

論文2002-39SC-5-4

이산시간 폴리토프형 불확실성 시스템의 견실  $H_\infty$  필터링(Robust  $H_\infty$  filtering for discrete-time polytopic uncertain systems)

金鍾海\*, 吳道昌\*\*, 李甲來\*\*\*

(Jong Hae Kim, Do Chang Oh, and Kap Rai Lee)

## 요약

본 논문에서는 볼록 한계 불확실성(convex bounded uncertainty)을 가지는 이산시간 선형 시스템의 견실  $H_\infty$  필터 설계 알고리즘을 제안한다. 다루고 있는 파라미터 불확실성은 폴리토프형(polytope type) 볼록 한계를 가지는 형태이다. 본 논문의 목적은 필터링 오차 시스템의 점근 안정성(asymptotic stability)과 변형한 성능지수의 유도  $L_2$  노름( $L_2$  induced norm) 한계치를 해석적으로 제시하는 안정한 견실  $H_\infty$  필터를 설계하는 것이다. 견실  $H_\infty$  필터가 존재할 충분조건과 필터 설계 방법은 볼록 최적화 기법에 의하여 효과적으로 해를 구하는 선형행렬부등식 방법에 의하여 제시한다. 제안한 알고리즘의 타당성은 예제를 통하여 확인한다.

## Abstract

The design method of robust  $H_\infty$  filtering for discrete-time uncertain linear systems is investigated in this paper. The uncertain parameters are assumed to be unknown but belonging to known convex compact set of polytope type. The objective is to design a stable robust  $H_\infty$  filter guaranteeing the asymptotic stability of filtering error dynamics and present an  $L_2$  induced norm bound analytically for the modified  $H_\infty$  performance measure. The sufficient condition for the existence of robust  $H_\infty$  filter and the filter design method are established by LMI(linear matrix inequality) approach, which can be solved efficiently by convex optimization. The proposed algorithm is checked through an example.

**Keyword** :  $H_\infty$  filtering, convex bounded uncertainty, discrete-time system, linear matrix inequality

\* 正會員, 鮮文大學校 電子情報通信工學部

(Division of Electronics, Information and Communication Engineering, Sunmoon University)

\*\* 正會員, 建陽大學校 IT學部

(Division of Information and Technology, Konyang University)

\*\*\* 正會員, 平澤大學校 情報科學部

(Department of Information Science, Pyongtaek University)

接受日字:2001年6月22日, 수정완료일:2002年8月19日

## I. 서론

필터링 문제는 공학과 과학분야에서 계속 연구되어지고 있다. 특히, 모델 불확실성을 다룰 수 있는 필터 설계는 최근 관심 연구분야중의 하나가 되어 왔기 때문에 필터 설계 방법에 대한 노력이 가속화 되어 가고 있다.

칼만 필터링 이론이 소개되어진 이후에, 연속시간에서 많은 연구결과들이 나왔다. 더욱이, 이산시간 선형

불확실성 시스템에 대한 건실  $H_\infty$  필터링 문제가 언급되어지고 있다. Theodor 등<sup>[1]</sup>은 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation)을 이용하여 건실 이산시간  $H_\infty$  추정(estimation)에 대한 게임 이론 접근방법을 제시하였다. 하지만, 해를 구하기 위해서는 몇가지 변수를 설정해야 한다는 단점이 있었다. Li와 Fu<sup>[2]</sup>는 Gahinet<sup>[3]</sup>과 Iwasaki와 Skelton<sup>[4]</sup>이 제안한 개념을 기본으로 소위 적분 자승 제약조건에 의한 노음 한계를 가지는 불확실성 시스템의 건실  $H_\infty$  필터링의 문제를 다루었다. 그들의 목적은 선형행렬부등식을 이용하여 건실  $H_\infty$  필터링 문제가 풀려질 수 있다는 것을 보이는 것이었다. 하지만, 몇가지 변수를 미리 설정하여 상호결합된 세가지의 선형행렬부등식으로부터 최종적인 건실  $H_\infty$  필터를 설계하는 것이 어렵고, 또한 구한 필터가  $H_\infty$  노음 견지에서 최적(optimal)이 아니었다. 즉, 모든 변수의 견지에서 완전한 선형행렬부등식이 아니었다. 최근, Geromel 등<sup>[5]</sup>은 선형행렬부등식을 이용하여 이산시간 시스템 대한  $H_2$  필터와  $H_\infty$  필터를 설계하는 방법을 제시하였다. Palhares와 Peres<sup>[6]</sup>는 선형행렬부등식 접근 방법을 이용하여 이산시간 시스템의 극점배치를 갖는 건실  $H_\infty$  필터링에 관하여 언급하였다. 연속시간에서도, 블록 최적화 방법을 이용한 폴리토프형 불확실성을 가지는 시스템에 대한 건실  $H_\infty$  필터링에 관한 연구가 최근 많이 나오고 있다.<sup>[7]</sup> 특히, Jin과 Park<sup>[8]</sup>은 블록 한계 불확실성이 노음 한계를 가지는 파라미터 불확실성(norm-bounded parameter uncertainty) 보다 덜 보수적임(less conservatism)을 보이고, 블록 한계 불확실성을 가지는 연속시간 시스템의 건실  $H_\infty$  필터링 설계 알고리즘을 제시하였다. 하지만, 대부분의 논문들이 초기치(initial condition)를 고려하지 않고 필터의 성능을 계산하였다. 필터의 성능은 제어기와는 달리 상태들(states)의 초기치에 상당히 민감하다. 따라서, 초기치를 고려하는 성능지수가 필요하다.

