大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 12 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.1, 71-79. Feb 2002

# 수학교육에서 시각화와 직관

이 대 현* 박 배 훈**

## Ⅰ. 서론

수학은 수학적 대상에서 이질적인 요소는 버리고, 공통적인 요소를 추출하여 형식화하는 추상화에 의하여 생성된 개념을 다루는 학문이다. 이러한 추상성의 특징으로 인하여, 학생들은 수학적 개념·원리·법칙을 쉽게 인식하지 못하였으며, 수학적 사실을 이해하는데 어려움을 느껴왔다. 이와 같이 수학 학습에서의 오랜 기간동안 누적된 경험은 학생들이 수학을 어려운 과목으로 간주하도록 만들어 왔다.

따라서, 학생들이 수학적 개념·원리·법칙을 학습할 때, 그들의 직접적인 인식을 통하여 수학적 개념·원리·법칙에 쉽게 접근할 수 있도록 고안된 교수-학습 방안이 요구된다. 이에, 지각에 도움을 주는 구체물이나 매개체들은 수학적 사실의 인식에 유용한 도구가 될 수 있는 바, 수학 학습에서 수학적 사실의 시각화는 수학의 추상성을 극복하여 학습자의 직접적인 이해에 도움을 주는 요소로 간주되어진다.

이러한 의미에서, 시각화는 추상적인 수학적 개념·원리·법칙을 지도하는데 효과적인 방안의 하나이다. 수학적 개념의 시각화는 모호한 종류의 직관이나 이해에 대한 표면적인 대응이 아니라, 이해에 깊이와 의미를 주고 문제해결에 믿음직한 안내자를 제공하며, 창의적인 발견을 고취시키는 마음의 눈에서 형성된 그림을 통한 직관이다(신동선, 류희찬, 1998). 또한, 수학적 개념의 시각화는 학생들의 직관에 호소할 수 있는 시각적인 자료를 제공함으로써, 수학적 사실을 보다 쉽고 직관적으로 이해할 수 있게 하며, 학생들 스스로가 직접 눈으로 수학적 사실을 확인하게 함으로써 더욱 의미 있고 효과적인 수학 학습을 가능하게 한다.

그럼에도 불구하고, 시각화가 학교 수학교육에 있어서 소홀히 다루어 온 것도 사실이다. 이에 대한 주요 이유로는 학교 수학의 정신을 논리적 엄밀성의 추구로 보고, 학교 수학의 여러 영역에서 논리적 접근을 강조하고 있다는 것을 들 수 있다. 이것은 유클리드 기하와 19세기 말 이래로 실 무한의 개념과 같이 인간의 직관을 넘는 수학적 대상의 발견에 기인한다. 또 다른 이유로는 시각화 자료의 부족이나 시각화를 위한 도구의 결여에 기인한다고 볼 수 있다. 이러한 시각화에 대한 학교 수학교육에서의 홀대는 수학 교수방법론의 변화와 다양한 교수 공학의 발달로 인하여 극복할 수 있는 대상이 되고 있다.

이에 본 연구에서는 수학교육에서 시각화와 관련하여, 수학교육에서 시각화의 의미에 대하여 긍정적인 면과 부정적인 면을 동시에 살펴본다. 그리고, 직관적인 문제해결 과정에서 시각화의 역할과 수학적 사실의 시각화에 의한

* 전주공고
** 한국교원대

직관의 신장 방안에 대하여 알아본다.

## II. 수학교육에서 시각화의 의의

많은 학생들이 중등 학교로 진급할수록 수학을 어렵고 힘든 과목으로 인식하는 것은 수학 자체가 지니고 있는 특징, 즉 수학적 사실을 추상화된 기호로 나타내고 논리-연역적으로 전개해 나가면서 엄밀한 형식 체계를 구축하는 수학 자체의 특징 때문이다. 따라서, 이러한 수학 학습의 어려움의 근본적인 원인을 추출하고 치유할 수 있는 방안이 모색될 필요가 있는데, 이러한 측면에서 수학적 사실의 시각화는 유용하다.

