거할 수 있는 절단평면을 구하여(이를 separation이라 함) 선형계획완화문제에 추가하게 된다. 이때 사용되는 절단평면은 정수가능해들이 정의하는 convex hull에 대해 facet을 정의하는 것이 가장 바람직하고, 그렇지 못한 경우는 가능한 한 고차원의 face를 정의하는 것이 바람직하다.

절단평면기법의 개략적인 절차는 (그림 2)와 같다. 먼저, 주어진 정수계획문제의 선형계획완화문제를 푼다. 이때 얻어진 해가 정수해이면 중단하고, 그렇지 않으면 미리 정의된 절단평면들의 집합에서 현재의 비정수해에 의해 위배되는 제약식들을 탐색한다. 만일 위배되는 제약식이 없거나 또는 탐색에 실패하였으면 중단하고, 그렇지 않으면 얻어진 제약식들을 현재의 선형계획완화문제에 첨가한 후 얻어진 선형계획완화문제를 가지고 위와 같은 과정을 반복한다.

위에서 만일 정수해가 얻어지지 않고, 또는 위배되는 절단평면에 대한 추가탐색이 불가능하면, 현재의 선형계획완화문제를 가지고, 분지한계법[11]을 써서 최적정수해를 구하거나, 분지-절단기법[12]을 사용하게 된다.



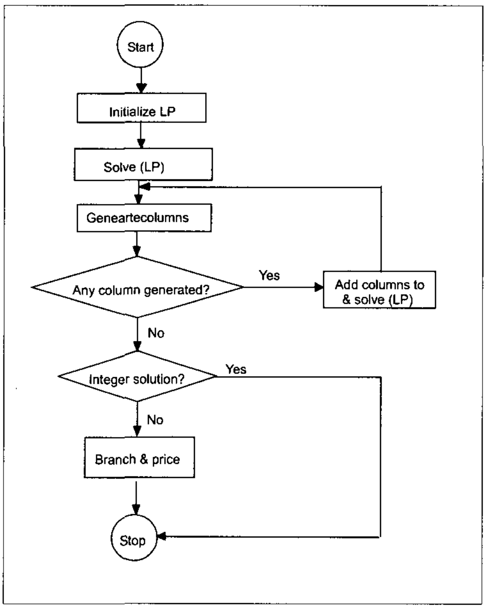
(그림 2) 다면체적 절단평면기법의 흐름도

3.2. 열생성기법(Column generation method)

열생성기법은 원문제를 주문제와 필요한 결정변수를 생성하는 열생성 하위문제로 나누어 해결하려는 방법이다. 이러한 접근방법은 주로 결정변수의 수가 (CFLP)의 분해모형처럼 매우 많거나 실현가능해에 대한 제약이 매우 복잡하여 하나의 모형으로 전체의 문제를 모형화하기가 비효율적이거나 어려운 경우에 주로 사용된다. 열생성기법을 사용한 대표적인 논문으로는 Johnson et al.[6], Park et al.[13] 등의 논문을 들 수 있으며, 그 기법의 사용에 대한 문헌 연구는 Barnhart et al [1]의 논문을 들 수 있다.

열생성기법의 개략적인 절차는 (그림 3)과 같다. 먼저 주문제를 일부의 결정변수만을 포함시켜 초기화한다. 초기화에 사용되는 변수들은 초기의 주문제를 실현가능하게 유지하기 위해 인위변수들을

