

論文 2002-39CI-6-3

# Maxwell 방정식의 효율적인 풀이를 위한 경계요소법과 웨이브렛의 결합

## (The Combination of Wavelet with Boundary Element Method for the Efficient Solution of Maxwell's Equations)

金顯俊\*, 李升杰\*, 吳範煥\*, 李一恒\*

(Hyunjun Kim, Seunggol Lee, Beomhoan O, and Elhang Lee)

### 요약

Maxwell 방정식을 효율적으로 풀기 위해 웨이브렛 행렬 변환(wavelet matrix transformation)과 경계요소법(Boundary Element Method)을 결합하는 방법을 제안하였으며, 2차원 위상변이 마스크(phase-shifting mask) 문제에 적용하였다. 계산 결과를 해석적인 해 및 참고문헌의 결과와 비교함으로써 구현된 모듈의 정확도를 검증하였으며, 제안된 방법이 경계요소법만을 적용한 경우에 비해 연산 시간과 메모리 사용 측면에서 효율적임을 확인하였다.

### Abstract

The wavelet transform is combined with the boundary element method (BEM), to solve efficiently the Maxwell's equation and the proposed method is applied to the electromagnetic problem for the analysis of topological effects of phase-shifting masks. The accuracy of the module developed was verified by comparison with both analytic solutions and published results. In addition, it was found that the boundary element method in combination with the wavelet matrix transform would be more efficient than the conventional methods based on the BEM in views of the calculation speed and the usage of computer memory.

**Keywords** : Maxwell's equation, BEM, Wavelet, PSM, optical lithography simulation

### 1. 서론

\* 正會員, 仁荷大學校 情報通信 工學部 마이크로 포토닉스 硏究 센터

(School of Information and Communication Engineering, Inha University)

※ 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-1999-00225)지원으로 수행되었음

接受日字:2002年3月4日, 수정완료일:2002年11月8日

전자기와 문제의 수치 해석적 풀이에는 보통 두 가지의 접근방법이 있다. 하나는 미분 방정식 접근(differential equation approach)으로 Maxwell 방정식 자체를 유한요소법(finite element method)<sup>[1,2]</sup>이나 유한차분법(finite difference method)<sup>[3]</sup> 등의 방법으로 푸는 것이다. 이 방법은 최종 연립방정식이 대부분의 원소가 영인 희소 행렬(sparse matrix)이 되는 장점을 갖지만

경계조건(boundary condition)을 적용하기 위해 관심 영역보다 더 큰 계산영역을 정의해야 한다. 또 다른 방법인 적분 방정식 접근(integral equation approach)은 Green's 함수 기법을 적용하여 Maxwell 방정식을 적분 방정식으로 바꾸어 푸는 것으로, 모멘트 방법(Method Of Moment)<sup>[7]</sup>과 경계요소법(Boundary Element Method : BEM)<sup>[4,6]</sup>등이 이에 해당한다. 이러한 접근 방법은 계산영역이 관심 영역으로 정확히 제한되고 차원(dimension)이 축소되므로 2차원 계산영역의 경우는 그 경계만, 3차원은 그 표면만 계산하게 된다. 따라서 계산 영역 내부에도 노드(node)를 설정해야 하는 미분방정식 접근법과 비교할 때, 노드 설정에 따른 메모리 사용량이나 계산시간을 줄일 수 있다. 그러나, 최종 연립방정식이 영 아닌 원소로 짙은 밀집 행렬(dense matrix)의 형태를 취하게 된다. 그러므로 이를 푸는데 많은 계산 비용이 소요되어 차원 축소를 얻은 시간이나 메모리 이득이 반감되는 단점을 가진다.

최근에 밀집 행렬 구성문제의 효율적인 해결 방법으로 웨이브렛 변환(Wavelet Transform)에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다<sup>[7,10]</sup>. 원래 웨이브렛 변환은 STFT(short-time Fourier transform)의 고정분해능 결점을 해결하기 위해 제안되었는데, 푸리에 변환(Fourier transform)과 달리 공간적으로 국부화된(space localized) 기저함수(basis function)를 사용한다. 따라서 웨이브렛을 사용한 함수나 연산자(operator)들은 웨이브렛 영역에서 매우 높은 희소성(sparsity)을 보인다. 즉 대부분의 원소(계수) 값이 아주 작아 영으로 처리할 수 있게 된다<sup>[8]</sup>.

웨이브렛의 활용은 주로 모멘트 방법과 관련하여 많이 연구되어 왔으며, 이들 연구는 크게 두 가지로 구분된다. 첫 번째는 웨이브렛을 기저함수로 사용하는 방법(wavelet basis expansion)인데 적분방정식의 미지함수를 적절히 선택된 웨이브렛 함수들의 선형결합으로 전개하여 희소 모멘트 행렬을 얻는 것이다<sup>[7,15]</sup>. 두 번째는 먼저 모멘트 방법을 적용하여 적분방정식을 행렬 방정식으로 만든 후, 웨이브렛 행렬 변환(wavelet matrix transform)을 적용하여 희소 행렬을 얻는 것으로 이러한 접근방법은 복잡한 적분계산을 피할 수 있어 행렬 방정식의 구성 측면에서 첫 번째 방법에 비해 장점을 갖는다<sup>[8-10]</sup>. 한편 경계요소법과 관련하여 웨이브렛을 응용하는 시도는 거의 없었으며, 최근 표면 전류(surface current)에 대한 적분방정식의 풀이에 웨이브

렛 기저함수 방법이 적용된 예가 있을 뿐이다<sup>[15]</sup>.

본 논문에서는 경계요소법과 웨이브렛 행렬 변환 방법을 결합하여 효율적으로 전자기파 문제를 다룰 수 있는 방법을 제안한다. 이를 통해 계산영역의 차원축소는 경계요소법의 장점을 살리면서 웨이브렛 행렬 변환을 이용하여 추가적인 적분계산 없이 밀집 행렬의 생성 문제를 해결할 수 있을 것이다. 따라서, 제안된 방법을 통해 계산 시간과 메모리 량을 대폭 줄이는 효과를 기대할 수 있으며, 2, 3차원의 계산영역을 가지는 복잡한 구조의 전자기파 문제에 매우 유용할 것이라 판단된다.

우선 2장에서 경계요소법의 적용과정과 그로부터 만들어지는 선형 연립방정식의 행렬 특성을 조사하고, 기저함수 변환 행렬의 구성을 위한 웨이브렛 이론의 전개 및 웨이브렛 변환을 통하여 얻어진 행렬 특성으로부터 적절한 희소 행렬 풀이법을 결정한다. 이어 3장에서는 제안된 방법을 반도체 노광 공정과 관련된 2차원 위상변이 마스크(phase-shifting mask, PSM)의 단차 효과(topological effects)에 관한 전자기파 문제<sup>[11,12]</sup>에 적용하여, 계산 결과로부터 웨이브렛 행렬 변환 방법의 최적 인자를 결정하였고 그 효율성을 확인하였다.