시각화는 추상적인 수학적 개념・원리・법칙을 구체적이고 직접적으로 지도하는데 효과적인 방안의 하나이다. 공리주의의 창시자 Hilbert 조차 "이중부등식 $a > b > c$와 함께 '사이에 있다'는 아이디어에 대한 기하학적 그림으로 직선 위에서 연속된 세 점의 그림을 항상 사용하지 않는 사람이 있는가? 함수의 연속성이나 집적점의 존재에 대한 어떤 어려운 정리를 완전히 엄밀하게 증명하도록 요구될 때 거듭 축소되는 선분이나 직사각형의 그림을 이용하지 않는 사람이 있는가?"라고 말하며, 수학 학습에서 수학적 개념의 시각화를 바탕으로 한 이미지의 역할을 강조하였다(Reid, 1970; Fischbein, 1987, p. 17에서 재인용).

Polya(1957)도 "그림은 기하 문제의 대상이 될 뿐 아니라, 처음에 전혀 기하적이 아닌 모든 문제 풀이에 중요한 도움이 된다"(p. 93)고 강조하며, 문제해결 과정에서 그림을 그릴 것을 권고하고 있다.

시각화는 수학과 과학 분야에서, 때때로 창의적인 연구 활동에서 중요한 역할을 수행해 왔다. Poincaré(1905)는 수학자들의 논문을 조사한 후에, 수학자를 기하학적 학파와 해석학적 학파로 나누고 있는데, 기하학적 학파는 직관에, 해석학적 학파는 논리에 의존한다고 한다. 따라서, 기하학적 학파의 글은 마치 최전방의 용사가 확실한 승리의 전략도 없이 일거에, 그리고 급속히 쳐들어가는 것과 같고, 해석학파의 글은 마치 포위 작전을 하면서 적의 성곽을 조여 가는 것처럼 보여진다.

Riemann과 Weierstrass는 기하학적 학파와 해석학적 학파의 예로 적절하다. Riemann은 모든 관념을 한 번 이해하기만 하면 결코 잊을 수 없는 도형으로 표현하였다. 이와는 달리, Weierstrass의 경우에는 그의 전집에서 도형을 찾아보기 힘이 든다. 그러나, 이러한 구분에도 불구하고 Poincaré(1905) 자신도 지적하듯이, 수학의 발달의 과정은 직관과 논리의 상보적인 역할의 수행에 의해 이루어져 왔음을 간과해서는 안 된다. 이에 대하여, Poincaré(1905)는 "논리만으로 불충분하다는 것, 논리과학만이 유일한 과학이 아니라는 것, 그리고 직관은 논리의 보정해독의 역할을 한다는 것을 보여주는 것이다"(김형보(역), 1983, p. 68)라고 진술하고 있으며, 이와 같은 견해는 Hadamard(1945)의 글에서도 쉽게 발견할 수 있다.

> 첫째, 모든 정신 활동, 그 중에서도 특히 발견의 작업은 의식과 가까운 또는 멀리 떨어진 무의식의 협조를 필요로 한다. 둘째, 의식적인 예비작업 후에 이 무의식 속에서는 Poincaré가 다소 분산되는 원자의 사출에 비교했던 아이디어의 분출이 일어난다. 셋째, 아이디어를 종합하고 그리고 종합하기 위하여 정신은 구체적인 표상을 사용한다. 결과적으로 이 분석은 엄격히 말해서 순전히 논리적이기만 한 발견은 결코 있을 수 없다는 것을 말해준다. 그래서 무의식의 개입이 필요한데 적어도 논리적인 작업을 출발시키기 위해 그러하다는 것이다. (p. 112)

한편, 육각형 구조인 벤젠 분자의 원자의 배열을 발견한 Kekule의 일화에서도 창의적인 연구 활동에서 시각화의 중요성을 발견할 수 있다. 그는 문제에 대하여 집중하려고 시도하면서 그는 몇 년 동안 방황했다. 1865년 어느 오후에 Kekule는 원자를 상상하고 다음과 같이 썼다.