본 논문에서는 이산시간 영역에서 폴리토프형 블록 한계 불확실성을 가지는 선형 시스템의 새로운 건실  $H_\infty$  필터 설계 방법을 제안한다. 초기치를 고려하는 변형한  $H_\infty$  성능지수와 선형행렬부등식을 이용하여 필터가 존재할 충분조건을 제시한다. 제안한 안정한 건실  $H_\infty$  필터는 필터링 오차 다이내믹스의 점근적 안정성을 보장할 뿐아니라 유도  $L_2$  노음의 상한치(upper bound)를 해석적으로 구한다.

본 논문에서 사용하는 수식은 일반적이다.  $I$ 와  $0$ 은

적절한 차원(dimension)을 가지는 단위행렬(identity matrix)과 영행렬을 각각 의미한다.  $\|x(k)\|_2 = (\sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|^2)^{1/2}$ 이고,  $\|\cdot\|$ 은 유클리드 벡터(Euclidean vector)이다. \*는 행렬의 주 대각선 아래 놓이는 대칭요소를 의미한다.

## II. 문제설정 및 건실 $H_\infty$ 필터 설계

폴리토프형 블록 한계 불확실성을 가지는 이산시간 시스템

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\lambda)x(k) + B(\lambda)w(k) \\ y(k) &= C(\lambda)x(k) + D(\lambda)w(k) \end{aligned} \quad (1)$$

을 다룬다. 여기서,  $x(k) \in R^n$ 은 상태 벡터(state vector),  $y(k) \in R^r$ 은 측정 출력 벡터(measurement output vector),  $w(k) \in R^m$ 은 잡음 신호 벡터(noise signal vector)이고  $l_2[0, \infty)$ 에 속한다.  $\lambda$ 는 독립적인 불확실성 파라미터이다. 시스템 행렬들은 시변 불확실성 파라미터이거나 또는 행렬의 유한한 집합에 속하는 변수이다. 시스템 행렬을

$$\Psi(\lambda) = \begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{bmatrix} \in R^{(n+r) \times (n+m)} \quad (2)$$

와 같이 정의하자. 행렬  $\Psi(\lambda)$ 는

$$\Psi(\lambda) = \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i \Psi_i : \tau_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \tau_i = 1 \right\} \quad (3)$$

에 속하는 알고 있는 폴리토프형 블록 컴팩트 집합(convex compact set)에 속한다. 여기서,  $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ 는

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \dots, \Psi_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