도입할 수도 있으며, 이 경우 해당 결정변수의 목적함수계수에 penalty를 주게된다. 초기화된 주문제의 선형계획완화문제를 해결하면 쌍대변수의 값들이 얻어진다. 그러면 이들을 이용하여 현재의 주문제에 포함되지 않은 결정변수들 중에서 필요한 것들이 있는지를 평가(pricing)한다. 이는 선형계획문제를 심플레스법[9]를 이용하여 해결할 때, 비기저변수(nonbasic variable)들의 진입여부를 이들의 할인가(reduced cost)를 이용하여 결정하는 것과 같다. 이 때, 해결해야할 문제가 앞서 제시한 SUB(r)과 같은 열생성 하위문제가 된다. 열생성 하위문제의 제약식은 실행가능 열(예를들면, 실현가능한 배치-할당 패턴)이 만족해야하는 모든 제약사항을 포함하게 된다. 대개의 경우 열생성 하위문제의 최적해는 현재의 주문제에 포함되지 않은 결정변수들 중에서 최소의 (최소화 문제의 경우) 할인가를 갖는 것이 된다. 이 경우 해당 결정변수의 할인가의 값이 음이면, 주문제에 필요하다고 판단하여 추가하고, 그렇지 않으면 현재의 주문제의 선형계획완화문제는 선형계획문제의 최적조건을 만족하게 된다. 새로운 결정변수가 생성되면, 이를 추가하여 구성된 주문제를 이용하여 위의 절차를 반복하여 무수히 많은 결정변수를 다 포함시키지 않고 주문제의 선형계획완화문제의 최적해를 구할 수 있게 된다. 만일 최적의 상태에서 최적해가 정수해가 아니면 분지-평가기법을 이용하여 정수최적해를 구하게 된다.



(그림 3) 열생성기법의 흐름도

3.3. 표준모형의 분지-절단해법

(CFLP)의 표준모형을 해결하기 위하여 개발된 분지-절단기법은 일반적인 분지한계법과 유사하나, 열거트리(enumeration tree)의 각 노드에서 해결해야 하는 선형계획문제들을 단순히 LP의 해법을 사용하여 해결하지 않고, 절단평면기법을 사용하여 해결하는 기법이다. 이 경우 일반적인 분지한계법에 비해 선형계획문제들을 해결하는 데 요구되는 시간은 많으나, 정수해를 좀 더 빨리 구할 수 있고 LP의 한계값(bound)을 빠르게 증가시킬 수 있는 장점이 있다[12].

사용되어진 초기 선형계획완화문제는 앞서 제시된 표준모형에서 변수 w_{ur} , y_r 의 정수조건을 다음과 같은 실수조건으로 완화시키면 된다.

$0 \le w_{ur} \le 1$, for all $u \in U$ and $r \in R$,

$y_r \ge 0$, for all $r \in R$.

만약 모든 설치후보지에 대해 인 경우에는, 다음과 같은 유효부등식을 첨가하여 초기선형계획완화문제의 한계값을 강화시킬 수 있다.

$$\sum_{r \in R} y_r \geq \left\lceil \sum_{u \in U} l_u \Big/ B \right\rceil \qquad (7)$$

본 연구에서는 각 후보지별 용량제약 (2)와 변수의 정수제약으로부터 정의되는 다음의 정수가능해들의 convex hull 에 대해 유효한 절단평면을 고안하여 알고리듬의 개발에 사용하였다.

$$P(r) = conv\{w \in \{0,1\}^n, y_r \in Z_+ : \sum_{u \in U} l_u w_{ur} - B_r y_r \leq 0\},$$

단, n 은 수요자의 총수이다.

사용되어진 절단평면은 다음과 같은 형태의 부등식이다.

$$\sum_{u \in U} \lfloor v_0 l_u + v_u \rfloor w_{ur} + \lfloor -v_0 B_r \rfloor y_r \leq \left\lfloor \sum_{u \in U} v_u \right\rfloor \qquad (8)$$

단, $v_0 \geq 0$, $v_u \geq 0$, for all $u \in U$ 이다.

부등식 (8)의 유도 및 이의 성질 그리고 separation 방법에 대해서는 Lee and Park[8]에 자세히 설명되어 있다. 현재의 선형계획완화문제의 최적해가 비정수해이고 모든 설치후보지에 대해 정의되는 절단평면 (8) 중에서 현재의 최적해에 의해 위배되는 것이 있다면 선형계획완화문제에 이를 첨가한다.