## II. 경계요소법과 웨이브렛 행렬 변환 방법의 결합

본 논문에서 제안하는 방법은 경계요소법을 사용하여 적분방정식을 행렬 방정식으로 만든 다음, 웨이브렛 행렬 변환을 이용하여 행렬 방정식의 밀집 행렬을 희소 행렬로 변환하고 적절한 희소 행렬 풀이법을 이용하여 해를 구하는 것이다.

### 1. 경계요소법 적용

매질 내에서 빛의 전파 과정은 Maxwell 방정식으로 기술되며 이의 다른 형태인 Helmholtz 방정식이 경계요소법의 지배 방정식(governing equation)이 된다.

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

여기서  $u$ 는 스칼라 함수로서 전체 계산영역(overall domain)의 내부와 경계(boundary)에서의 전기장 혹은 자기장이며  $k$ 는 매질에서 빛의 전파상수이다. 위 식에 Green 함수와 Green 정리를 적용하여, 식(2)와 같이 경계나 내부 한 점  $p$ 에서의 전기장  $u_p$ 를 경계 B 위의 전

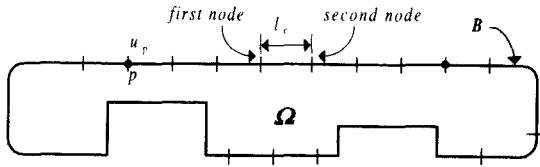


그림 1. 전체 계산영역  $\Omega$ 에서의 경계 B와 그 경계의 분할.

Fig. 1. The boundary B of the overall domain  $\Omega$  and its discretization.

기장  $u$  와 전기장의 법선 편도함수(outward normal derivative)  $q$ 의 선적분 관계로 표현할 수 있다<sup>[4]</sup>.

$$u_p + \int_B u q^* dc = \int_B q u^* dc \quad (2)$$

여기서  $u^*$ ,  $q^*$ 는 적분방정식의 유도 과정에서 도입된 Green 함수와 Green 함수의 법선 편도함수이다.

위 적분방정식을 수치 해석적으로 풀기 위해 <그림 1>과 같이 경계 B를 길이가  $l_e$ 인  $N$ 개의 짧은 경계요소(boundary element)들로 분할하고, 각 경계요소 내에서 전기장이 단순한 함수로 표현 가능하다고 가정한다. 이때 각 경계요소는 두 개의 노드(그림에서 first와 second node)를 가지는데, 형상함수(shape function)와 보간법(interpolation method)을 도입함으로써 적분방정식은 다음과 같은 이산화 형태의 연립방정식으로 변환된다<sup>[5,6]</sup>.

$$c_p u_p + \sum_{e=1}^N [h_e^f, h_e^s] \begin{bmatrix} u_e^f \\ u_e^s \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^N [g_e^f, g_e^s] \begin{bmatrix} q_e^f \\ q_e^s \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$c_p = 1 - \beta_p / 2\pi$$

식(2)에서 언급한 점  $p$ 가 경계의 어떤 노드(이를  $p$ 번째 노드라 함)에 위치한다면, 위 식은  $p$ 번째 노드에서의 전기장  $u_p$ 가 경계 B 위에 존재하는 다른 모든 노드에서의 전기장 및 전기장의 법선 편도함수  $u_e^f$ ,  $u_e^s$ ,  $q_e^f$ ,  $q_e^s$ 에 의해 기술된다는 것을 의미하며, 위 첨자  $f, s$ 는  $e$ -번째 경계요소에 관련된 두 노드를 각각 의미한다. 식(3)에서  $\beta_p$ 는 노드  $p$ 를 공유하고 있는 두 경계요소의 사이 각이며,  $h_e^f, h_e^s, g_e^f, g_e^s$ 는  $e$ -번째 경계요소에 대해 형상함수와 Green 함수 혹은 Green 함수의 법선 편도함수의 곱을 해당 경계요소에 걸쳐 선적분한 결과이다<sup>[4-6]</sup>.

식(3)에서 노드  $p$ 는 경계에 존재하는 임의의 노드일

수 있으므로  $N$ 개의 노드에 대해 각각 식(3)을 적용하여  $N$ 개의 연립방정식을 얻게 된다. 이 결과는 식(4)과 같이 행렬 형태로 정돈할 수 있다.

$$HU = GQ \quad (4)$$

여기서 행렬  $H$ 와  $G$ 는 각각  $(h_e^f, h_e^s)$ 와  $(g_e^f, g_e^s)$ 로 구성되는  $N \times N$  행렬이며,  $U$ 와  $Q$ 는 각각  $N$ 개의 노드에 정의된 전기장  $u$ 와 법선 편도함수  $q$ 로 구성된  $1 \times N$  열 벡터(column matrix)들로서 미지수에 해당한다. 미지수의 개수가  $2N$ 으로 연립방정식의 수보다 많으므로, 참고 문헌<sup>[11]</sup>의 주기 및 투명 경계조건(periodic and transparent boundary condition)을 적용하여 미지수의 수를  $N$ 개로 줄이면, 식(4)는

$$AX = B \quad (5)$$

와 같은 행렬 형태로 나타낼 수 있다. 여기서  $X$ 는  $N$ 개의 노드에 정의된 전기장  $u$ 와 법선 편도함수  $q$ 로 구성된  $1 \times N$  열 벡터로서  $N$ 개의 미지수에 해당하며  $A$ 는  $h_e^f, h_e^s, g_e^f, g_e^s$ 로 구성되는  $N \times N$  임피던스 행렬(impedance matrix)이다.

경계요소법이 적용되는 계산영역은 보통 하나의 균일한 매질이어야 한다. 그러므로, 계산영역이 서로 다른 굴절률을 가진 영역들로 구성되어 있다면, 계산영역을 균일한 굴절률을 갖는 영역들로 분할해야 하며, 계산영역이 균일한 굴절률을 갖더라도 계산의 정확도나 효율을 위해 여러 영역으로 분할해야 하는 경우도 있다<sup>[5,6]</sup>. 제안하는 방법은 경계요소법으로 구성된 임피던스 행렬의 밀집 행렬을 효율적으로 취급하는 것이므로, 계산영역의 분할 방식에 따라, 임피던스 행렬의 특성이 어떻게 달라지는지를 이해할 필요가 있다. 이를 위해 <그림 2(a)>에서와 같이 단일영역(single zone)을 두 가지 방식으로 분할하여 다중영역(multi-zone)을 만들고 그에 따른 임피던스 행렬의 특성을 살펴보고자 한다.

