大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 12 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.1, 17-27. Feb 2002

덧셈 문장제에서 대상의 동질성과 상황의 다양성에 대한 소고

장 혜 원*

I. 시작하는 말

수학교육에서 문장제의 역할은 무엇인가? 수학교육에서 중요한 관심사인 문제해결과 관련하여 학교 수학이 종종 사용하는 도구 중 하나가 일상 언어로 된 문장의 형식을 빌어 표현한 문제인 문장제이다. 문장제는 자칫 형식적이라는 느낌을 주기 쉬운 수학 활동에 대해 학생으로 하여금 실생활과의 관련을 통해 자신이 하는 수학 활동에 의미를 부여하도록 할 뿐만 아니라 수학화의 경험, 문제해결력의 신장이라는 측면에서 볼 때 충분히 활용 가치를 지닌다. 특히 덧셈 문장제는 아동의 발달 단계상 이른 시기에 가장 흔하게 접할 수 있는 경우이다.

철학적 관점에 있어서, 근대 철학의 두 주류인 합리주의와 경험주의가 첨예하게 대립 양상을 보이는 부분이 바로 수학에 대한 입장이라 할 수 있다. 전자의 주장이 가장 잘 들어맞는 학문이 수학인 반면, 후자의 주장이 들어맞지 않는 유일한 분야가 수학이기 때문이다. 경험론자들은 수학 이외의 모든 지식이 관찰에서 비롯되므로, 항상 관찰이 사고에 선행되고 관찰한 것에 대해서만 사고할 수 있다고 생각하였다. 이렇듯 대부분의 경험론자들이 자신의 방법론이 들어맞지 않는 수학적 지식에 대해 그 획득 방법에 대한 설명을 회피한데 비해 J.S.Mill은 3개의 단추와 4개의 단추를 합해 7개의 단추라는 사실의 관찰을 통해 3+4=7임을 안다고 하면서 수학적 지식의 경험론을 제안하여, 수학 역시 경험에 기초한 자연과학임을 주장한다(Davis & Hersh, 1981). 이 때, 수학적 개념을 내포하고 있는 경험적 상황은 경험론의 입장에서 수학적 지식에 접근하는 본질적인 수단이 되는 것이다.

문장제의 구성은 출제자가 의도하는 수학적 지식을 요구하는 것을 목표로 하여 한 편의 시나리오를 구성하는 것이다. 중요한 것은 그 시나리오의 수학적 적합성 여부에 관한 것이다. 본 고는 덧셈 개념을 효과적으로 가르치기 위해 이용한 문장제가 잘못하면 출제자가 의도하지 않은 부작용을 은연중 학생에게 야기시킬 수 있다는 문제 의식에서 출발한다. 여기서 부작용이란 수학적 지식의 학습에 대한 실패 이상으로 합리적, 논리적 사고력으로 대표되는 수학적 사고력의 저해라 말할 수 있다. 나아가 보다 광범한 인성 교육의 오도로 확장될 수도 있다. 이러한 관점에서 문장제 출제시 의도된 수학적 지식을 표현한 상황이나 그 상황에 포함된 대상의 선택과 관련하여 충분한 검토가 선행되었는지가 고려되어야 한다.

본 고에서는 적합한 덧셈 문장제의 구성을 위해 두 가지 측면에서 접근할 것이다. 문장제에 포함된 대상의 동질성 측면과 문제 상황의

* CK 사이버 시스템 개발원

다양성 측면이다. 아동에게 불필요한 수학적, 논리적 오개념이 생길 수 있는 위험을 방지하고자 덧셈 문장제에 등장하는 대상의 동질성과 관련한 적절성에 초점을 맞추어, 이질적 대상에 대해 행해지는 수학적으로 부자연스러운 덧셈이 야기시키는 문제점에 대한 논의와 더불어, 나아가 수학적, 심리적으로 다양한 문제 상황을 설정하기 위한 체계적인 방안으로서 개념적 장으로서의 덧셈 구조에 기초한 문장제 구성을 제안하고자 한다.

II. 덧셈 문장제에 포함된 대상의 동질성에 대한 고려

자연수의 덧셈을 처음 학습하는 초등학교 1학년의 수학 교과서나 기타 교재에는 덧셈 개념의 도입과 숙달을 위해 마련한 여러 가지 상황 도식 또는 문장제가 있다. 상황 문제 또는 문장제를 만드는 작업은 교과서 집필자 또는 수업 중 교사에 의한 문제 제기 활동으로서 교수 활동에 포함되며, 따라서 문장제에는 학생의 문제해결을 통해 가르치고자 의도하는 교수 내용이 내재되어 있다. 덧셈 문장제의 경우, '합'의 개념이 포함되어 있는 상황을 구성하여야 하고, 학생은 그 문제를 풀면서 합의 개념을 형성한다고 가정된다.

일반적으로 바람직한 문제 상황의 마련을 위하여 출제 계획 단계에서 고려해야할 여러 가지 사항이 있다(Reys et al., 1998, pp. 160-161). 이 장에서 고려하고자 하는 것은 덧셈 문장제에 포함된 대상의 동질성에 대한 것이다. 문제 제기를 모 출판사의 학습지 안내에서 본 다음의 예화로 시작한다.