......나의 눈앞에 요술을 부리고 있다. ...... 내 마음의 눈은 유사한 종류의 반복된 광경에 의하여 격렬하게 되었고, 다른 형태의 긴 사슬의 큰 구조를 구별하게 되었다. 그들 대부분은 가깝게 있었다; 모든 것은 뱀과 같이 움직였고, 꼬여 있었다. 갑자기 이것이 무엇이지? 뱀 한 마리가 그의 꼬리를 잡게 되었고, 전체 구조는 내 눈앞에서 흉내 내듯이 꼬여 있었다. 빛에 의해 느끼듯이 나는 일어났다.

(Fischbein, 1987, p. 105에서 재인용)

이와 같이, 시각적으로 표현된 표상은 상징적으로 표현된 문자식에 비해 창의적 활동에 탁월한 역할을 수행해 왔음을 알 수 있다.

또한, 학교 수학에서 시각화된 자료는 학생들에게 수학에 대한 좀더 나은 이해의 상황을 제공해 준다. 수학적 사실의 인식이나 이해의 상황에서, 시각적으로 제시된 수학적 사실은 학습자에게 수학을 직관적으로 이해할 수 있는 가능성을 열어 준다. 그리고 학교 수학에서 다루어지는 많은 수학적 사실들이 시각적으로 표현 가능하다는 사실을 염두에 둘 때, 시각화는 학교 수학에서 매우 고무적이며, 수학교육의 측면에서 경시되어 온 직관을 통한 교수학적 상황의 창안 가능성을 제시해 준다.

시각화와 관련하여, Skemp(1986)는 수학에서 이용되는 기호 체계를 언어-대수적 기호와 시각적 기호로 나누어 비교하고 있다. 그는 시각적 기호의 예로 모든 종류의 다이어그램이나 기하학적 도형들을 제시하고 있다.

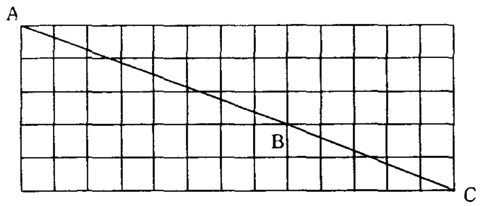
<표 1> 시각적 기호와 언어-대수적 기호

| 시각적 기호 | 언어-대수적 기호 |
|---|---|
| 모양, 위치 등 공간 성질의 추상화 | 수와 같이, 공간적 형태와 무관한 성질의 추상화 |
| 의사소통하기가 어렵다 | 의사소통하기가 쉽다. |
| 보다 개별적인 사고를 표상 | 보다 사회화된 사고를 표상 |
| 통합적, 구조를 명시 | 분석적, 세부사항을 명시 |
| 동시적 | 순서적 |
| 직관적 | 논리적 |

수학교육에서 시각적 기호와 언어-대수적 기호는 각각 이용되어지기도 하고, 서로 병행하여 이용되어지기도 한다. 예를 들면, Weierstrass와 같이 엄격한 논리적인 관점으로 이론을 전개해 가는 수학자에게도 변분법에 대한 방법론을 다루는 책에서는 가장 완벽한 인상을 주는 도형이 주어져 있다. 이 도형을 바탕으로Weierstrass는 극도의 논리적인 방식으로 모든 것을 연역하였다(Hadamard, 1945). 이와 같이, 수학교육에서 시각적 기호와 언어-대수적인 기호는 상보적이라 할 수 있다. 따라서, 두 가지 기호 체계의 장점을 살릴 수 있도록 교수 방안이 제시된다면 수학 학습은 더욱 효과적일 것이다.

한편, 시각화가 수학 학습에서 부정적인 효과를 가질 수 있음을 알아야 한다. 이것은 우리의 시각에 한계가 있기 때문이며, 또한 시각을 통하여 얻은 정보를 지나치게 과신하기 때문이다. 우리가 어떤 대상을 볼 때, 동일한 장소에서 동일한 대상을 보더라도 관찰자에 따라 대상을 다르게 인식할 수 있으며, 시각을 통하여 습득된 정보는 관찰자의 경험이나 지식, 또는 직관적 판단에 의해 다르게 인식될 수 있다. 특히, 시각을 통해 인식된 대상에 대해 면밀히 분석하지 않은 즉각적인 판단은 사물의 특성을 왜곡시키는 원인이 되기도 한다. 예를 들어, 다음 그림은 도형이 주는 시각적 이미지가 수학 문제해결 과정에서 오류를 일으키게

하는 원인이 되는 경우를 나타낸다.