현재의 선형계획완화문제의 최적해가 정수해가 아니고 또한 위배되는 제약식 (8)이 없을 경우에는 분지(branching)를 통해 열거트리 상에서 하위노드를 생성하는데, 이때 사용한 분지조건은 다음과 같다. 표준모형에는 이진변수와 정수변수가 있는데, 이진변수에 우선순위를 두었고, 같은 우선순위 내에서는 현재값의 소수부분이 0.5에 가장 가까운 결정변수를 선택, 분지하여 열거트리 상에서 두 개의 하위 노드를 생성하는 방법을 이용하였다. 열거트리에서의 탐색방법은 최적한계값조건[11]을 이용하였으며, 개발된 알고리듬의 구현에는 상용소프트웨어 CPLEX 에서 제공하는 Library 함수들을 사용하였다.

3.4. 분해모형의 분지-평가해법

분해모형의 해를 구하기 위하여 사용된 분지-평가기법은 일반적인 분지한계법과 유사하나, 열거트리의 각 노드에서도 열들을 생성하면서 선형계획완화문제를 해결하는 기법이다[1].

분해모형을 이용하여 초기 선형계획완화문제를 구성할 때 결정변수는 하나의 배치-할당 패턴이므로 다음과 같은 간단한 방법으로 구한 하나의 실현가능해를 결정변수로 이용하였다. 먼저, 각각의 수요자들을 운반비용이 가장 작은 후보지에 할당한다. 만약 어떤 수요자의 경우 최소의 운반비용이 소요되는 후보지가 다수일 경우에는 임의로 하나를 선택한다. 다음은 각 후보지 별로 할당된 수요자들의 수요량을 만족시킬 수 있는 설비의 대수를 결정한다.

표준모형에서 사용한 분지-절단해법에서와 같이, 만약 모든 설치후보지에 대해 $B_r = B$인 경우에는 다음과 같은 유효부등식을 첨가하여 초기 선형계획완화문제의 한계값을 강화시킬 수 있다. 이 부등식은 부등식 (7) 과 동등한 의미를 갖는다.

$$\sum_{r \in R} \sum_{q \in Q(r)} n_{rq} x_{rq} \geq \left\lceil \sum_{u \in U} l_u \Big/ B \right\rceil \qquad (9)$$

부등식 (9)를 첨가할 때에는 열생성 하위문제인 SUB(r) 은 다음과 같이 된다.

$$\max \quad \sum_{u \in U} (\beta_u - d_{ur}) z_u + (\gamma - C_r) y_r$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{u \in U} l_u z_u \le B_r y_r ,$$

z_u 는 이진변수, for all $u \in U$,

y_r 는 비음정수.

단, γ 는 부등식 (9) 에 해당되는 쌍대변수의 값이다.

앞서 제시된 열생성 하위문제, 즉, SUB(r)의 알고리듬은 다음과 같다. 먼저, 변수 y_r 의 상한을 k_r 이라하자. 이 상한값은 미리 주어질 수도 있지만, 만약 상한이 없는 경우에는 $\left|\sum_{u \in U} r_u / B_r\right|$ 로 정할 수 있다. 그러면, SUB(r)을 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\max \quad \sum_{u \in U} (\beta_u - d_{ur}) z_u + C_r y'_r - C_r k_r$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{u \in U} l_u z_u + B_r y'_r \le B_r k_r ,$$

$z_u \le 1$ 비음정수, for all $u \in U$,

$y'_r \le k_r$ 비음정수,

단, $y'_r = k_r - y_r$.

초기선형계획완화문제에 부등식 (9) 를 첨가한 경우에는 목적함수가 다음과 같이 변경된다.

$$\max \quad \sum_{u \in U} (\beta_u - d_{ur}) z_u - (\gamma - C_r) y'_r + (\gamma - C_r) k_r$$

한편, 위의 문제가 Integer Knapsack 문제[11]임을 알 수 있는데, 이것은 기존의 동적계획법(DP)[11]과 같은 해법들을 이용할 수 있으므로 본 연구에서도 동적계획법을 이용하였다.