로 표현되는 블록 폴리토프의  $i=1, 2, \dots, k$ 의 각 꼭지점(vertex)에서 주어지는 시스템이다. 본 논문에서는

$$\Psi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (5)$$

로 표현하고,  $\Psi$ 가 식 (3)에 속하는 시변 불확실성 시스템이다. 물론, 시변 불확실성 시스템에 대한 결과는

폴리토프 시스템의 고유성질로 인하여 임의의 상수 요소를 가지는 시스템에 대한 결과로부터 쉽게 확장되어질 수 있다. 실제 시스템의 경우에는 시스템 다이내믹스의 행렬의 일부 요소에만 불확실성 파라미터를 포함한다. 따라서, 블록 한계를 가지는 불확실성이 노음 한계를 가지는 파라미터 불확실성보다 덜 보수적이다.<sup>[8]</sup> 그리고, 구하려는 필터의 최종 목적은

$$\hat{x}(k+1) = G\hat{x}(k) + Ky(k) \quad (6)$$

으로 표현되는 안정한 선형  $H_\infty$  필터를 설계하는 것이다. 여기서,  $G$ 와  $K$ 가 찾아야 할 필터 변수이고, 적절한 차원(dimensions)을 가진다고 가정하자. 만약, 오차 상태 벡터를

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (7)$$

와 같이 잡는다면, 오차 다이내믹스(error dynamics)는 오차 상태 출력(error state output)을  $z(k) = Le(k)$ 로 정의하므로써

$$e(k+1) = Ge(k) + (A - KC - G)x(k) + (B - KD)w(k) \quad (8)$$

$$z(k) = Le(k)$$

와 같이 얻는다. 추가된 상태 벡터(augmented state vector)를

$$x_f(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \quad (9)$$

로 정의하면, 필터링 오차 다이내믹스는

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f x_f(k) + B_f w(k) \\ z(k) &= C_f(k) \end{aligned} \quad (10)$$

이고, 필터링 오차 다이내믹스의 행렬들은

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - KC - G & G \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} B \\ B - KD \end{bmatrix}, \\ C_f &= [0 \quad L] \end{aligned} \quad (11)$$

로 정의된다. 또한, 초기치를 고려하는 변형한  $H_\infty$  성능지수는

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} z(k)^T z(k) - \gamma^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} w(k)^T w(k) \right) \\ &\quad + x_f(0)^T R x_f(0) \end{aligned} \quad (12)$$

로 정의하고, 양한정 대칭 행렬(positive definite symmetric matrix)  $R$ 은 초기조건에 따라 선택할 수 있는 하중요소(weighting factor)이다. 물론, 정리 2에서는 필터링 오차 다이내믹스의 유도  $L_2$  노음을 최소화하기 위하여  $R$ 도 선형행렬부등식의 변수로써 구해짐을 보인다. 물론, 근본적인  $H_\infty$  필터링 문제는  $R$ 과 유도  $L_2$  노음을 해석적으로 구하는 것과 별개의 문제이지만 수정한 성능지수 (12)에 대한 하중요소  $R$ 과 노음 한계치를 해석적으로 구하는 방법을 정리 2에서 제시한다. 식 (12)로부터 본 논문의 목적은

$$\sup_{w(k) \neq 0 \in l_2[0, \infty)} \frac{\|z(k)\|_2^2}{\|w(k)\|_2^2 + x(0)^T R x(0)} < \gamma^2 \quad (13)$$

의 상한치인  $\gamma$ 를 해석적으로 구하면서 필터변수인  $G$ 와  $K$ 를 찾는 것이다. 주어진 하중요소  $R$ 에 대하여, 필터링 오차 다이내믹스의 안정성과 변형한  $H_\infty$  성능지수에 대한 견실  $H_\infty$  필터 설계방법은 정리 1에서 제안한다. 그리고, 초기 하중요소인  $R$ 도 선형행렬부등식의 변수로써 해가 구해짐을 정리 2에서 보인다. 점근적 안정성과 변형한  $H_\infty$  성능지수를 만족하는 견실  $H_\infty$  필터 (6)을 구하는 문제는 정리 1에서 선형행렬부등식으로 표현한다. 식 (3)에 속하는 모든 폴리토프 블록 한계를 가지는 불확실성과 잡음 신호에 대하여 안정성과  $\gamma$  한계치를 해석적으로 구하기 위한 견실  $H_\infty$  필터가 존재할 충분조건과 견실  $H_\infty$  필터 설계 방법 및  $\gamma$ 의 상한치를 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 표현한다.