<그림 1> 직선의 착시

위 그림에서 선분 AB와 선분 BC를 이으면, 이어진 선은 직선으로 보인다. 그러나, 이 도형을 분석해 보면, 선분 AB와 선분 BC의 기울기가 다르므로 직선이 아님을 쉽게 알 수 있다. 마찬가지로, 연속함수의 그래프에서 미분 계수의 존재에 관한 논의에서, 오랜 기간동안 수학자들이 시각에 의존하여 잘못된 인식을 가져왔던 사실은 Weierstrass가 모든 점에서 미분계수를 갖지 않는 연속함수를 제시함으로써 수정되었다. 따라서, 수학적 사실의 시각화를 위해서는 시각화된 표상 자체에 의하여 야기될 수 있는 부정적인 역할을 충분히 고려해야 한다.

## III. 직관적인 문제해결 과정에서 시각화의 역할

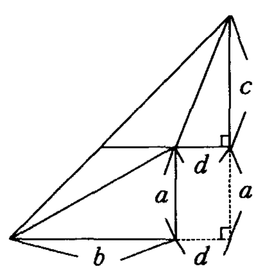
수학은 수학적 대상을 추상화하는 과정과 추상화에 의해 생성된 개념을 다루는 학문이다. 이러한 수학의 특징으로 인하여, 수학적 개념은 학생들에게 쉽게 이해되어지지 않는다. 그러므로, 수학 교수-학습에서 추상적인 수학적 개념을 다룰 때, 구체물이나 지각에 도움을 주는 수학적 대상의 시각화를 이용하는 것은 효율적인 교수-학습 방안이 될 수 있다.

이러한 의미에서, 수학적 사실의 시각화는 추상적인 수학적 개념·원리·법칙을 지도하는데 효과적인 방안의 하나이다. 또한, 수학적 개념의 시각화는 폭 넓은 수학 자체의 발달에도 기여하여 왔다. 예를 들면, 수학의 발달의 역사에서, 논증 기하는 좌표평면이 도입된 해석 기하의 도움으로 그 발달의 폭이 넓어지고, 깊이가 깊어졌으며, 우리에게 좀 더 쉽게 인식되어졌다.

먼저, 수학 교수-학습의 문제해결 과정에서 시각화된 표상은 수학적 개념·원리·법칙에 대한 직관적 인지의 즉시성과 자명성을 창안해 내는데 필수적인 요소이다. 이것은 시각화된 표상이 그 자체의 이미지에 의해, 번뜩이는 아이디어가 발현되게 하는 직관을 경험할 수 있게 하는 유용한 매개체임을 의미한다. 이러한 이유로, 수학 교수-학습 상황에서 시각화는 학습자의 직관을 신장시킬 수 있는 유용한 도구가 될 수 있다. 예를 들면, 부등식에 대한 성질

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

가 성립함을 보이기 위하여, 다음과 같은 그림을 이용하여 시각적으로 보여 줄 수 있다.




<그림 2> $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$의 증명

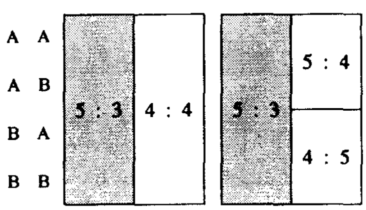
(Nelsen, 1993, p. 60)

이와 같은 시각화된 표상은 학습자가 '대수적이고 논리적인 증명'에 의해 주어진 부등식이 성립함을 보이는 것 보다, 그 자체의 이미지에 의해 입증하고자 하는 성질을 직관적으로 이해하도록 해 준다.