일부의 결정변수를 포함하고 있는 현재의 선형계획완화문제가 최적의 상태에 도달하여 더 이상 필요한 결정변수가 없고 그때의 최적해가 비정수해일 경우에는 분지를 하게 되는데, 분해모형의 결정변수를 그대로 이용할 경우에는 열거트리 상의 근원(root) 노드를 제외한 나머지 노드들에서의 열생성문제가 어려워 질 수 있기 때문[1]에 표준모형에서와 같이 분지할 결정변수를 선택하여 이를 직접적으로 이용하지는 않았다. 대신에 현재의 최적해를 이용하여 표준모형에서 사용된 결정변수의 값을 계산, 이를 이용하여 다음과 같이 분지하였다.

먼저, 주어진 분해모형의 결정변수들의 값으로부터 표준모형의 결정변수의 값을 다음과 같이 계산한다.

$$w_{ur} = \sum_{\{q \in Q(r) | u \in U(r,q)\}} x_{rq} ,$$

$$\text{for all} \quad u \in U \text{ and } r \in R ,$$

$$y_r = \sum_{q \in q(r)} n_{rq} x_{rq} , \text{ for all } r \in R.$$

위의 값들을 계산했을 때, 만약 x_{rq} 의 값들이 모두 정수이면 모든 w_{ur} 과 y_r 의 값들이 정수 임을 쉽게 보일 수 있으며, 또한 x_{rq} 값들중 비정수값을 가지는 것이 하나라도 있으면, w_{ur} 중 비정수값을 가지는 것이 하나이상 있다는 것도 쉽게 보일 수 있다. 그리고 만약 모든 w_{ur} 값들이 정수이면 y_r 들도 모두 정수임을 보일 수 있다. 따라서 모든 w_{ur} 들이 정수값을 가지도록 분지

를 하면 된다. 이를 위해 비정수값을 가지는 w_{ur} 중에서 0.5에 가장 가까운 것을 선택하여 $w_{ur}=0$ 그리고 $w_{ur}=1$이 되도록 하는 두 개의 하위 노드를 만든다. $w_{ur}=0$이 되도록 하는 하위 노드에서는 수요자 u 가 포함된 후보지 r 의 배치-할당 패턴에 해당되는 결정변수를 0으로 고정시키고, $w_{ur}=1$이 되도록 하는 하위 노드에서는 수요자 u 가 포함되지 않은 후보지 r 의 배치-할당 패턴에 해당되는 결정변수를 0으로 고정시킨다. 이때, 각 하위 노드에서 열생성을 수행할 때, 열생성문제에서 추가적인 제약을 반영해야 한다. 즉, $w_{ur}=0$ 이 되도록 하는 하위 노드에서는 SUB(r)에서 $z_u=0$으로 고정해야 하며, $w_{ur}=1$의 경우에는 $z_u=1$로 고정해야 한다. 여기서는 하나의 변수만 분지했을 경우를 설명했지만, 분지를 수행하여 얻어진 고정된 변수의 정보를 계속적으로 열생성에 반영해야 한다.

열거트리 상에서 노드 탐색방법은 앞에서와 마찬가지로 최적한계값조건을 이용하였고 전체 알고리듬의 구현을 위해서도 역시 상용소프트웨어인 CPLEX의 Library 함수를 이용하였다.

Ⅳ. 전산 실험

본 장에서는 개발된 분지-절단해법과 분지-평가해법의 전산실험을 통한 성능평가 결과에 대해 기술하도록 하겠다.

4.1. 실험문제와 실험환경

먼저, 수요자의 수를 n 이라 하고 설비 설치후보지의 수를 m 이라고 하자. 본 연구에서 사용된 실험문제는 (n, m) = (10, 10), (10, 20), (20, 20), (20,40) 의 네 가지의 문제 크기에서 설비의 용량과 설치비용이 모든 설치후보지에 대해 일정한 경우를 상정하여 생성되었다. 이러한 경우는 통신시스템 설계 시 통신설비 위치선정[7]에서 나타나는 현실적인 경우이다.