"모자가 7개 걸려 있습니다. 아이들은 4명이 모여 있습니다. 어느 쪽이 얼마나 더 많을까요?" 라는 문제에 대해 머뭇거리는 아이를 보고 엄마는 모자는 7, 아이는 4이니까 7에서 4를 빼면 3이고, 그러니까 모자가 3개 많다고 일러준다. 그러나 아이는 "모자에서 아이를 어떻게 뺄 수 있단 말이예요?" 하며 마음 속으로 투덜거린다는 내용이다. 이 일화로부터 본 연구는 모자와 아이라는 이질적 대상을 자유롭게 뺄 수 있는 어른의 억지스런 사고가 덧셈 개념을 배우는 과정의 아동을 수학적, 인성적으로 잘못 이끌고 있음을 지적하고자 한다. 이 문제를 "모자가 7개 걸려 있습니다. 아이들 4명이 모자를 하나씩 쓰면 모자는 몇 개 남겠는가?"와 같이 바꾼다면 모자 7개에서 모자 4개를 빼는 동질적 대상의 뺄셈이 되어 수학적으로 이의가 없다. 유사한 문제라도 문제 출제자가 얼마나 주의하였는가에 따라 아동에게 심리적으로, 또는 수학적으로 적절한 문제일 수도 있고 아닐 수도 있는 것이다.

사실 이런 유형의 문제는 우리 나라 초등 수학 교과서에서도 쉽게 발견된다. 예를 들어 "컵이 12개 있고 컵받침이 8개 있습니다. 컵은 컵받침보다 몇 개 더 많은지 알아보시오.(수학 1-나)"라는 문제는 "컵이 12개 있고 컵받침이 8개 있습니다. 컵받침에 컵을 하나씩 놓으면 컵은 몇 개가 남을까요?"라고 하는 것이 더 적절하다. 전자는 컵과 컵받침이라는 이질 대상의 차를 구해야 하지만 후자는 컵과 컵받침에 놓은 컵이라는 동질 대상의 차를 다루므로 차의 개념이 자연스럽게 수용된다. 사설 학습지가 아닌 교과서의 문장제라면 더욱 정제되어야 하는 이유는 자명하다. 교사, 학생, 아니 국민 모두가 교과서에 나온 문제를 가장 훌륭한 것으로 간주하는 것이 사실이다. 즉 교과서 문제는 문제의 모델, 원형의 역할을 하므로 가장 모범적인 문제가 되어야 한다.

실제적으로 덧셈 상황에서 요구되는 대상의

동질성은 중학교 이상만 되어도 재언이 불필요한 자명한 원리이다. 중학생들은 $5x+7y$에서 $5x$와 $7y$는 동류항이 아니기 때문에 더 이상 더할 수 없음을 배우고 연습을 반복한다. 엄밀하게 말하면 수학에서의 덧셈은 동질적인 대상에 대해서 가능한 연산이므로 이질적인 대상의 합은 수학적으로는 의미 없는 것이다. 그럼에도 불구하고 초등 수학의 덧셈 문장제에서는 대상의 동질성을 간과하는 오류가 종종 발견된다.

덧셈 상황에서 대상의 동질성을 고려하지 않은 부작용은 충분히 정제되지 않은 문제를 다룸으로써 학생들에게 암묵적으로 자생하리라고 가정된다. 대상의 동질성이 중시되어야 하는 이유를 다음과 같은 다섯 가지 측면에서 찾고자 한다. 각 경우에 서로 다른 측면에서 대상의 동질성이 중요한 의미를 갖는다는 것을 확인할 수 있다.

첫째, 단위 개념과 관련된다. 수학 동화에 나오는 다음 일화를 보자(최은규, 2000). 5살 짜리 꼬마가 엄마 생일 파티를 위한 케익에 초를 꽂으면서 "빵집 아줌마가 내 생일인 줄 알았나봐요."라고 한다. 왜냐하면 초가 5개 밖에 없었기 때문이다. 긴 초 3개와 짧은 초 2개. 긴 것은 10을 표상하고 짧은 것은 1을 표상한다는 단위 개념이 없는 꼬마에겐 단위가 다른 대상의 이질성을 인식하는 것이 불가능했던 것이다.

이와 같이 수학에서 단위 개념은 매우 본질적인 개념이다. 수의 십진체계가 가장 대표적인 보기이다. 사과 10개 짜리 5묶음과 10개 짜리 2묶음은 모두 7묶음이 되지만, 사과 100개 짜리 5묶음과 10개 짜리 2 묶음은 7묶음이 아니라 100개 짜리 5묶음을 10개 짜리 50묶음으로 고쳐야 의미있는 답이 가능하다. 동화 속 꼬마의 경우라면 후자에 대해서도 7묶음이라고 답하겠지만, 그것이 수학적으로 부적절함을 인식하는 것은 단위의 개념을 통해 대상간의 동질성과 이질성을 파악할 수 있을 때이다. 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈에도 같은 원리를 적용할 수 있다.