마찬가지로, 시각화는 수학 문제해결 과정에서 문제에 주어진 자료와 조건을 시각적으로 표현함으로써, 문제를 직관적으로 이해하고 해결하는데 유용한 전략이 될 수 있다. 이것은 Polya(1957)가 문제해결 과정에서 중요한 권고로 제시하고 있는 "그림을 그려라"와 같은 맥락을 취한다고 볼 수 있다. 이와 관련하여, 확률론을 발달시킨 '분배 문제'는 수학 문제해결에서 원래의 개념에만 의존하지 않고, 문제해결에서 시각화를 이용하여 쉽고 직관적으로 이해할 수 있는 좋은 예시가 된다.

A, B 두 사람이 먼저 5번을 이기는 사람이 상금을 갖기로 하고, 이길 가능성이 서로 똑같은 게임을 하는데, A는 4게임을, B는 3게임을 이긴 상태에서 게임을 중단하게 되었다. 상금은 어떻게 나누는 것이 바람직한가?

많은 사람들은 4 : 3 또는 (5-3) : (5-4)라고 대답함으로써, 확률적 사고에서 범하는 오류를 잘 나타내어 주는 문제이다(우정호, 1998). 게임이 계속되었다고 가상하면, 일어날 수 있는 전체의 경우의 수는 4인데, 그 중에서 A가 이기는 경우는 3가지이므로 3 : 1로 나누어야 한다. 이 경우에 기하학적 확률의 시각화된 이미지는 확률의 개념에 대한 이해와 확률적 사고를 신장시키는데 매우 효과적이다.




<그림 3> '분배 문제'에 대한 시각화된 표상

또한, 시각화된 이미지는 문제해결 과정에서의 역할뿐만 아니라, 수학의 개념이나 정리에 대한 직관적 이해에 기여한다. 수학의 많은 정리들은 시각화가 가능하며, 시각화된 수학의 개념이나 정리는 수학 교수-학습에서 수학적 사실의 직관적 이해에 도움이 된다.

예를 들면, 고등 학교 수학에서 다루어지는 산술 평균과 기하 평균의 대소 관계( $a>0$, $b>0$ 일 때, $(a+b)/2\geq\sqrt{ab}$)에 대한 증명은 다음과 같은 시각화된 이미지에 의해 쉽게 이해시킬 수 있다.

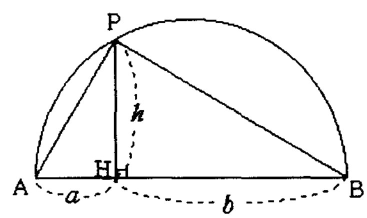
다음 그림과 같이 지름의 양 끝 점이 각각 A, B인 반 원 위의 점 P에서 지름에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\triangle PAH \backsim \triangle BPH$이다. 따라서, $\overline{AH}=a$, $\overline{HB}=b$, $\overline{PH}=h$라 하면, $\overline{PH}=\sqrt{ab}$ 이고, $\overline{PH}$의 최대값은 $\overline{PH}$가 주어진 원의 반지름일 때인

$$\frac{a+b}{2}$$

이므로, 두 양수 $a$, $b$에 대하여

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

이 성립한다. 물론, $\overline{PH}$가 반지름이 될 때 등호는 성립하게 되므로 $a=b$ 일 때만 등호가 성립함을 알 수 있다.

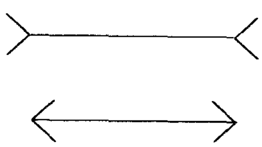



<그림 4> 산술 평균과 기하 평균과의 관계 (Nelsen, 1993)

이러한 면에서, Fischbein(1987)은 시각화된 표상이 단순한 이미지가 아니며, 전체적인 해가 완전히 개발되지 않았다 할지라도 내재적 확실성의 느낌과 결합하여 전체적인 정보를 조직하고, 문제에 대한 의미 있는 구조로 즉각적으로 자료를 조직하여 분석적인 발달을 안내하는 중요한 요인이 된다고 지적하고 있다.

한편, 시각화된 이미지는 직관적인 판단의 상황에서 오류를 일으킬 수 있는 가능성을 내포하고 있다. 이에, Zakova(1970)는 부적절한 시각적 표현 자체가 오히려 문제를 해결하는데 방해가 될 수 있는 것으로 지적하고 있다(장경윤, 1992).