정리 1 : 주어진 하중요소 과 모든 에 대하여,

$$\text{minimize } \rho \text{ subject to} \quad (14)$$

$$(i) \begin{bmatrix} -P_1 & 0 & P_1 A_i & 0 & P_1 B_i \\ * & -P_2 & P_2 A_i - M_2 C_i - M_1 & M_1 & P_2 B_i - M_2 D_i \\ * & * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_2 + L^T L & 0 \\ * & * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \prec \rho R$$

를 만족하는 양확정 대칭 행렬(또는 상수)  $P_1, P_2, \rho$  와 행렬  $M_1, M_2$ 가 존재하면, 식 (6)은 필터링 오차 다이내믹스의 점근적 안정성을 보장하는 전실  $H_\infty$  필터이다. 여기서, 몇 가지 변수들은

$$\begin{aligned} \rho &= \gamma^2 \\ M_1 &= P_2 G \\ M_2 &= P_2 K \end{aligned} \quad (15)$$

로 치환한다.

증명 : 불확실성의 모든 집합  $\mathcal{W}$ 에서 필터링 오차 다이내믹스가 점근적으로 안정하다는 것은 리아푸노프-크라조프스키(Lyapunov-Krasovski) 결과<sup>10)</sup>로부터 쉽게 알 수 있다. 필터링 오차 다이내믹스를 위한  $H_\infty$  성능에 관하여서는, 우선

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} [z(k)^T z(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [z(k)^T z(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k) + \Delta V] \quad (16) \\ & \quad + V(x_f(0)) - V(x_f(\infty)) \end{aligned}$$

의 관계에 유의하여야 한다. 여기서, 리아푸노프 함수는

$$V(x_f(k)) = x_f(k)^T P x_f(k) \quad (17)$$

로 정의한다. 필터링 오차 다이내믹스가 점근적으로 안정하기 때문에  $k \rightarrow \infty$ 로 가면  $V(x_f(k)) \rightarrow 0$ 이 된다. 그러므로, 변형한  $H_\infty$  성능지수 (12)와 리아푸노프 함수 (17) 및 식 (16)의 관계로부터

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} [z(k)^T z(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k) + \Delta V] \\ & \quad + V(x_f(0)) - \gamma^2 x_f(0)^T R x_f(0) \quad (18) \\ &= J_a + J_b \end{aligned}$$

를 얻을 수 있다. 여기서,  $J_a = \sum_{k=0}^{\infty} [z(k)^T z(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k) + \Delta V]$ 로 정의하고,  $J_b = x_f(0)^T (P - \gamma^2 R) x_f(0)$ 로 정의하자. 결국, 충분조건 관계에 의하여  $J_a < 0$ 과  $J_b < 0$ 은  $J_a + J_b < 0$ 임을 의미한다. 즉,  $J_a < 0$ 과  $J_b < 0$ 의 각각의

조건들을 만족하는 해를 구하면  $J_a + J_b < 0$ 가 된다. 문제 해결상 약간의 보수성(conservatism)을 가질 수 있으나 모든 변수의 건지에서 블록 최적화가 가능한 선형행렬 부등식으로 표현되어져서 해석적인 해를 한번에 구할 수 있다는 장점이 있다.  $\zeta(k) = [x_f(k)^T w(k)^T]^T$ 로 정의하면,  $J_a < 0$ 은

$$J_a = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(k)^T Y \zeta(k) < 0 \quad (19)$$

로 표현되고, 여기서  $Y$ 는

$$Y = \begin{bmatrix} A_f^T P A_f - P + C_f^T C_f & A_f^T P B_f \\ * & -\gamma^2 I + B_f^T P B_f \end{bmatrix} \quad (20)$$

이다.  $Y < 0$ 은

$$\begin{bmatrix} A_f^T P A_f - P + C_f^T C_f & A_f^T P B_f \\ * & -\gamma^2 I + B_f^T P B_f \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P^{-1} & A_f & B_f \\ * & -P + C_f^T C_f & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P & P A_f & P B_f \\ * & -P + C_f^T C_f & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

로 변형된다. 여기서,  $P$ 를

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

와 같이 대각행렬로 정의하면, 슈어여수 정리와 식 (15)의 변수치환으로부터 식 (23)은

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & P_1 A & 0 & P_1 B \\ * & -P_2 & P_2 A - M_2 C - M_1 & M_1 & P_2 B - M_2 D \\ * & * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_2 + L^T L & 0 \\ * & * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