모든 수요자 u 에 대해서, l_u 값은 [1, 20]의 이산일양분포를 이용하여 생성하고 운반비용인 d_{ur} 값은 [1, 100]의 이산일양분포를 이용하여 생성하였다. 이러한 방법으로 각각의 문제크기에 대해 10개씩 문제들을 생성하였다.

위에서 만들어진 40개의 문제 각각에 대해서, 다음의 두 가지 매개변수(parameter)를 조정하여 최종적으로 실험에 이용할 실험문제들을 생성하였다.

- 설비 용량 매개변수 (CAP) : 설비 의 용량을 결정하는 매개변수로서, 3 과 5 의 두 가지 값을 이용하였다. 3과 5 각각은 설비의 용량이 30과 50 임을 의미한다. 앞에서 생성된 문제에서 수요자의 수요량의 평균은 대략 10 이므로, CAP = 3 일 때 하나의 설비가 평균 3 개의 수요자를 수용할 수 있다.
- 설비 설치비용 매개변수 (COST) : 하나의 설비 의 설치비용을 결정하는 매개변수로서, 1과 2의 두 가지 값을 이용하였다.앞에서 생성된 문제에서 수요자와 설치후보지 사이의 운반비용의 평균은 대략 50이므로 이를 이용하여 설비의 설치비용은 50*CAP*COST의 값으로 지정하였다. 이때, COST = 1의 경우는 설비의 설치비용이 수요자들의 평균 운반비용의 합과 같고, COST = 2의 경우는 설비의 설치비용이 수요자들의 최대 운반비용의 합과 같다.

위의 과정을 통하여, 16종류의 문제 각각에 대

하여 10개씩 총 160개의 문제가 생성되었다. 전산 실험은 이들 실험문제를 이용하여 Pentium PC (200 MHz)상에서 수행되었다.

4.2. 성능 기준

제시된 해법들이 표준모형을 단순히 분지한계법으로 최적해를 구하는 방법에 비해 얼마나 효과적인가를 알아보기 위해 분지한계법의 성능을 평가하기 위한 다음의 기준을 사용하였다.

$$\text{Gap0}(\%) = \frac{Z(CFLP) - Z(ILP)}{Z(CFLP)} \times 100$$

위의 식에서 Z(ILP)는 표준모형의 선형계획완화문제의 최적목적함수 값을 나타내고, Z(CFLP)는 정수최적해에 해당되는 목적함수 값을 나타낸다. Gap0가 의미하는 바는 선형계획완화문제의 최적목적함수 값과 정수최적해에 해당되는 최적목적함수 값의 상대적인 차이를 나타내며, 일반적으로 이 값이 작을수록 분지한계법에서 생성되는 노드의 수가 적어져서 짧은 시간 내에 문제를 해결할 수 있을 것이라고 예상할 수 있다. Gap0에 대응해서 본 연구에서 개발된 알고리듬의 성능을 평가하기 위해서 기본적으로 다음과 같은 값을 이용하였다.

$$\text{Gap}(\%) = \frac{Z(CFLP) - Z(SLP)}{Z(CFLP)} \times 100$$

위의 식에서 Z(SLP)는 표준모형을 이용한 분지-절단해법과 분해모형을 이용한 분지-평가해법에서 처음으로 분지하기 직전의 선형계획완화문제의 최적목적함수 값을 나타낸다. 즉, Gap으로부터 측정하고자 하는 것은 절단평면이나 열생성기법을 이용함으로서 선형계획완화문제의 최적목적함수 값과 정수최적해에 해당되는 목적함수값 사이의 차이를 얼마나 줄였는가 하는 점이다. 그 외의 성능기준으로는 시간, 열거트리의 노드 수 등을 꼽을 수 있다.