Müller-Lyer는 Mach 착시로 알려진, 똑 같은 길이를 가진 두 개의 수평선 길이를 다르게 인식하게 하는 직관의 오류를 제시하고 있다 (Klein, 1985; 김경화, 이혜숙 (공역), 1994, p. 27). 다음 그림은 실제로는 같은 길이의 수평선이지만, 우리의 시각은 화살표 방향이 주는 인상에 의하여 직관적으로 위의 길이를 길게 느낀다.



<그림 5> Mach 착시

마찬가지로, 수학 학습에서 수학적 개념의 시각화가 그 개념과 관련된 사실에 대한 그릇된 개념 형성의 원인이 되기도 한다. 반점으로서 점을 나타내거나, 띠로서 선을 나타내는 수학 학습은 이후에 '선분의 길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응이다'라는 사실을 받아들이는데 어렵게 한다. 점이 실제적인 물리적 반점이라면 길이가 긴 선분이 더 많은 점을 갖고 있게 되지만, 점의 개념은 실제적으로 크기가 없는 0차원 대상일 뿐이다.

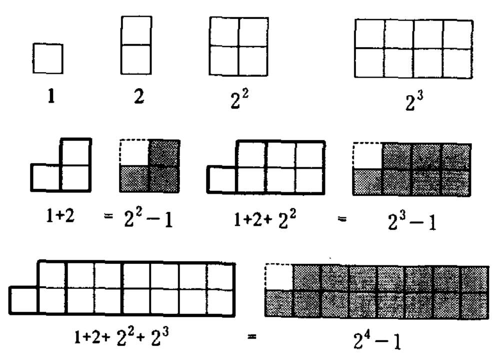
따라서, 수학적 사실을 시각화할 경우에는 시각화된 표상 자체에서 파생될 수 있는 오류를 예측해야 한다. 이를 위해, 시각화된 표상은 인간의 지각의 한계를 벗어나지 않도록 구안되어야 하며, 원형과 관련된 개념의 명확한 분석의 결과로 제시되어야 한다. 또한, 시각화된 표상 자체에 집중함으로써 논리-연역적인 접근 방식을 외면하는 것을 피해야 하며, 소위 메타-인지적 이동이 일어나지 않도록 유의할 필요가 있다.

## IV. 시각화에 의한 직관의 신장 방안

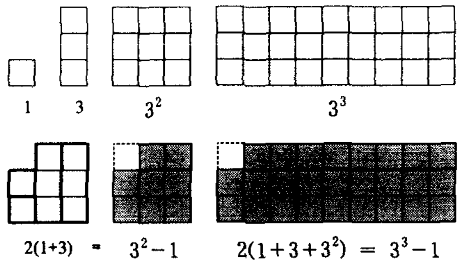
수학 교수-학습에서, 시각화는 추상적인 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 지도하는데 효과적인 방안의 하나이다. 이것은 시각화된 이미지가 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 직관적으로 이해하게 하는데 직접적인 도움을 준다는 것을 의미한다(Fischbein, 1987). 즉, 학습자는 수학적 대상의 시각화된 표상을 이용하여 추상화된 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 그들의 인지 구조 안에서 쉽게 이해할 수 있으며, 문제해결에 대한 단서나 해결책을 발견하도록 하는 '예측 직관'을 경험할 수 있다.

예를 들면, 등비수열 $a_n = ar^{n-1}$의 $n$항까지의 합 $S_n$을 산술적인 방법에 의하여 않고, 이를 시각화한 방법을 이용하여 등비수열의 합을 쉽게 계산할 수 있다. 이러한 시각화된 표상은 그 자체의 이미지에 의해 등비 수열의 합에 대한 아이디어가 발현되게 하는 예측 직관을 경험할 수 있게 해 주는 유용한 매개체이다.

$$1+2+2^2+2^3+\cdot\cdot\cdot+2^{n-1} = 2^n-1$$



$$1+3+3^2+3^3+\cdot\cdot\cdot+3^{n-1} = \frac{3^n-1}{2}$$




마찬가지로, 임의의 $k$ 에 대하여 $k-1$개의 사각형을 각각 붙여 나가면 되기 때문에

$$1+k+k^2+k^3+\cdot\cdot\cdot+k^{n-1}=\frac{k^n-1}{k-1}$$

이 성립함을 알 수 있다.