단위 개념에서 비롯되는 이질성의 정도는 상대적이다. 학생 한 명과 개 한 마리처럼 수량의 단위 자체가 다른 것일 수도 있고, 코끼리 한 마리와 개미 한 마리처럼 같은 단위를 사용하지만 단위의 크기와 관계될 수도 있다. 전자의 경우는 단위 자체의 상이함으로 인해 그 합이 부적절함을 더 쉽게 받아들이게 하며, 후자의 경우에 합이 두 마리라고 하기 부자연스러운 것은 축구 선수 한 팀과 농구 선수 한 팀을 합해서 두 팀이라고 말하기 어려운 것과 같다.

대상의 동질성에 근거한 단위 개념이 없는 학생은 코끼리 한 마리와 개미 한 마리도, 땅콩 한 알과 태양계의 행성 하나도 얼마든지 더해낼 수 있다. 긴 초와 작은 초를 더하는 것과 다를 바 없다. 그러한 문제에 대해 학생이 아무런 의구심 없이 답을 할 수 있는 것은 덧셈 교수 상황에서 발생한 일종의 교수학적 계약에 의한 것이다. 덧셈, 뺄셈에 요구되는 대상의 동질성은 문제 상황에서 이미 지켜지고 있다고 암묵적으로 가정되는 것이다. 실제로 그것이 지켜지고 있는가는 학생이 의식할 필요도 없고 의식되기도 어렵다. '선장의 나이[1]' 현상에서 문제 상황 속 데이터의 적당한 조합으로 답을 찾는 수준의 아동에게 덧셈 대상의 동질성까지 의식하라는 것은 무리한 요구가 될 것이다. 따

1) 프랑스 그르노블의 IREM(수학교육연구회)이 1980년 CE1, CE2(우리 나라의 초등학교 2, 3학년에 해당) 학생 97명에게 "배 위에 26마리 양과 10마리 염소가 있다. 선장의 나이는 몇 살인가?"라는 문제를 내었는데, 그 중 76명이 문제의 숫자들을 적당히 조합(특히 26과 10의 합)하여 답을 했다는 일화에서 기인하여 이름 붙여진 현상이다.(Baruk(1985) 참조)

라서 유효하게 남아있는 교수학적 계약에 의해 억지스런 답은 가능할지라도 그것이 수학적으로 올바른 상황은 아니다. 학생이 의식하지 못하더라도 교사는 의미 있는 문제 상황을 제공해야 한다. 그렇지 않으면 수학의 본질을 모호하게 만들고 합리적이지 못한 인성을 길러낼 수도 있게 되므로 신중하게 접근해야 할 것이다. 요컨대 대상의 동질성을 무시한 문제 상황은 단위 개념의 부재를 조장하고 수학적 오류를 낳을 수 있다.

둘째, 문제의 상황을 적절하게 표상할 수 있도록 하는 정보의 유효성과 관련된다. 다음 문제를 보자.

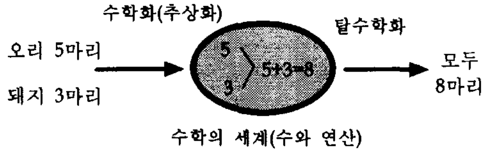
- 오늘 박물관에 들어 온 사람은 어른이 405명, 어린이가 298명입니다. 들어온 사람은 모두 몇 명입니까? (수학 3-가)
- 남학생 8명과 여학생 5명이 놀이터에서 놀고 있습니다. 여학생 3명이 더 왔습니다. 학생은 모두 몇 명인지 알아보시오. (수학 1-나)

전자는 물론 덧셈 연산을 요구하는 문장제이다. 그러나 어느 정보까지가 그 상황을 가장 적절하게 표상하는가 하는 관점에서 볼 때 이 문제는 좋은 문제라 할 수 없다. 어른과 어린이의 입장객 수는 입장료나 그 밖의 정보에 있어 각각 헤아려지는 것이 더 의미 있으며 그 합을 구함으로써 유효한 정보를 잃게 되는 결과를 낳는다.

한편 후자의 출제 의도가 세 수의 합을 구하는 것에 있다면 대상의 동질성을 고려할 때 적합한 문제라고 볼 수 없다. 왜냐하면 동일 대상이 아닌 군이 남학생과 여학생을 구분하여 선정한 것은 그 나름의 이유를 지니는 것이 타당하기 때문이다. 덧셈 학습 상황에서 교사와의 교수학적 계약에 충실한 대부분의 학생들은 이 문제에 대해 모두 16명이라고 답하겠지만, 남학생 8명과 여학생 8명이라는 답에 대한 교사의 태도는 어떠해야 할까? 교사가 기대하는 답은 16명일지 모르지만 정보의 유효성이라는 측면에서 볼 때 그 답은 문제 상황을 적절하게 표상하고 있지 않다. 이 상황을 적절하게 설명해주는 정보는 남학생 8명, 여학생 8명이라는 수까지이며 이러한 정보의 유효성을 위해 문제는 "남학생과 여학생은 각각 몇 명입니까?"로 진술되어야 하며 '세 수의 합 구하기'라는 목표는 다른 상황으로 구현되어야 할 것이다.