<그림 2(b)>는 분할 방식에 따른 전체 원소의 개수에 대한 영인 원소의 개수 비율 즉 희소성을 나타낸다. 단일영역에 비해 다중영역의 희소성이 높음을 알 수 있고, 분할 방식에 따라서 희소성이 달라짐을 알 수 있다. 분할 방식에 따른 차이는 경계요소법의 노드 설정과 관련된 것으로 논문의 주제와는 다소 거리가 있으므로, 더 이상 언급되지 않을 것이다. 한편, <그림 3>은 원소의 상대적 크기에 따른 그레이 스케일-이미지

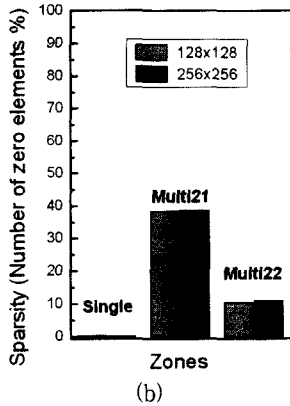
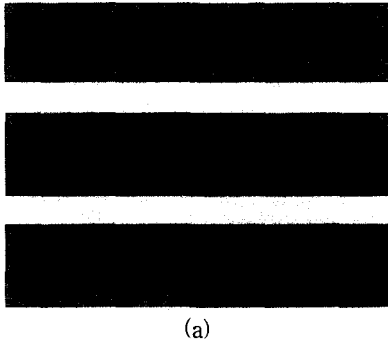


그림 2. (a) 희소성계산을 위해 사용된 분할된 계산영역. (b) 계산 영역의 분할에 따른 희소성

Fig. 2. (a) Domains used for calculating the sparsity (b) Sparsity versus the zoning of the computational domain.

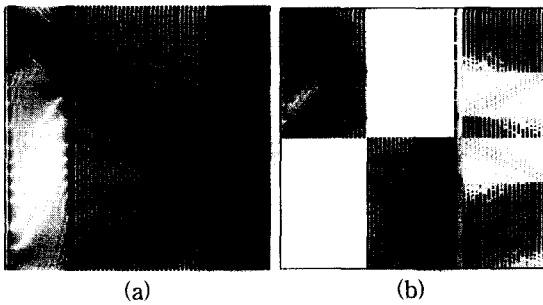


그림 3. 원소의 상대적 크기에 따른 그레이 스케일-이미지. (a) 단일영역 (b) 다중영역(multi-zone21)

Fig. 3. Gray-scale images of the magnitude of matrix of (a) single zone and (b) multi-zone(multi-zone21).

를 표현한 것으로 흰색이 영인 원소들, 검은 색이 최대 크기의 원소 그룹을 나타낸다. 그림에서 분할 방식에 관계없이 행렬이 비대칭적이며, 대각 성분이 주 원소가

되지 못함을 알 수 있다.

## 2. 웨이브렛 행렬 변환 방법과의 결합

이제 경계요소법의 밀집 임피던스 행렬을 효율적으로 다루기 위해, 웨이브렛 변환의 구체적인 과정을 이해하고 변환 행렬 표현을 구해야 한다.

### 2-1. 이산 웨이브렛 변환

웨이브렛(wavelet)이란 모 웨이브렛 (mother wavelet or wavelet)이라 불리는 웨이브렛 원형 함수(wavelet prototype function)  $\Psi(t)$ 와 식(6)과 같이 모 웨이브렛의 천이(shift or translation) 및 스케일링(dilation or scaling) 과정을 통해 만들어지는 함수  $\Psi_{a,\tau}(t)$ 의 집단을 의미하며, 푸리에 변환의 삼각함수처럼 변환과정의 기저함수로 사용된다.

$$\Psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \quad (\tau, a \in R \text{ with } \tau \neq 0) \quad (6)$$

식(6)에서 스케일  $a$ 와 천이  $\tau$ 를 각각  $a=2^j$ ,  $\tau=k2^j$  ( $j, k \in Z$ )으로 이산화한 웨이브렛은 식(7)과 같으며, 이 때 정규 직교 기저함수(orthonormal basis function)를 이루는 모 웨이브렛이 존재하는데 이를 Daubechies 웨이브렛이라 부른다<sup>[18]</sup>.

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j}t - k) \quad (7)$$

식(7)의 정의식을 이용하여 웨이브렛의 기저 함수들을 구할 수 있으나, 웨이브렛의 효과적인 생성을 위해 흔히 아래와 같은 스케일 방정식을 이용한다.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_n \phi(2t - n) \quad (\phi(t), \Psi(t) \in L^2(R))$$

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} g_n \phi(2t - n), \quad g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n} \quad (8)$$

여기서  $\phi(t)$ 는 웨이브렛 생성을 위해 도입된 또 다른 정규 직교 기저함수로서 스케일 함수(scaling function) 또는 부 웨이브렛(father wavelet)이라 하며,  $\{h_n\}$ 와  $\{g_n\}$ 를 필터 열(filter sequence, or filter coefficients)이라 한다. 보다 높은 정확도와 데이터 압축을 위해서는 모 웨이브렛의 필터 열  $\{g_n\}$ 이 특정 개수의 vanishing moment를 갖도록 선택하게 된다. 이때, 필터계수는 특정한 양의 정수  $N$ 에 대하여 식(9)를 만족해야한다<sup>[8]</sup>.

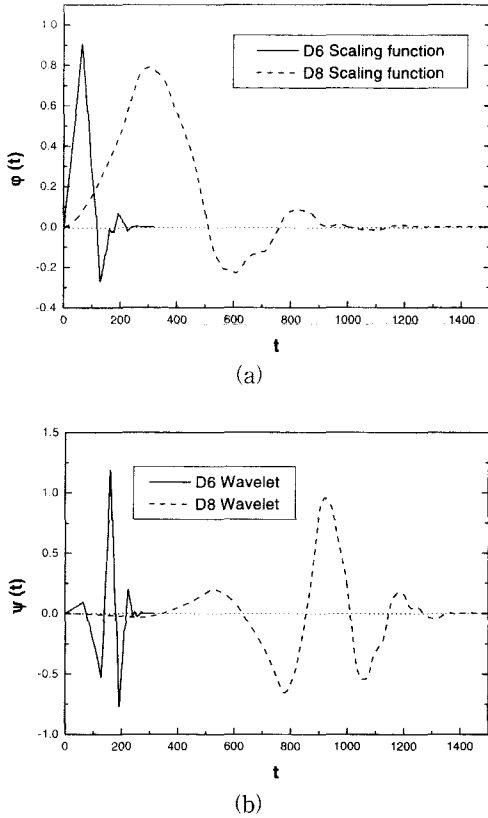


그림 4. Daubechies 웨이브렛. (a) 부 웨이브렛 (b) 모 웨이브렛

Fig. 4. Daubechies' wavelet. (a) scaling function and (b) (mother) wavelet.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^j g_n = 0, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (9)$$

필터열  $\{g_n\}$ 이  $m$  개의 vanishing moment를 가질 때  $h_n = 0$  ( $n \neq 0, 1, \dots, 2m-1$ ) 즉  $2m$  개의 영이 아닌 값을 가지게 되며, 이런 식으로 생성되는 웨이브렛을 D  $2m$  웨이브렛이라 한다<sup>[18]</sup>.