로 된다. 따라서, 식 (14)의 선형행렬부등식 (i)는 블록한계 불확실성 집합  $\mathcal{W}$ 의 모든 영역에서 식 (25)를 보장한다는 것은 쉽게 증명된다.<sup>10), 11)</sup> 또한,  $J_b < 0$ 을 만족

하기 위해서는 행렬  $P$ 가 가지는 조건이  $P < \rho R$ 이므로 식 (14)의 (ii)를 얻을 수 있다. ■

정리 1에서 제시하는 충분조건은  $R$ 이 주어지면, 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식이기 때문에 필터 변수( $G = P_2^{-1}M_1$ ,  $K = P_2^{-1}M_2$ )와 노음의 한계치( $\gamma = \sqrt{\rho}$ ) 및 변수들이 한번에 구해질 수 있다. 또한, 초기 상태의 값에 따라서 초기치를 고려하는 하중요소  $R$ 을 적절히 선택하므로써 필터의 성능을 결정할 수 있다. 정리 2에서는 정리 1의 결과로부터 하중요소  $R$ 도 선형행렬부등식의 변수로써 포함됨을 보인다. 즉, 모든 변수의 견지에서 완벽한 선형행렬부등식의 조건이 됨을 알 수 있다. 하중요소  $R$ 과 수정한  $H_\infty$  성능지수로부터 해석적인  $\gamma$  한계치를 동시에 구하기 위해서는 정리 2를 사용하는 것이 효과적이고, 적절한 하중요소  $R$ 을 선택하여 실제 시스템의 성능을 고려기 위해서는 정리 1의 접근방법이 유리하다.

정리 2: 모든  $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \Psi$ 에 대하여,

minimize  $\rho$  subject to (26)

$$(i) \begin{bmatrix} -P_1 & 0 & P_1 A_i & 0 & P_1 B_i \\ * & -P_2 & P_2 A_i - M_2 C_i - M_1 & M_1 & P_2 B_i - M_2 D_i \\ * & * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_2 + L^T L & 0 \\ * & * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} P_1 - X_1 & -X_2 \\ -X_2^T & P_2 - X_3 \end{bmatrix} < 0$$

을 만족하는 양확정 대칭 행렬(또는 상수)  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $X_1$ ,  $X_3$ ,  $\rho$ 와 행렬  $X_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ 가 존재하면, 식 (6)은 필터링 오차 다이내믹스의 점근적 안정성을 보장하는 견실  $H_\infty$  필터이다. 여기서, 변수치환은 식 (15)와 동일하고, 하중요소  $R$ 과  $\rho$ 의 곱은

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} = \rho R \quad (27)$$

로 치환된다.

증명: 식 (26)의 선형행렬부등식 (i)의 증명은 정리 2와 동일하다. 식 (26)의 (ii)는 식 (27)의 변수치환으로부터

쉽게 증명이 된다. 따라서, 하중요소  $R$ 은  $\rho^{-1}X$ 로부터 미리 설정하지 않고도 직접 구해질 수 있다. ■

추론 1: 만약  $R$ 이 주어진 시스템 (1)에 대하여, 초기치를 고려하지 않는

$$\sup_{w(k) \neq 0 \in l_2[0, \infty)} \frac{\|z(k)\|_2^2}{\|w(k)\|_2^2} < \gamma^2 \quad (28)$$

과 같은 일반적인  $H_\infty$  성능지수를 만족하는 견실  $H_\infty$  필터 (6)을 구하기 위한 충분조건은

minimize  $\rho$  subject to (29)

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & P_1 A_i & 0 & P_1 B_i \\ * & -P_2 & P_2 A_i - M_2 C_i - M_1 & M_1 & P_2 B_i - M_2 D_i \\ * & * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_2 + L^T L & 0 \\ * & * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} < 0$$

와 같이 정리 1로부터 직접 얻을 수 있다.