셋째, 실생활과 거짓 관련된 문제 상황을 통해 복잡한 상황을 연출하려는 부적절한 다양성의 추구가 수학의 본질을 왜곡하고 아동의 수학적 사고력을 무력화할 가능성과 관련된다. 문제의 다양성을 위해 보다 복잡한 상황을 이용하고 이질적인 대상을 다루는 것이 수학적 활동의 일부로서 정당화될 수 있을지 모른다. 학교 수학 활동이 지향하는 수학화와 탈수학화의 과정을 경험하도록 한다는 점에서 말이다. 다시 말해, 실생활의 문제 상황을 추상화 및 수학화 과정을 거쳐 수학의 세계에서 수 개념과 연산으로서 덧셈을 수행한 후, 다시금 탈수학화의 결과로서 그 의미를 해석해내는 것은 활동으로서의 수학, 수학자의 수학을 경험하는 것이다. 그러나 이러한 정당화 역시 조심스럽다.

"오리 5마리와 오리 3마리는 모두 오리 8마리"라고 하는 것은 그 자체로 자연스러운 사고이지만 "오리 5마리와 돼지 3마리는 모두 8마리"라고 하는 것은 학생이 그것을 의식하지 못할지라도 학생의 머리 속에서 다음의 사고 과정이 전제되어야 얻을 수 있는 답이다.



그러나 이러한 사고 과정의 메타인지적 분석 연구자들의 해석이며, 실제로 사고하는 아동들에게는 단순하게 오리 마리 수와 돼지 마리 수를 더하고 결과적으로 오리와 돼지를 더할 수 있다는 막무가내의 생각이 들게된다. 부주의하게 마련된 부적절한 문제 상황을 제시하는 가운데 모자에서 아이를 어떻게 빼느냐고 항변하던 아동이 아무 의심없이 코끼리와 개미의 합을 구하는 아동으로 변해가는 것이다. 그 변화는 문제 출제자의 의도와 무관하게 의외로 쉽게 도달 가능한 것이다. 따라서 수학화-탈수학화의 경험을 이유로 문제 상황의 다양성을 위해 이질적 대상의 덧셈을 합리화하려는 것은 위험한 발상이다.

나아가 십분 양보하여 덧셈 상황에서 이질적 대상을 이용하는 것에 대한 이와 같은 합리화를 인정한다 하여도 그 도입 시기가 간과되어서는 안 될 것이다. 덧셈, 뺄셈을 처음 도입할 때 이질적 대상을 다루는 것은 더욱 부정적인 결과를 초래할 수 있다. 매우 유사한 다음의 두 문제를 보자.

- 종이 비행기를 3개 날리고, 또다시 종이 비행기 6개를 날렸습니다. 모두 몇 개를 날렸습니까?
- 노란 종이 비행기가 3개, 빨간 종이 비행기가 6개 있습니다. 종이 비행기는 모두 몇 개입니까? (수학 1-가)

전자는 덧셈 개념만을 요구하는 문제이지만 후자는 양적인 수의 덧셈과 동시에 질적인 논리적 포함 관계를 요구하는 문제이다. Piaget에 따르면 초등학교 1학년 전(전조작기)까지는 이 문제가 어렵다고 지적한다. 왜냐하면 노란 종이 비행기도 종이 비행기이고 빨간 종이 비행기도 종이 비행기라는 것을 알고 있음에도 불구하고, 사고가 일단 전체에서 부분으로 넘어가면 전체는 잊혀지고 부분끼리만 비교 가능하여 노란 종이 비행기가 더 많은지 종이 비행기가 더 많은지를 판별하지 못하는 것으로 알려진 이 시기의 아동은 전체와 부분의 포함 관계를 인식할 수 없고, 따라서 덧셈을 수와 류(class)에 대한 연산으로 보는 Piaget 입장에서 논리적 포함 관계와 동일시되는 덧셈 개념을 획득하지 못하고 연산을 수행하지 못하는 것은 당연하다(Copeland, 1970). 설사 논리적 포함 관계를 이해한 아동에게도 후자는 정제되지 못한 문장제이다. 덧셈만을 목표로 한다면 동일 대상을 다루는 전자로 충분하다. 후자가 바로 상황의 다양성을 연출하기 위한 색깔 정보의 추가이다. 만약 보다 실생활에 가까운 시나리오를 의도했다면 색깔의 구체성이 수학적 본질을 해치는 요소로 작용하지 않는 구체적인 상황을 마련해야한다.