<그림 4>는 vanishing moment의 개수  $m$ 이 3과 4 일 때(즉 필터 계수의 개수가 6과 8)의 웨이브렛(D6, D8)을 나타낸 것으로, (a)는 부 웨이브렛, (b)는 모 웨이브렛에 해당한다. 그림에서 알 수 있듯이 웨이브렛은 시간(또는 공간)적으로 무한을 가정하는 삼각함수와 달리 유한화되어 있으므로 웨이브렛 변환은 시간과 주파수 영역에서 국부화(localized) 기능을 갖게 된다. 또한 필터 계수의 개수가 증가할수록 기저함수는 점점 더 평탄하고 부드러워지며 넓은 폭을 가지므로 주파수 특

성은 점점 더 급격해지고 날카로워진다. 따라서 이러한 기저함수를 사용하면 변환 후의 행렬은 더 높은 희소성을 나타낼 것이다<sup>[10]</sup>.

임의의 함수  $f(t)$ 에 대한 이산 웨이브렛 변환 (Discrete Wavelet Transform, DWT)은

$$DWT(j, k) = d_{k,j} = \int f(t) \Psi_{j,k}^*(t) dt \quad (10)$$

와 같이 정의된다. 고속 변환을 위해 식(10)을 직접 활용하는 대신 식(11)과 같이 스케일 함수의 적분을 도입하여 최상 스케일(즉,  $n = -1$ )에서 한번만 적분한 다음, 이 결과를 식(12)에 대입하여 순환적으로 고차의 이산 웨이브렛 계수(discrete wavelet coefficients)를 결정한다.

$$c_{k,n} = \int f(t) \phi_{n,k}(t) dt \quad (11)$$

$$c_{j+1,n} = \sum_k c_{j,k} h'(k-2n)$$

$$d_{j+1,n} = \sum_k c_{j,k} g'(k-2n) \quad (12)$$

이산 웨이브렛 변환과정을 아래와 같이 행렬  $S$ 로 표현할 수 있으며, 이를 기저함수 변환 행렬(wavelet basis matrix)이라 한다<sup>[8]</sup>.

$$S = U_0 U_1 \dots U_{J-1} \quad (S : 2^J \times 2^J \text{ matrix})$$

$$U_j = \begin{bmatrix} C_j & 0 \\ 0 & I_{2^j - 2^{j+1}} \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} H_j^j \\ G_j^j \end{bmatrix},$$

$$(I : (2^j - 2^{j+1}) \times (2^j - 2^{j+1}) \text{ unit matrix})$$

$$H_j^j = \{H_{2^j - k}^j\}_{l=0, k=0}^{2^j - 1, 2^{j+1} - 1}, \quad G_j^j = \{G_{2^j - k}^j\}_{l=0, k=0}^{2^j - 1, 2^{j+1} - 1}$$

$$H_i^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{2^{j+1}l-i} \quad G_i^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{2^{j+1}l-i} \quad (13)$$

## 2-2. 경계요소법에 의한 연립방정식의 웨이브렛 행렬 변환

기저함수 변환 행렬  $S$ 를 활용하여 경계요소법의 적용 결과인 식(5)에 이산 웨이브렛 변환과정을 적용하면, 식(14)와 같은 웨이브렛 영역의 행렬 방정식이 만들어지며,

$$A' X = B' \quad (14)$$

여기서 변환된 임피던스 행렬  $A'$ 과 열 벡터  $X', B'$ 은 각각 아래와 같이 정의된다.

$$A' = SAS^{-1}$$

$$X' = SX, B' = SB \tag{15}$$

그런데, 웨이브렛 특성에 의해 변환된 행렬  $A'$ 의 대부분 원소는 매우 작은 값을 가지므로, 어떤 값(임계값) 이하를 모두 영으로 처리하여 희소 행렬  $\hat{A}'$ 을 얻을 수 있다. 따라서 식(14)의  $A'$ 을  $\hat{A}'$ 로 대신한 관계식과 그 관계식을 만족하는 열 벡터를  $\hat{X}$ 라 하면, 웨이브렛 영역의 행렬 방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$\hat{A}' \hat{X} = B' \tag{16}$$

희소 행렬을 포함하는 식(16)의 연립방정식을 풀어  $\hat{X}$ 을 구한 다음, 식(17)과 같은 웨이브렛 역변환(inverse transform)을 통해 경계요소법의 적용 결과인 식(5)의 근사해  $\hat{X}$ 를 결정할 수 있다.

$$\hat{X} = S^{-1} \hat{X}' \tag{17}$$

이러한 희소 행렬  $\hat{A}'$ 의 특성을 살펴보기 위해 전체 계산영역이 단일영역인 경우와 다중영역인 경우에 대하여 행렬 원소의 크기에 대한 결과를 <그림 5(a), (b)>에 나타내었다. 그림에서 변환 후의 행렬은 대부분의 원소가 영이기는 하나 비대칭적이며 대각 성분이 주 원소가 아니므로 흔히 사용하는 conjugate gradient method<sup>[17]</sup>과 같은 선형 연립방정식의 간접 풀이법 또는 반복법 등은 비효율적인 것이다. 따라서 본 논문에서는 직접 풀이법에 해당하는 LU-인수분해방법(LU-decom

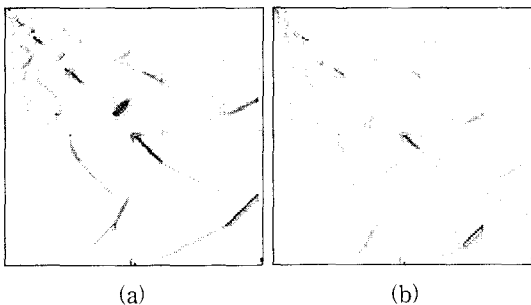


그림 5. (a) 단일영역과 (b) 다중영역(multi-zone21)에 대한 변환 후 행렬의 원소의 상대적 크기에 따른 그레이 스케일-이미지

Fig. 5. Gray-scale images of the magnitude of matrix of (a) single zone and (b) multi-zone after transform.

position)을 사용하되 효과적인 희소 행렬 저장 방식을 이용하여 영인 원소의 저장과 연산을 수행하지 않음으로서 행렬의 희소성에 비례하여 계산 시간과 메모리 사용량이 결정되는 희소 행렬 풀이법을 사용하였다<sup>[17]</sup>.

### III. 계산 결과 및 논의

웨이브렛 변환된 행렬의 희소성과 해의 정확도는 기저함수 변환 행렬  $S$ 를 구성하는 데 사용된 필터계수의 개수, 희소 행렬을 얻는 과정에서 사용된 임계값 그리고 행렬 크기 등에 직접적인 영향을 받는다. 따라서, 본 논문에서는 반도체 노광 공정과 관련된 전자기와 문제 즉, PSM과 빛의 상호작용에 대한 문제를 대상으로 웨이브렛 행렬 변환의 최적 인자를 결정하고 그 효율성을 확인해 보았다.