4.3. 실험 결과

(표 1)은 16개 종류의 문제집단 각각에서의 Gap0의 평균값과 분지-절단해법과 분지-평가해법의 수행결과 얻어진 Gap의 평균값을 보여주고 있다. 이로부터, CAP의 값이 커지면, 즉, 하나의 설비가 수용할 수 있는 평균 수요자의 수가 크면 Gap0 값이 커지고, 고정된 CAP 하에서는 COST 값이 커지면 Gap0 값이 작아지는 현상을 발견할 수 있다. 전체적으로는 Gap0 값은 상당히 크지만, 분지-절단해법과 분지-평가해법을 적용한 결과 얻어진 Gap은 대부분 1% 미만에 머물러 절단평면과 열생성기법이 상당히 효과적이라는 사실을 알 수 있었다. 또한 분지-평가해법이 분지-절단해법에 비해 Gap 값이 더 작다는 것을 알 수 있다.

(표 1) Gap0(%)와 Gap(%)의 평균값

(n, m)	CAP = 3					
	COST = 1			COST = 2		
	Gap0	B&C	B&P	Gap0	B&C	B&P
(10,10)	17.96	0.23	0.14	15.60	0.13	0.08
(10,20)	10.45	0.86	0.55	8.21	0.40	0.14
(20,20)	13.01	0.98	0.67	9.77	0.48	0.24
(20,40)	6.63	0.47	0.20	5.00	0.25	0.08
(n, m)	CAP = 5					
	COST = 1			COST = 2		
	Gap0	B&C	B&P	Gap0	B&C	B&P
(10,10)	25.14	0.18	0.03	22.22	0.10	0.01
(10,20)	15.82	0.30	0.18	14.01	0.16	0.10
(20,20)	17.7	1.62	1.06	13.12	0.92	0.56
(20,40)	9.41	0.37	0.15	7.66	0.20	0.08

B&C : 분지-절단해법, B&P : 분지-평가해법

(표 2)와 (표 3)은 각각 분지-절단기법해법과 분지-평가해법의 적용결과 열거트리에서 생성된 노드의 평균 개수와 최적해를 구하기까지 소요된 시간의 평균값을 보여 주고 있다. 앞에서 본 바와 같이 분지-평가해법의 경우가 분지-절단해법의 경우보다 Gap 값이 작은데, 이에 부합하여 열거트리에서 생성된 평균 노드 수도 분지-평가해법의 경우가 작은 결과를 얻었다.

(표 2) 열거트리에서 생성된 노드의 평균 개수

(n, m)	CAP = 3			
	COST = 1		COST = 2	
	B&C	B&P	B&C	B&P
(10, 10)	1	0.4	1	0.4
(10, 20)	54.8	24	15.6	3.2
(20, 20)	104.4	72.2	22.8	10.6
(20, 40)	180	64.2	107.8	23.4
(n, m)	CAP = 5			
	COST = 1		COST = 2	
	B&C	B&P	B&C	B&P
(10, 10)	1	0.4	1	0.4
(10, 20)	5.2	3.6	4.4	3.6
(20, 20)	40.8	21.4	41.2	11.2
(20, 40)	58	10.2	51.6	9.6

(표 3) 평균 작업시간 (초)

(n, m)	CAP = 3			
	COST = 1		COST = 2	
	B&C	B&P	B&C	B&P
(10, 10)	0.60	1.46	0.61	1.52
(10, 20)	16.24	9.58	6.35	6.09
(20, 20)	65.26	20.57	11.06	9.84
(20, 40)	689.08	116.14	237.81	89.85
(n, m)	CAP = 5			
	COST = 1		COST = 2	
	B&C	B&P	B&C	B&P
(10, 10)	0.58	1.53	0.56	1.52
(10, 20)	1.74	6.45	1.66	6.39
(20, 20)	17.32	21.29	18.57	13.95
(20, 40)	100.69	59.28	79.05	60.85

표준모형을 이용한 단순한 분지한계법과 비교해보면, Gap 이 작은 것이 얼마나 큰 효과를 발휘하는 지를 잘 알 수 있겠지만, 분지한계법으로 예비실험을 한 결과 상당한 시간(30분)을 소요하고도 최적해를 찾지 못하는 경우가 많아 전체 실험문제를 대상으로 실험하지는 않았다. 전체 계산시간 결과를 보면 평균적으로 분지-평가해법이 적은 시간을 소비한 것으로 나타났다.