넷째, 수학과 실세계간의 불일치와 관련된다. 곧게 뻗은 전깃줄, 건물의 모서리, 막대자로부터 직선이라는 추상적인 수학적 개념을 추출하는 것처럼 수학이라는 학문은 고도의 추상성을 전제로 성립되는 한편, 타학문 또는 실생활에 대한 강력한 응용력을 지니고 있음을 알고 있다. 그러나 응용 대상에 대한 물리적 지식을 감안하지 않은 상태에서 추상적인 수학 세계에서의 처리만으로는 실세계의 원리에 위배되는 결과를 유도할 수 있다. 예를 들어 "물 1ℓ와 알콜 1ℓ를 합하면 모두 몇 ℓ인가?"라는 덧셈 문장제는 수학적으로 2ℓ라는 답을 요구할지라도 물과 알콜의 분자 특성 때문에 그 혼합물은 2ℓ보다 적게 되고, 따라서 이 문제는 결코 수학 학습의 덧셈 문장제로 바람직하지 않음이 자명하다. 두 대상의 이질성이 수학적으로는 주목되지 못하여 실제적인 물리적 세계와 모순되는 오답을 낳고, 수학의 응용력이 손상을 입는 순간이다. 과학에서 분자의 개념 학습시 1

컵 + 1컵 = 2컵이 성립하지 않는 다른 크기의 입자를 다룸으로써 분자 크기의 본질을 탐구하는 것은 수학적 원리의 적용과는 괴리되며 그것은 두 대상이 이질적이라는 사실에서 기인함을 인식하는 기회로 삼을 수 있다.

다섯째, 중등 수학과의 연계성과 관련된다. 앞서 언급했듯이, 중학교 수학의 식의 계산 단원에서 다루는 문자의 동류항끼리의 덧셈, 뺄셈은 대상의 동질성을 전제로 하는 연산이므로 대상의 동질성이 결여된 상태에서는 덧셈, 뺄셈이 불가능함을 외연적으로 또는 암묵적으로 학습하게 된다. 그러나 이 단원과 관련하여 위계적으로 앞선 초등 수학의 자연수의 덧셈, 뺄셈을 내포한 문장제나 사례 도식은 중학교에서 강조하는 대상의 동질성을 무시하는 적지 않은 위험을 내포한다. 예를 들어, 초등 수학 교과서에 그림으로 주어진 개미 2마리와 풍뎅이 4마리의 합을 구하는 것은 '2 개미 + 4 풍뎅이'로 상징화되며, 그것을 중학교 수준에서 문자를 써서 기호화한 것이 '$2x+4y$'인데, 이는 덧셈 불가능하므로 위계성을 특징으로 하는 수학 학습의 연계성과 일관성이 파괴됨을 보여준다.

실제로 중학교 수학 교육과정 중 문자가 있는 식에서 덧셈, 뺄셈이 동류항끼리만 가능하다는 것은 매우 기본적인 학습 목표로 간주된다. 그 원천이 곧 덧셈, 뺄셈 대상의 동질성이다. 이는 홍세화(1999)가 '수학과 글쓰기 2'에서 '동류항 묶기'로 피력한 의견과 일치한다. 그는 글을 잘 쓰기 위해 수학, 본 고와 관련한 예로는 특히 동류항 묶기를 잘 알아야 한다고 주장하는데, 모 논설위원이 대통령과 대통령 후보를 동류항으로 묶는 오류를 지적하면서 자신의 논조 목적을 위해 제멋대로 억지 동류항 묶기를 동원하고 있음을 비판한다. 그것은 단순한 수학적 소양의 부족에서 그치는 것이 아니라 언론인으로서의 기본적인 윤리나 양식의 결여에까지 이른다고 말한다. 후자가 바로 본 고에서 염려하는 학생에게 부과되는 부작용으로서의 억지스런 사고의 한 예이다.

III. 문제 상황의 다양성을 위한 구조적 접근

문장제를 풀 때 아동이 흔히 사용하는 전략 중 하나가 문제 정보에 대한 충분한 숙고 없이 문제 진술 중 특정 단어로부터 힌트를 얻어 답을 얻기 위한 연산을 선택하는 것, 소위 '키워드 전략'이라는 것이다(Sowder, 1988). 다음 문제를 보자(Reys et al., 1998).

- 7809명이 월요일에 TV를 보았다.
  9060명이 화요일에 TV를 보았다.
  9924명이 수요일에 TV를 보았다.
  3일 동안 TV를 본 사람은 모두 몇 명인가?

이 문제에서 '모두'라는 단어는 아동으로 하여금 덧셈을 선택하도록 강요하기에 충분하다. 그러나 이 문제에는 논의의 여지가 있다. 각 요일에 TV를 본 아동이 모두 다르다면 덧셈만으로 쉽게 답을 얻을 수 있고 이 때 '모두'는 문제해결로의 지름길을 밝히는 안내 역할을 한다. 그러나 아동 중에는 이틀 이상 TV를 본 아동이 있을 수 있고 그 경우에는 문제해결에 필요한 조건이 불충분한 문제의 예로 남게 된다.

이상의 예에서 보듯이 열쇠가 되는 단어 하나에서 힌트를 얻어 해결되거나 한 번의 절차를 적용함으로써 간단히 해결되는 문장제, 반복 훈련을 통해 정형화된 문장제는 풀이 방법에 대한 사고를 요하는 진정한 문제해결과는 거리가 있다.