1. PSM과 빛의 상호작용에 해당하는 전자기와 문제  
PSM은 반도체 노광 장비의 해상력 한계를 극복하기 위한 기술로서 마스크를 투과하는 빛의 진폭과 위상을 동시에 변조함으로써 해상력을 향상시키는 개념이다. 마스크를 적당한 깊이로 식각하거나 위상변이를 위한 특정 굴절률 층을 추가하여 PSM을 제작하게 된다.<sup>[13,14]</sup> 보통 마스크(binary mask)의 경우, 광원으로부터 방출된 빛이 마스크를 통과한 후 웨이퍼 표면에 형성되는 빛의 세기 분포(aerial image)는 결상 이론(imaging theory)으로 예측 가능하지만, PSM의 경우는 두께와 단차를 가지므로 PSM 내부에서 일어나는 빛의 상호작용을 추가적으로 고려해야 한다. 이러한 상호작용을 엄정하게 다루기 위해 rigorous coupled wave analysis(혹은 waveguide method)<sup>[16]</sup>, 유한요소법<sup>[12]</sup>, 유한차분법<sup>[3]</sup> 등이 활용되어 왔으며 최근에는 경계요소법<sup>[11]</sup>이 적용된 바 있다.

본 논문에서는 PSM과 빛의 상호작용을 제 2장에서 제안한 방법에 따라 취급하였으며, 여러 가지 계산 결과로부터 웨이브렛 행렬 변환 방법의 최적 인자를 결정하려한다.

#### 2. 임계값에 따른 정확도와 희소성

임계값이란 웨이브렛 변환 후의 행렬 원소 중 어떤 크기 이하의 원소를 영으로 처리할 것인가를 판단하는 기준이다. 따라서 임계값이 크면 희소성은 커지지만 정확도는 떨어질 것이고, 임계값이 작으면 희소성은 작아지나 정확도는 올라갈 것이다. 그러므로 이 두 가지 측

면을 고려하여 웨이브렛 변환과정의 최적 인자를 결정해야 할 것이다. 그런데 이러한 결정 과정은 행렬 크기와 변환 전 행렬의 특성에 민감하므로, 아래와 같은 임계상수 (threshold constant)  $\delta$ 를 도입하여 범용의 인자를 결정하고자 한다<sup>[10]</sup>.

$$\tau = \delta \frac{\|A\|_{\infty}}{N} \quad (18)$$

이때  $\tau$ 는 임계값이며,  $\|A\|_{\infty}$ 는 변환 전 행렬  $A$ 의 infinity norm이고  $N$ 은 행렬 크기이다.

연고자 하는 해의 정확도 범위 내에서 최대의 임계상수를 찾아야만 최대의 최소성을 얻을 수 있을 것이다. 이를 위해 다음의 두 가지 전산 모의실험을 실시하였다. 첫 번째로 해석적인 해와의 비교를 통한 최적 임계상수  $\delta$ 를 찾기 위해, <그림 6(a)>에서와 같이 굴절률이 1.508이고 두께가 0.3 $\mu\text{m}$ 인 quartz plate에 빛이 위에서 수직으로 입사하는 경우를 다루었다. 입사영역과 투과영역이 모두 공기인 경우, 해석적으로 계산한 투과

광의 투과율은 가로축 좌표  $x$ 에 무관하게 0.8753이 되어야 한다.

제안한 방법에서 오차의 발생 요인을 크게 두 가지로 생각해 볼 수 있다. 하나는 경계요소법 자체의 오차로서 각 경계요소 내의 전기장 분포를 단순함수로 근사하는 과정에서 발생되며, 다른 하나는 웨이브렛 변환 후 작은 원소를 영으로 처리할 때 너무 큰 임계값의 설정에 기인한 것이다.

먼저 경계요소법 자체의 오차를 파악하기 위해 <그림 6(a)>에 대해 기존의 경계요소법을 적용하여 투과광의 세기 분포를 계산하였다. 이때 사용된 광원의 파장은 0.248 $\mu\text{m}$ , 편광은 TE이며, 입사광의 세기를 1로 설정하였으므로 투과광의 세기 분포는 곧 투과율이 된다. 경계요소 길이에 따른 투과영역의 세기 분포는 <그림 6(b)>와 같은데, 해의 정확도가 경계요소 길이에 의존함을 알 수 있다. 경계요소가 커지면, 경계요소 내의 전기장을 단순한 함수로 근사할 수 없게되어 오차가 점차 증가한다. 그러나, 경계요소 길이가 0.01 $\mu\text{m}$  이하가 되면, 해석적인 결과에 대해 오차는 0.1% 이하로 유지됨을 알 수 있다.

다음은 임계값에 따른 오차의 변화를 알아보기 위하여 동일 문제에 대해 경계요소 길이는 0.005 $\mu\text{m}$ , 필터 계수의 개수는 16개로 고정하고, 임계상수  $\delta$ 에 따른 세기 변화를 조사하여 <그림 7(a)>에 나타내었다. 그림에서 점선은 경계요소법만의 또는 웨이브렛 변환을 하되 임계값 이하를 영으로 처리하지 않은 경우의 계산 결과이다. 사각형 점은 임계상수를 변화시키면서 계산된 투과율을  $x$  좌표에 걸쳐 평균한 것이다. 경계요소법만의 결과와 비교하며,  $\delta$ 가 0.01 이하일 때, 오차가 0.01% 이하임을 알 수 있다. 따라서  $\delta$ 를 0.01 이하로 유지한다면 제안된 방법의 오차는 웨이브렛 변환과정보다는 경계요소법 그 자체 즉, 경계요소 길이에 의해 주어지게 될 것이다.

앞에서는 투과율 측면에서 임계상수와 해의 정확도 관계를 살펴보았으나, 선형 연립방정식의 해 측면에서 임계상수가 오차와 어떤 관계가 있는지를 알아보기 위해 아래와 같은 상대적 나머지 오차(relative residual error)<sup>[9]</sup>를 구하여 비교하였다.

$$\frac{\|A \cdot \hat{X} - B\|}{\|B\|} \quad (19)$$

여기서  $A, B$ 는 변환 전의 임피던스 행렬과 열 벡터

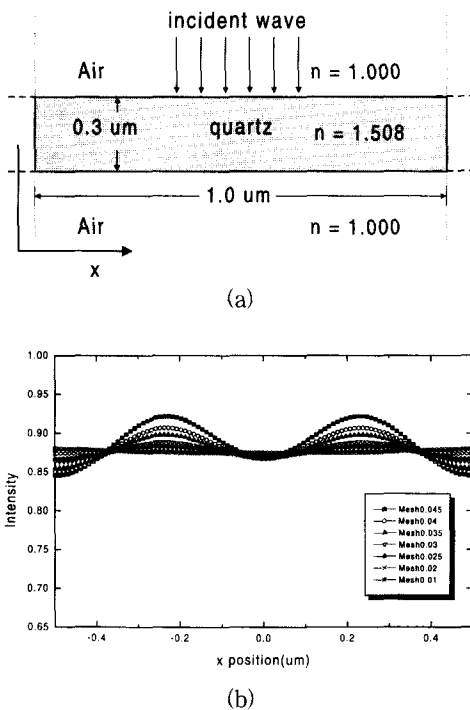


그림 6. (a) 전산 모의 실험에 사용된 단일영역 (b) 경계요소 길이에 따른 투과영역의 세기 분포  
Fig. 6. (a) Single-zone domain used in simulation (b) Intensity distribution versus mesh size variation in transmitted region.