V. 결 론

본 논문에서는 용량제약이 있는 설비배치-할당문제(CFLP)를 해결하기 위해 이 문제에 대한 정수계획모형을 개발하였다. 개발되어진 모형은 표준모형과 분해모형의 두 가지이며, 이 모형들을 이용하여 (CFLP)의 최적해를 구할 수 있는 알고리듬을 설계하였다. 개발된 해법은 표준모형과 절단평면을 이용한 분지-절단해법과 분해모형과 열생성기법을 이용한 분지-평가해법이다. 개발된 해법들을 구현하여 랜덤하게 생성된 실험문제에 적용한 결과, 상당히 효과적이고 효율적임을 알 수 있었다. 개발된 모형과 해법은 물류시스템 설계시 물류센터의 위치선정이나 또한 통신시스템 설계시 통신설비의 위치선정에 이용될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] C. Barnhart, E. L. Johnson, G. L.Nemhauser, M. Savelsbergh, and P. Vance, "Branch-nd-rice : Column generation for solving huge integer programs", *Mathematical Programming: State of the Art*, eds., J. R. Birge and K. G. Murty, pp. 186-207, 1994.

[2] D.C. Cho, E.L. Johnson, M.W. Padberg, and M.R. Rao, "On the uncapacitated plant location problem I: Valid inequalities and facets", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 8, pp. 579-589, 1983.

[3] D.C. Cho, E.L. Johnson, M.W. Padberg, and M.R. Rao, "On the uncapacitated plant location problem II: Facets and lifting theorems", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 8, pp. 590-612, 1983.

[4] M. S. Daskin, *Network and Discrete Location : Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, New York, 1995.

[5] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractibility : A Guide to the theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[6] E. L. Johnson, A. Mehrotra and G. L. Nemhauser, "Min-cut clustering", *Mathematical Programming*, Vol. 62, pp. 133-152, 1993.

[7] D. Kim, Algorithm for the ATM Switching Node Location Problem, Master's Thesis, Dept. of I.E., KAIST, Taejon, Korea, 1998.

[8] K. Lee and S. Park, "A Special Type of C-G Cuts", working paper, Dept. of I.E., KAIST, Taejon, Korea, 1997.

[9] K.G. Murty, Linear and combinatorial programming, Wiley, New York, 1976.

[10] A. W. Neebe and M. R. Rao, "An Algorithm for the Fixed-Charge Assigning Users to Sources Problem", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 32, pp. 1107-1113, 1983.

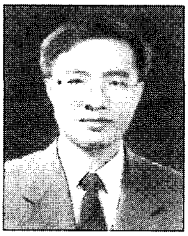
[11] G. L. Nemhauser and L. A. *Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.

[12] M. Padberg and G. Rinaldi,"A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems", *SIAM Review*, Vol.33, pp.60-100, 1991.

[13] K. Park, S. Kang and S. Park, "An Integer Programming Approach to the Bandwidth Packing Problem", *Management Science*, Vol. 42, pp. 1277-1291, 1996.

강 성 렬

1981년 서울대학교 산업공학과 (공학사)
1983년 서울대학교 산업공학과 (공학석사)
1992년 미국 Georgia Tech. 산업시스템공학과(Ph.D.)
1983년~1998년 ETRI 책임연구원
1999년~2000년 KAIST 테크노경영대학원 초빙교수
2000년~현재 홍익대학교 경영정보학과 조교수
관심분야 : 정보통신망, 인터넷과 e-비즈니스, 시스템모델링



손 진 현

1986년 서울대학교 수학과(이학사)
1991년 한국과학기술원 산업공학과(공학석사)
1997년 한국과학기술원 산업공학과(공학박사, OR 전공)
1997년~현재 선문대학교 경영학부 조교수
관심분야 : 수송망설계, 정수계획법, Network 이론