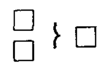
이러한 정형화를 막기 위한 한 가지 방법이

문장제의 다양화이다. 문제 상황을 인위적으로 조장하지 않고서도 적합하게 다양화하려는 노력은 문장제를 연습문제로 격하시키는 오류를 예방한다. 문장제가 정형화되어 연습문제로 격하되는 것을 막기 위해 연출된 문제 상황을 다양하게 하고자 할 때 다양성이라 함은 문제 시나리오의 표면적 연출(II장의 세 번 째 이유)이라기 보다는 의도된 수학 지식 구조의 변화에서 기인하는 다양성을 의미한다. 본 고에서는 덧셈, 뺄셈 문장제의 구조적 다양성을 위해 Vergnaud가 개념적 장(champs conceptuels)의 예로 든 덧셈 구조를 참조한다.

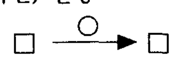
Vergnaud(1990)는 "개념은 단순히 정의로 환원되지 않으며 개념이 아동에게 의미를 갖는 것은 상황과 문제 속에서이다"라는 입장에서, 수학적 지식을 "그 처리가 좁게 연결된 여러 유형의 지식과 절차를 연루시키는 문제 또는 상황 문제의 공간"을 의미하는 개념적 장으로 다루어야 한다고 주장한다. 결국 아동은 학습 목표가 되는 지식이 내포된 문제 상황을 다루면서 학습하게 되고, 그 지식은 분리 고립된 낱낱의 것이 아니라 연루된 덩어리, 즉 장의 개념이라는 것이다. 따라서 학습 목표가 되는 수학적 지식에 대해 그것이 연루된 개념적 장의 분석을 통해 연관된 개념들을 표출시키는 동시에 문제 상황의 구조적 다양성을 추구할 수 있는 것이다.

Vergnaud가 개념적 장의 대표적인 예로 제시한 것이 덧셈 구조이다. 덧셈 구조의 기본 관계는 6가지로, 두 양의 세 번째 양으로의 합성, 처음 양에서 나중 양으로의 수량화된 변형, 두 양 사이의 수량화된 비교 관계, 두 변형의 합성, 두 관계의 합성, 관계의 변형이 그것이다(그림 1). 이 때 변형은 동적인데 반해 비교 관계는 정적인 특성을 띤다. 이 분류는 수학적인 고려와 동시에 아동의 심리적인 고려에서 비롯된 것이다. 이를테면, 동일한 수의 연산일지라도 그것이 참조하는 관계에 따라 난이도가 다르고, 동일 관계를 구현한 여러 문제 상황에서 아동이 사용한 절차 및 기호 등에 차이가 있고, 변형이 시간에 따른 한 대상의 단항적 덧셈 모델이라면 비교 관계는 두 대상의 비교로서 이항적 덧셈 모델이라는 것 등을 고려한 결과이다.

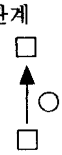
[1] 부분-부분-전체 : 두 양의 세 번째 양으로의 합성



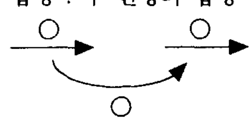
[2] 상태-변형-상태 : 처음 양에서 나중 양으로의 (수량화된) 변형



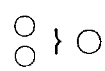
[3] 비교-두 양 사이의 관계 : 두 양 사이의 (수량화된) 비교 관계



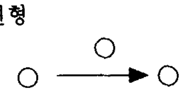
[4] 변형의 합성 : 두 변형의 합성



[5] 관계의 합성 : 두 관계의 합성



[6] 관계의 변형



<그림 1> 덧셈 구조의 6가지 기본 관계
(□ : 수량(+), ○: 변형 또는 관계(+ 또는 −))

개념적 장의 일반적인 개념을 덧셈 구조에 적용하면, 덧셈 구조의 개념적 장은 하나 이상의 덧셈 또는 뺄셈을 포함하는 상황의 집합이며, 동시에 이 상황을 수학적 과제로서 분석하

도록 하는 개념 및 정리의 집합이라 할 수 있다. 따라서 역으로 덧셈, 뺄셈을 포함하는 다양한 상황을 만들기 위해 이 구조를 참조하는 것은 바람직하다. 다시 말해 Vergnaud가 의도하는 상황의 개념은 수학적 개념의 기본 관계와 그것이 만드는 문제 류로서, 그 중심 아이디어가 바로 다양성이다. 주어진 개념적 장 안에는 연루된 여러 개념에서 비롯된 매우 다양한 상황이 있고, 가능한 문제 류를 체계적으로 만들기 위한 수단으로서 상황 변인을 이용할 수 있는 것이다. 앞에서 덧셈 구조에 대해 설정했던 6가지 기본 관계와 그것에 기초한 문제 유형의 분류는 다양성의 아이디어를 추구하는 연구 방향을 예시한다. 원칙적으로 가능한 모든 상황은 각 관계의 세 요소 중 알고 있는 데이터와 미지수의 조합으로 간주되며 그것이 곧 만들 수 있는 총 문제 유형의 수에 해당한다. 예컨대 기본 관계 b: A $\xrightarrow{C}$ B 에서 A, B, C 중 미지수가 선택되고 C는 양, 음 2개의 부호가 가능하므로 3×2개의 문제 유형이 나온다.