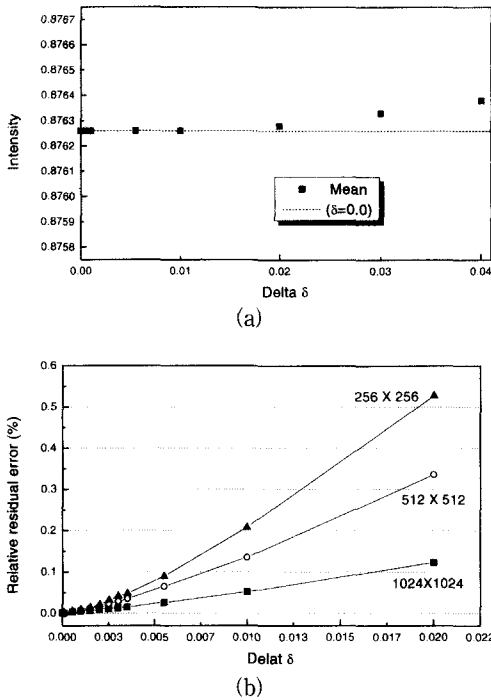


그림 7. 임계상수에 따른 (a) 투과영역의 세기 분포와 (b) 상대적 나머지 오차  
 Fig. 7. (a) Intensity distribution versus threshold constant variation in transmitted region. (b) Relative residual error versus threshold constant variation.

이고  $X$  는 웨이브렛 변환을 이용하여 계산된 근사해이다. 또한  $\| \cdot \|$  는 벡터의 Euclidean norm이다. <그림 7(b)>를 보면  $\delta = 0.01$ 에서 512X512 이상의 행렬 크기에 대하여 약 0.15% 이하의 오차를 나타낸다. 또한 행렬 크기가 커질수록 임계상수에 따른 Relative residual error의 증가율은 감소함을 알 수 있다. 이 결과는 선형 연립방정식의 해 입장에서 본 것이므로 경계요소 길이와는 관련이 없는 것이다.

해석적 결과와의 비교를 통한 적정한  $\delta$ 의 결정에 이어, 두 번째로 PSM의 단차 효과에 대한 기존 문헌결과<sup>[12]</sup>와의 비교를 통해 최적 임계상수  $\delta$ 를 찾아보았다.

<그림 8(a)>와 같이 quartz plate에 크롬 층(굴절률이 2.5-2.0j)을 코팅하여 빛이 투과하는 부분을 조정하였고 두 개구부(크롬이 코팅되어 있지 않은 부분) 간의 위상변이가  $180^\circ$ 가 되도록 한쪽 개구부를 식각한 형태이다. PSM은 복잡한 구조의 단차를 가지므로, 좌측 위상변이 개구부의 수직 벽(sidewall)에서 일어나는 빛의 산란 등으로 인해 두 개구부를 투과한 투과광의 세

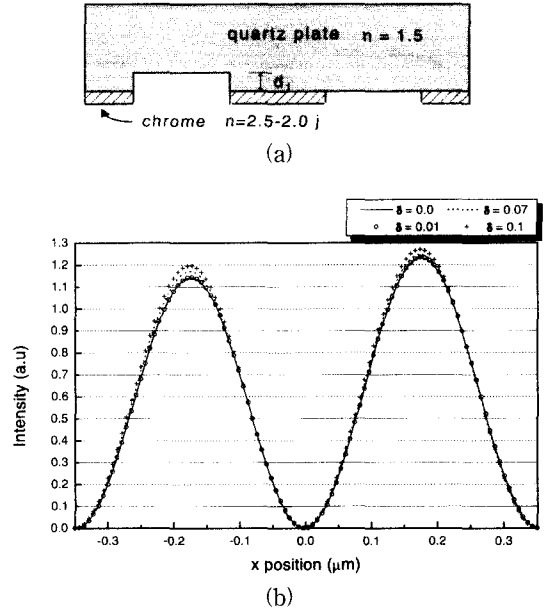


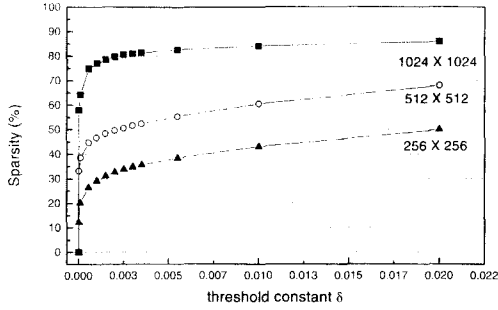
그림 8. (a) 전산 모의 실험에 사용된 위상 변위 마스크 (b) 투과영역의 세기 분포  
 Fig. 8. (a) Schematic diagram of PSM's for simulation (b) Aerial image of the PSM with L/S = 0.2 um.

기가 서로 다르게 되는데 이러한 현상이 PSM의 대표적인 단차 효과이다.

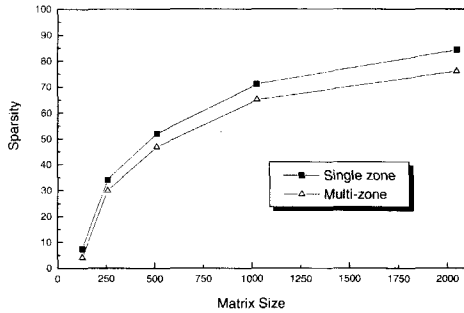
첫 번째 예에서와 같은 경계요소 길이와 필터 개수를 사용하여 투과광의 세기 분포를 구하였다. <그림 8(b)>에서 임계값 이하를 영으로 처리하지 않은 경우 ( $\delta = 0$ ), 대략 8.2~8.3%의 개구간 세기 차이를 나타내고 있다. 참고로 동일 조건의 다른 전산 모의실험 결과들<sup>[12]</sup>과 비교하였을 때, 이 결과는 1.5% 이하의 차이를 보이고 있다.  $\delta = 0$ 을 기준으로 임계상수를 증가시키면 따라  $\delta = 0.01$ 까지는 오차가 1% 이하로 유지되지만, 그 이상에서는 오차가 많이 증가한다.

이제 <그림 6(a)>의 예에 대해 임계상수와 변환 후 행렬의 희소성을 살펴보자. 필터 계수의 개수가 16일 때, 임계상수를 변화시키면서 몇 가지 행렬 크기에 대해 희소성을 알아보았다. <그림 9(a)>는 임계상수에 따른 희소성 변화를 나타내는데, 대략 임계상수가 0.003 이하에서는 임계상수에 따라 희소성이 급격히 증가하지만 그 이상에서는 완만한 증가율을 보이면서 희소성이 포화된다. 따라서 임계상수를 어떤 값 이상으로 높여도 희소성이 더 이상 개선되지 않으므로, 대략 0.01의 임계상수가 적당함을 알 수 있다. <그림 9(b)>





(a)



(b)

그림 9. (a) 임계상수에 따른 단일 계산영역의 희소성  
(b) 행렬 크기에 따른 희소성

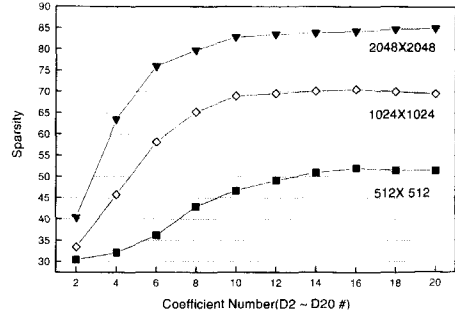
Fig. 9. (a) Sparsity of matrix for a single zone versus threshold constant. (b) Sparsity versus matrix size.