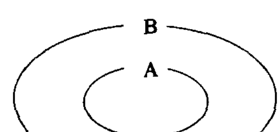
이와 같이, 시각화된 표상은 원형보다 인간의 사고 방식에 보다 잘 적응되어지며, 원형의 추상적이거나 불확실한 것 그리고 암시적인 것보다, 구체적이고 확실하며 실용적으로 다루기가 편리한 특징을 가진다. 이것은 시각화가 추상적이고 불확실하며 사고의 폭을 넘는 무한의 대상보다, 사고 영역 내에서 쉽게 지각할 수 있고 구체적으로 다룰 수 있는 대상을 이용함으로써, 문제해결에 즉각적인 해를 산출하도록 조장해 준다는 것이다.

직관의 신장을 위한 수학적 사실의 시각화의 유용한 도구로 컴퓨터 탐구형 소프트웨어는 가치 있다. 학교 수학의 교과서에 정적으로 제시된 시각화된 표상은 학습자의 개념 형성이나 사고의 유연성 계발에 제약을 줄 수밖에 없으며, 수학적 개념·원리·법칙은 다양하고 역동적인 상황에서 학습자에게 제시되어야 한다. 이것은 Dines(1960)의 '지각적 다양성의 원리'와 '수학적 다양성의 원리'의 의미와 같은 맥락을 취한다. 즉, 탐구형 소프트웨어는 학생들에게 직접적인 조작의 기회를 제공함으로써, 역동적인 동영상을 통하여 지필 환경에서 구현하기 어려운 시각화를 제공하고, 수학적 사실의 불변성을 보여줄 수 있다.

특히, 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 학생들의 자기 주도적인 직관적 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다(류희찬, 1998).

예를 들면, 탐구형 소프트웨어인 GSP를 이용하여 삼각형의 무게중심의 성질을 여러 형태의 삼각형에 대하여 조작해 봄으로써, 학생들이 스스로 삼각형의 무게중심의 성질을 발견해 보도록 유도할 수 있다. 이러한 활동은 시각화를 통한 수학적 개념이나 성질에 대한 직관을 경험하도록 해 준다.

한편, 수학적 사실의 시각화가 그 자체로 직관적 지식은 아니다(Fischbein, 1987). 시각화된 표상이 직관의 즉시성을 창안하는 중요한 요인이지만, 즉시성이 직관적인 지식을 생산하는 충분조건은 아니다. 더욱이, 시각화된 표상이 수학적 사실의 획득이나 문제해결 과정에서 오류를 야기할 수도 있다. 이것은 수학적 사실의 시각화가 원형에 대한 명확하고 체계적인 개념적 분석을 통해 이루어져야함을 의미한다. 예를 들어, 부분집합을 나타내기 위한 벤다이어그램은 부분집합에 대한 의미를 즉각적으로 이해하게 하는데 유용한 도구이지만, "A가 B를 포함한다"에서 "B가 A에 포함되어지거나 A가 B에 포함되어진다"는 의미도 내포하고 있다는 사실을 받아들이기 어렵게 한다.




<그림 6> $A \subset B$ 에 대한 시각화

또한, 시각화된 표상이 원형과 관련된 의미의 명확한 개념적 분석과 이해를 바탕으로 제

시되지 못할 경우에, 학습자는 학습 목표의 도달에 어려움을 겪는다. 예를 들어, Janvier(1981)는 트랙을 운행하는 차의 속도와 거리에 관한 그래프를 주고, 그 트랙의 선형을 그리게 하는 문제와 그 역의 상황을 묻는 문제를 제시하였다. 피험자(중등학교 학생)들은 트랙과 그래프의 구조의 유사성 때문에 그래프와 트랙의 구조를 혼동하는 것과 같은 오류를 나타내었다.