덧셈 상황은 뺄셈 상황으로 직결된다. Reys et al.(1998)은 덧셈 모델로부터 3가지 유형의 뺄셈을 유도한다. 어떤 양에서 특정량을 떼어내고 나서 얼마만큼 남았는지 보는 분류하기 또는 덜어내기, 두 양간에 일대일 대응시키고 남는 차이를 알아내는 비교하기 또는 차이 구하기, 전체 양과 부분의 양을 알고 있을 때 나머지 부분을 확인하기이다. 각각은 Vergnaud의 분류인 변형, 비교, 합성에 해당한다. <그림 1>의 덧셈 구조는 뺄셈 관계를 내포하며 나아가 변형과 관계의 양, 음 부호에 의해 정수의 개념까지 확장 가능하다.

IV. 덧셈 구조에 따른 교과서 문장제의 사례

본 고에서 논의한 관점에 따라, 초등학교 수학 교과서에 나와 있는 덧셈 문장제들을 대상의 동질성이 잘 지켜진 것을 위주로 하여 덧셈 구조의 측면에서 분류하여 6가지 기본 관계별로 상이한 유형을 예시하고자 한다. 관계에 따라 난이도를 달리 하므로(Carpenter, 1985) 대부분의 문제가 관계 [1], [2], [3]에 관련된 것이었고, 따라서 관계 [1]과 [2]는 각각 2개, 6개의 유형이 완벽하게 예시된 반면 관계 [6]의 적절한 사례는 발견하지 못하였다.

관계 [1]

- 냉장고 위칸에 달걀이 27개, 아래칸에 8개 있습니다. 달걀은 모두 몇 개인지 알아보시오. (수학 2-가)
- 구슬 7개를 두 손에 나누어 집었습니다. 왼손에 구슬이 2개 있으면 오른손에는 몇 개가 있습니까? (수학 1-가)

관계 [2]

- 공원에 비둘기가 12마리 있습니다. 3마리가 더 날아 왔습니다. 모두 몇 마리인지 알아보시오. (수학 1-나)
- 개구리가 5마리 있었습니다. 2마리가 물 속으로 들어갔습니다. 개구리는 몇 마리 남았습니까? (수학 1-가)
- 지영이는 민수에게서 구슬을 12개 받아서 모두 25개를 가지고 있습니다. 처음에 지영이가 가지고 있던 구슬은 몇 개인지 알아보시오. (수학 2-나)
- 주차장에 있던 차 중에서 54대가 나가고 122대가 남았습니다. 처음 주차장에 있던 차는 모두 몇 대입니까? (수학 2-나)
- 혜린이네 목장에는 젖소가 9마리 있습니다. 얼마 후에 몇 마리를 더 사 와서 지금은 14마리가 되었습니다. 젖소를 몇 마리 더 사 왔는지 알아보시오. (수학 1-나)
- 누나는 색종이를 420장 가지고 있습니다. 그 중에서 동생에게 몇 장을 주었더니, 누나가 가진 색종이는 210장이 되었습니다. 누나가 동생에게 준 색종이는 몇 장입니까? (수학 2-나)

관계 [3]

- 형준이와 민정이가 카드 놀이를 합니다. 형준이는 카드를 32장, 민정이는 8장을 가지고 있습니다. 형준이는 민정이보다 카드를 몇 장 더 가지고 있습니까? (수학 2-가)
- 한영이는 우표를 127장, 우진이는 213장 모았습니다. 누구의 우표가 몇 장 더 많습니까? (수학 익힘책 2-나)
- 혜미의 나이는 9살입니다. 삼촌의 나이는 혜미보다 15살 더 많습니다. 삼촌의 나이는 몇 살입니까? (수학 익힘책 2-가)
- 혜지는 색종이를 62장 가지고 있습니다. 윤범이는 혜지보다 7장 더 적게 가지고 있습니다. 윤범이가 가진 색종이는 몇 장입니까? (수학 익힘책 2-가)

관계 [4]

- 영민이는 어제와 오늘 동화책을 75쪽 읽었습니다. 오늘 읽은 동화책이 39쪽이라면, 어제 읽은 동화책은 몇 쪽입니까? (수학 익힘책 2-가)
- 명준이가 버스를 타고 이모댁에 갑니다. 이모댁까지는 모두 17 정류장을 지나야 합니다. 지금까지 5 정류장을 지났습니다. 앞으로 몇 정류장을 더 지나야 하는지 알아보시오. (수학 1-나)
- 순희네 학교 운동회에서 청팀은 오전에 316점을 얻었고, 오후에 48점을 더 얻었습니다. 청팀은 몇 점이 되었는지 알아보시오. (수학 2-나)

관계 [5]

- 지현, 연경, 준호는 구슬을 가지고 있습니다. 다음을 보고, 준호는 지현이보다 몇 개의 구슬을 더 가지고 있는지 알아보시오. (수학 2-가 문제의 변형)
  지현: (7개 더 있으면 30개가 될 텐데...)
  연경: 나는 지현이보다 8개가 더 많습니다.
  준호: 나는 연경이가 가진 것 보다 5개가 더 적습니다.