는 행렬 크기와 희소성의 관계를 나타낸 것으로, 행렬 크기가 클수록 웨이브렛 변환에 의해 희소성이 더 크게 증가함을 알 수 있다. 그러므로 제안된 방법은 행렬 크기가 커질수록 더 유리함을 알 수 있다.

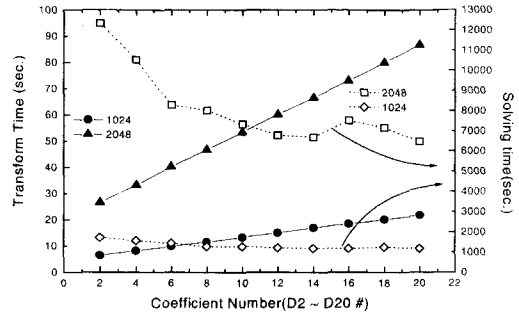
### 3. 필터 계수의 개수에 따른 희소성과 변환 시간

웨이브렛을 생성할 때 사용되는 필터 계수의 개수에 따라 웨이브렛 변환 행렬의 특성이 달라지며, 일반적으로 필터의 계수의 개수가 증가할수록 변환 후 행렬은 더 높은 압축율(희소성)을 나타낸다<sup>[8]</sup>. 그러나 웨이브렛 변환에 소요되는 시간은 필터 계수의 개수에 비례하므로 문제에 따라 필터 계수의 최적 개수를 결정하는 것이 필요하다. 먼저 <그림 6(a)>와 동일한 예에 대해 희소성에 영향을 주는 또 다른 요소인 임계상수를 고정하고 서로 다른 크기의 변환 후 행렬에 대한 희소성을 필터 계수의 개수를 바꾸어 가며 조사하였다.

필터 개수가 증가할수록 변환 후 행렬의 희소성은 증가하다가 개수가 어떤 이상이 되면 포화 상태에 이른다는 것을 <그림 10(a)>에서 알 수 있다. 필터 개수



(a)



(b)

그림 10. 필터 계수의 개수에 따른 (a) 희소성 및 (b) 변환시간과 전체 계산시간

Fig. 10. (a) Sparsity versus the number of coefficients (b) Transform time and solving time versus the number of coefficients.

에 따른 희소성의 증가 추세는 행렬 크기가 클수록 더욱 뚜렷해진다. 한편 필터 계수의 개수 증가에 따른 변환시간을 전체 계산시간과 비교하여 <그림 10(b)>에 나타내었다. 여기서 좌변 세로축은 변환시간을 우변 세로축은 그 경우의 전체 계산시간이다. 그림에서 보면 변환시간은 필터 계수의 개수에 따라 선형적으로 증가하지만, 전체 계산시간은 오히려 감소되는 것을 알 수 있다. 이는 변환시간이 전체 계산시간에 비해 상대적으로 아주 짧으며, 필터 계수의 개수에 따라 희소성이 증가하여 해를 구하는 시간이 감소하기 때문이다. 이상 두 가지 결과로부터 16개의 필터 계수(D16 웨이브렛)를 사용한다면, 문제에 관계없이 최대의 희소성을 얻을 수 있음을 확인하였다.

### 4. 계산 시간과 메모리 비교

마지막으로 <그림 6(a)>의 계산 예에 대해 기존 경계요소법과 제안한 웨이브렛 경계요소법(Wavelet BEM)의 메모리 사용량과 계산시간을 비교해 보았다. 이를 위해 앞의 과정을 통해 최적 설정된 필터계수의

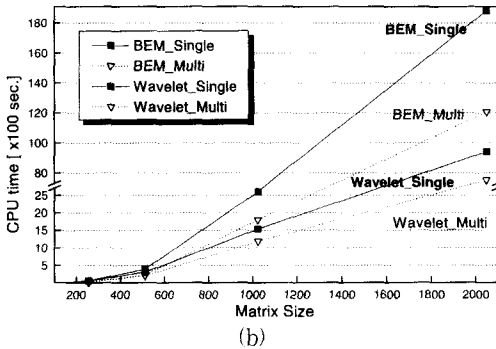
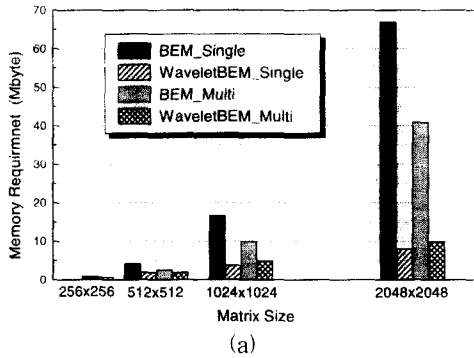


그림 11. 행렬 크기에 따른 (a) 메모리 사용량과 (b) 계산시간  
 Fig. 11. (a) Memory versus matrix size (b) CPU time versus matrix size.

개수( $m=16$ )와 임계상수( $\delta=0.01$ )를 사용하였고, 영역의 분할 방식에 따른 차이를 살펴보기 위해 계산 영역을 <그림 2>의 단일영역(single zone)과 다중영역(multi zone<sup>21</sup>)으로 분할하여 취급하였다.

<그림 11(a)>는 행렬 크기에 따른 메모리 사용량을 비교한 것이며, 이때 메모리 사용량은 연립방정식의 행렬 구성이나 풀이에 관한 것만을 의미한다. 그림의 맨 우측에 있는 2048X2048의 단일 계산영역에 대해서 제안된 방법의 효과가 가장 뚜렷한데, 기존 경계요소법은 67MB, Wavelet BEM은 8MB의 메모리를 필요로 되며 메모리 사용량이 대략 8.3배 차이가 난다. 한편 다중영역의 경우 메모리 축소 효과가 다소 줄어들지만, 기존 경계요소법과 Wavelet BEM의 메모리 사용량이 각각 41MB, 10MB로 약 4배의 차이가 난다. 따라서 제안된 Wavelet BEM을 활용함으로써, 훨씬 적은 메모리를 사용하여 동일한 계산을 수행할 수 있음을 확인할 수 있다.