이러한 예시들은 시각화된 표상이 제공하는 정보에 지나치게 과신하는 현상을 말해 준다. 수학 교수에서 이를 피하기 위해서는 시각화되어지는 원형과 관련하여, 이에 대한 추상적인 수학적 사실을 시각화하기 전에 명확하고 체계적인 개념적 분석과 이해가 선행되어야 함을 의미한다.

## V. 결론

논리의 엄밀성을 강조해 온 수학교육의 전통은 수학적 사실의 시각화된 표상을 조잡하고 열등한 방법이라고 간주해 왔다. 그러나, 학교수학에서 시각화는 추상적인 수학을 직접적이고 구체적인 방법으로 인식하게 하는 강력한 힘을 가지고 있다. 특히, 수학교육에 있어서 시각적 사고는 직관과 관련하여 암기를 돕고, 때로 효과적인 문제해결에 도움을 준다(장경윤, 1992).

이에 본 연구에서는 수학교육에서 시각화가 갖는 의의를 살펴보고, 직관적인 문제해결 과정에서 시각화의 역할과 수학적 사실의 시각화를 통한 직관의 신장 방안에 대하여 알아보았다. 수학 문제해결 과정에서 시각화된 표상은 그 자체의 이미지를 통하여 직관을 발현하게 하는 유용한 매개체이다. 이것은 수학적 대상의 시각화를 이용하여 추상화된 수학적 개념·원리·법칙을 학생들의 인지 구조 안에서 쉽게 이해시킬 수 있으며, 문제해결의 단서나 해결책을 발견하는 예측 직관의 발현을 경험할 수 있게 할 수 있음을 의미한다.

그러나, 시각화가 수학 학습에서 부정적인 효과를 가질 수 있음을 알아야 한다. 이것은 우리의 시각에 한계가 있기 때문이며, 시각을 통해 얻은 정보를 지나치게 과신하기 때문이다. 따라서, 시각화를 통하여 학생들의 수학에 대한 이해를 증가시키고, 문제해결력을 강화시키는 교수 학습 방안의 모색뿐만이 아니라, 시각화를 통해 나타날 수 있는 부정적인 측면을 최소화시킬 수 있는 교수 학습 방안도 모색해야 한다.

## 참고문헌


류희찬 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학교육의 이론과 실제. 수학교육학 연구발표대회 논문집. 대한수학교육학회.

신동선, 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터. 서울: 경문사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

장경윤 (1992). 수학교육에 있어서의 시각화와 시각적 사고. 대한수학교육학회논문집, 2(2), 53-63.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*. Hutchinson Educational, Ltd.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht: D. Reidel Publisching Company.

Hadamard, J. (1945). *The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematics Field*. Princeton University

Press.
Janvier, C. (1981). Use of Situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 113-122.
Klein, M. (1985). *Mathematics and the Search for Knowledge*. Oxford University Press. 김경화, 박혜숙 (공역) (1994). 지식의 추구와 수학. 서울: 이화여자대학교 출판부.
Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.
Poincaré, H. (1905). *La Valeur de la Science*. 김형보 (역) (1983). 과학의 가치. 단대출판부.
Polya, G. (1957). *How to solve it: (2nd Edition)*. New York: Doubleday.
Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of learning mathematics. (2nd Edition)*. Harmonsworth: Penguin.

## Visualization and Intuition in Mathematics Education

Lee Dae-Hyun (Jeon-ju Technical High School)
Park Bae-Hun (Korea National University of Education)

Visualization have strong driving force that enables us to recognize abstract mathematics by direct and specific method in school mathematics. Specially, visual thinking helps in effective problem solution via intuition in mathematics education. So, this paper examines the meaning of visualization, the role of visualization in intuitive problem solving process and the methods for enhancement of intuition using visualization in mathematics education.

Visualization is an useful tool for illuminating of intuition in mathematics problem solving. It means that visualization makes us understand easily mathematical concepts, principles and rules in students' cognitive structure. And it makes us experience revelation of anticipatory intuition which finds clues and strategy in problem solving.

But, we must know that visualization can have side effect in mathematics learning. So, we have to search for the methods of teaching and learning which can increase students' comprehension about mathematics through visualization and minimize side aspect through visualization.