관계 [6]

- 이슬이와 수진이가 밤을 주웠습니다. 오전 중에 이슬이는 수진이 보다 53개를 더 주워 수진이에게 20개를 주었습니다. 이슬이는 수진이 보다 몇 개 더 가지고 있습니까?

V. 맺음말

아동이 초등학교 수학에서 가장 먼저 접하게 되는 문장제가 바로 덧셈 문장제이다. 한 번의 산술 연산을 적용하여 답을 얻는 정형화된 문제로 간주될 수 있음에도 불구하고 덧셈 문장제는 어린 아동의 문제해결 능력과 관련하여 수학교육 연구에서 그 위치가 작지 않다. 간단한 덧셈, 뺄셈 문장제를 통해 아동은 수 연산의 개념을 학습할 뿐만 아니라 문제해결 전략이나 오류에 대한 태도 등을 접할 기회를 갖는다.

본 고에서는 교사 또는 교재 집필자가 덧셈 문장제를 출제할 때 고려해야 할 두 가지 측면에 초점을 맞춘다. 덧셈 문장제가 포함하는 대상의 동질성과 문제 상황의 구조적 다양성에 관한 것이다.

문장제의 기본 목적이 덧셈 개념의 형성 및 숙달에 있다면 그것이 포함하는 대상은 다음과 같은 다섯 가지 측면의 수학적, 인성적 근거에서 동질이어야 한다: 단위 개념, 정보의 유효성, 부적절한 다양성의 방지, 수학과 실세계간의 불일치, 중등 수학과의 연계성.

이러한 근거에도 불구하고 이질적 대상을 사용하는 매력은 아마도 문제 상황을 다양하게 연출하여 아동의 적용력을 확대하는 것 내지는 문제가 참조한 실생활과의 보다 밀접한 관계를 드러내고자 하는 것이라고 생각한다. 그러나 그 의도와는 달리, 수학의 본질에 대한 오해와 더불어 바람직하지 못한 가치관 형성이라는 부작용의 위험을 생각할 때, 문장제의 다양성을

이질적 대상을 동원한 문제 상황의 연출 대신에 덧셈 구조의 다양성에 기초하여 구현해야 할 것이다.

결론은 단순하다. 학생들에게 암묵적으로 미치는 영향을 고려할 때 수학적으로 의미 있고 실생활과의 참된 관련성을 지닌 정제된 문제 상황을 마련하려는 노력을 기울여야 한다.

참고 문헌

교육부(2000a). 수학 1-가. 대한교과서주식회사.

______(2000b). 수학 1-나. 대한교과서주식회사.

______(2000c). 수학 2-가. 대한교과서주식회사.

______(2000d). 수학 2-나. 대한교과서주식회사.

______(2000e). 수학 익힘책 2-가. 대한교과서주식회사.

______(2000f). 수학 익힘책 2-나. 대한교과서주식회사.

______(2001). 수학 3-가. 대한교과서주식회사.

최은규(2000). 우리 아이 머리를 좋게하는 수학동화. 삼성출판사.

홍세화(1999). 쎄느강은 좌우를 나누고 한강은 남북을 가른다. 한겨레신문사.

Baruk, S.(1985). *L'age du capitaine*. Paris: Seuil.

Carpenter, T. P.(1985). Learning to add and subtract : An exercise in problem solving. In E. A. Silver(Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*(pp.17-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Copeland, R. W.(1970). *How children learn mathematics*. London: The Macmillan Company.

Davis, P. J., & Hersh, R.(1981). *The mathematical experience*. Boston:Houghton Mifflin Company.

Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindpuist, M. L., & Smith, N. L.(1998). *Helping children learn mathematics*. 강문봉 외 18인(공역)(1999). 초등수학 학습지도의 원리. 양서원

Sowder, L.(1988). Choosing operations in solving routine story problem, In R. I. Charles, & E. A. Silver(Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*(Vol.3), (pp. 148-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G.(1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 133-170.

A Study on the Homogeneity of Objects and the Variety of Contexts in Addition Word Problems

Hye-won Chang (CK cyber system development institute)

To solve the addition word problems provides young children the chance to learn about and exercise in problem solving. This paper focuses on two aspects to be considered in addition word problems: the homogeneity of objects and the variety of contexts.

The homogeneity of objects involved in

addition word problems has to be kept in the following reasons: concept of unit, effectiveness of information, prevention of inappropriate variety, inconsistency of mathematics with real world, continuity between elementary and secondary mathematics.

And for the variety of contexts, the additive structure proposed by G. Vergnaud, can be considered: composition, transformation, relation of comparison, composition of two transformations, composition of two relations, transformation of a relation.

According to this structure, some examples, which contain homogeneous objects, were extracted from the elementary school mathematics textbooks.