<그림 11(b)>는 행렬 크기에 따른 계산시간을 나타

낸 것이다. 모든 계산은 주 메모리 256MB의 Ultra SPARC 1 워크스테이션(workstation)에서 수행되었으며 기존 경계요소법은 LU-인수분해방법(LU-Decomposition)을, Wavelet BEM은 동일한 LU-인수분해법을 사용하되 효율적인 희소 행렬 저장방식<sup>17)</sup>을 사용하여 저장이나 연산속도가 희소성에 비례하도록 했다. 그림에서 알 수 있듯이 2048X2048의 다중영역의 경우 Wavelet BEM이 기존 방식에 비해 약 40%의 시간이득이, 동일 크기의 단일영역(single zone)은 대략 55%의 시간이득을 나타내었다.

#### IV. 결 론

다양한 응용성을 갖는 Maxwell 방정식의 고속 풀이를 위해 웨이블릿 행렬 변환 방법과 경계요소법(BEM)을 결합하였으며, 이를 2차원 PSM의 단차 효과에 관한 전자기파 문제에 적용하였다. 해석적인 해와 비교함으로써, 웨이블릿 변환과정에서 필터계수의 개수는  $m=16$ , 임계상수는  $\delta=0.01$ 가 최적임을 알 수 있었다. 또한 이런 조건에서 경계요소법의 단점인 밀집 행렬 생성문제를 해결할 수 있었으며, 메모리의 사용량과 계산 시간 측면에서 제안한 방법이 기존 경계요소법에 대해 효율적임을 확인하였다.

제안된 방법은 계산영역의 차원 축소라는 장점과 희소 행렬 생성이라는 장점을 모두 활용하는 것이므로, 2, 3차원의 계산영역을 가지는 복잡한 구조의 전자기파 문제에 매우 유용할 것이라 판단된다. 그러나, 계산영역이 이미 분할된 경우에는 경계요소법의 임피던스 행렬이 이미 희소성을 가지므로, 단일영역에 적용된 경우에 대해 제안된 방법의 효율성이 다소 떨어지는 측면이 있었다.

#### 참 고 문 헌

[1] E. B. Becker, G. F. Carey, and J. T. Oden, Finite Elements An Introduction : Volume 1, Prentice Hall, pp. 175~221, 1981.  
 [2] M. J. Fagan, Finite Element Analysis : Theory and Practice, Longman, pp. 39~84, 1992.  
 [3] A. K. Wong and A. R. Neureuther, "Polarization effects in mask transmission", SPIE vol. 1674, pp. 193~200, 1992.

- [4] Shin Kagani & Ichiro Fukai, "Application of Boundary-Element Method to Electromagnetic Field Problems", IEEE, vol.32, No. 4, pp 455~461 1984.
- [5] J. Trevelyan, "Boundary Elements for Engineers-Theory and Applications", Computational Mechanics Publications, pp 4~25, 49~175, 96~97, 1994.
- [6] A.A. Becker, "The Boundary element method in Engineering-A complete course", McGRAW-HILL international editions, pp 6~90, 161~294, 1992.
- [7] B. Z. Steinberg and Y. Leviatan, "On the Use of Wavelet Expansion in the Method of Moments", IEEE Trans. Antennas Propaga., vol. 41, no. 5, pp. 610~619, May, 1993.
- [8] Xiang and Y. Lu, "An Effective Wavelet Matrix Transform Approach for Efficient Solutions of Electromagnetic Integral Equations", IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 45, no. 8, pp. 1205~1213, August, 1997.
- [9] Z. Xiang and Y. Lu, "A Study of the Fast Wavelet Transform Method in Computational Electromagnetics", IEEE Trans. Magnetics, vol. 34, no. 5, pp. 3323~3326, September 1998.
- [10] R. L. Wagner and W. C. Chew, "A Study of Wavelets for the Solution of Electromagnetic Integral Equations", IEEE Trans. Antennas Propaga., vol. 43, no. 8, pp. 802~810, Aug. 1995.
- [11] 이동훈, 김현준, 이승걸, 이종웅, "경계요소법을 이용한 위상 변이 마스크의 단차 효과 분석", 대한전자공학회 논문지, 제36권 D편, 제11호, pp. 931~942, Nov. 1999
- [12] K. D. Lucas, A. J. Strojwas, K. K. Low, and Chi-Min Yuan, "Intensity optimization for phase-shifting Masks", SPIE, vol. 1927, pp. 438~449, 1993.
- [13] C. Pierrat, A. Wong, and S. Vaidya, "Phase-shifting mask topography effects on lithographic image quality", SPIE vol. 1927, pp. 28~41, 1993.
- [14] T. A. Brunner and R. A. Ferguson, "Approximate models for resist processing effects", SPIE vol. 2726, pp. 198~206, 1996.
- [15] G. Wang, "A Hybrid Wavelet Expansion and Boundary Element Analysis of Electromagnetic Scattering from Conducting Objects", IEEE Trans. Antennas Propaga., vol. 43, no. 2, pp. 170~178, February 1995.
- [16] M. G. Moharam and T. K. Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar grating diffraction", J. Opt. Soc. Am., vol. 71, no. 7, pp. 811~818, 1981.
- [17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing, 2nd ed. New York : Cambridge Univ. Press, 1992.
- [18] I. Daubechies, "Orthogonal bases of compactly supported wavelets", Comm. Pure Applied Math., 41, 1991, pp 909~996, 1984.

---

 저 자 소 개
 

---

## 金顯俊(正會員)

1998년 : 인하대학교 전자재료공학과 졸업(공학사). 2000년 : 인하대학교 전자전기컴퓨터 공학부 반도체 전공(공학석사). 2000년~현재 : 인하대학교 정보통신 공학부 박사과정. <주관심분야 : 반도체 및 광소자, 공정 및 소자 시뮬레이터 개발 등임>

## 李升杰(正會員)

1982년 : 인하대학교 응용물리학과(공학사). 1984년 : 한국과학기술원 물리학과(이학석사). 1987년 : 한국과학기술원 물리학과(이학박사). 1987년~1991년 : 인하대학교 응용물리학과 조교수. 1991년~1992년 : 미국 Northwestern 대학 교환교수. 현재 : 인하대학교 공과대학 정보통신공학부 교수. <주관심분야 : 광리소그래피 공정의 개선과 시뮬레이터 개발, 전자 소자와 광소자의 접목등임>

## 吳 範 煥(正會員)

1985년 : 서울대학교(이학사-물리학과). 1987년 : 서울대학교(이학석사-물리학과). 1993년 : 미국 Univ. of Teks at Austin(이학박사-물리학과). 1993년~1994년 : 미국 Univ. of Teks at Austin 연구원. 현재 : 인하대학교 공과대학 정보통신공학부 교수. <주관심분야 : 플라즈마 식각특성 개선에 관한 연구와 MEMS, 광자소자의 설계 및 공정 최적화에 대한 연구>

## 李 一 恒(正會員)

1970년 : 서울대학교 전기공학과(공학사). 1973년 : Yale 대학 응용물리학과(이학석사). 1977년 : Yale대학 응용물리학과(이학박사). 1984년~1990년 : 미 AT&T 수석 연구원. 1990년~1998년 : 한국전자통신연구원 연구단장. 현재 : 인하대학교 정보통신대학원 대학원장. <주관심분야 : 광정보통신>