### III. 수치 예제

제안한 알고리즘의 타당성을 확인하기 위하여

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.5 + \Delta_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 + \Delta_2 \ 0] x(k) + w(k) \quad (30)$$

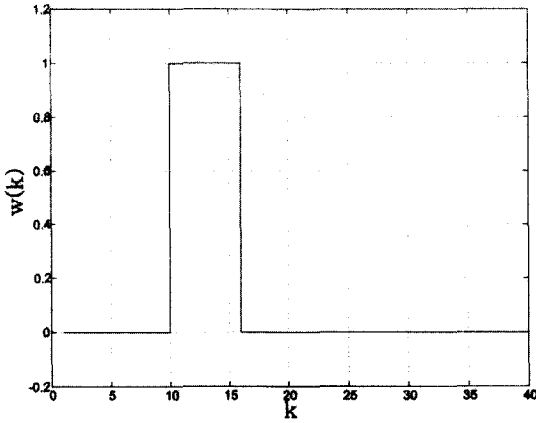
$$z(k) = [1 \ 1] e(k)$$

$$x_f(0) = [-1 \ 0 \ 0.1 \ 1]^T$$

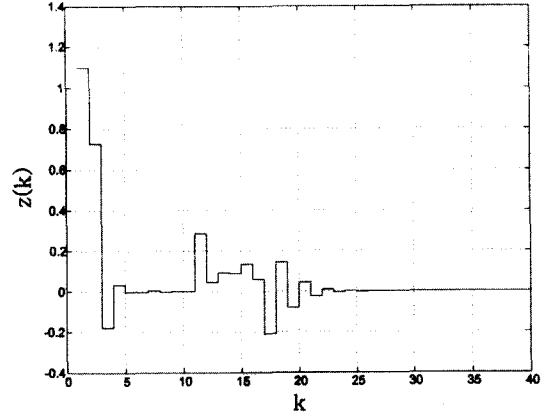
의 예제를  $R$ 이 주어진 경우와  $R$ 이 주어지지 않은 경우를 각각 다룬다. 여기서, 불확실성 요소의 변화율이  $-0.1 \leq \Delta_1 \leq 0.1$ 과  $0 \leq \Delta_2 \leq 1$ 으로 정의한다면 네 개의 꼭지점을 가지는 불확실성 시스템이 된다. 먼저, 초기 하중행렬이

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

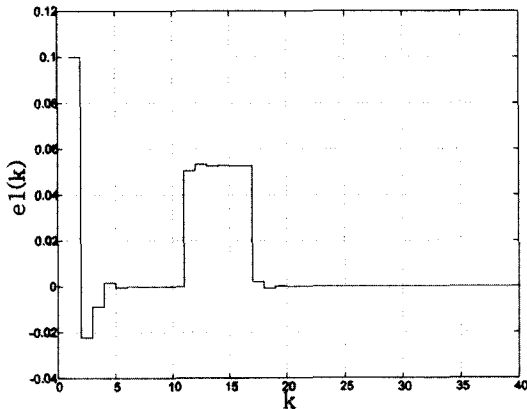
과 같이 설정하고 LMI Toolbox<sup>[11]</sup>의 'mincx' 명령어를 이용하면, 정리 1을 만족하는 모든 해는



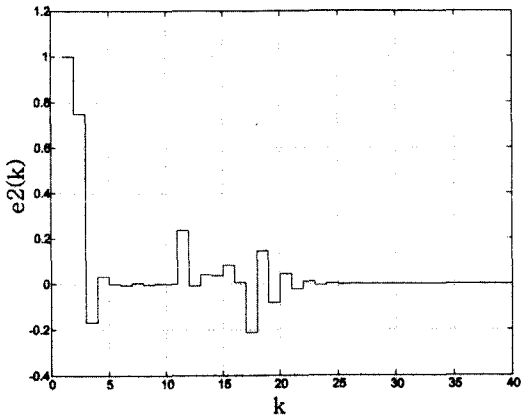
(a) 잡음 신호 :  $w(k)$   
(a) Noise signal :  $w(k)$



(d) 오차 상태 출력 :  $z(k)$   
(d) error state output :  $z(k)$



(b) 오차 상태 :  $e_1(k)$   
(b) error state :  $e_1(k)$



(c) 오차 상태 :  $e_2(k)$   
(c) error state :  $e_2(k)$

그림 1. 이 주어진 경우의 잡음 신호와 오차 상태 및 오차 상태 출력의 궤적  
Fig. 1. The trajectories of noise signal, error states, and error state output with a given  $R$ .

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.6393 & 0.6850 \\ 0.6850 & 0.8326 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1.6377 & 1.4021 \\ 1.4021 & 1.2854 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -0.5439 & -0.3773 \\ -0.4971 & -0.3454 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.9890 \\ 0.9117 \end{bmatrix}, \quad \rho = 2.8748$$

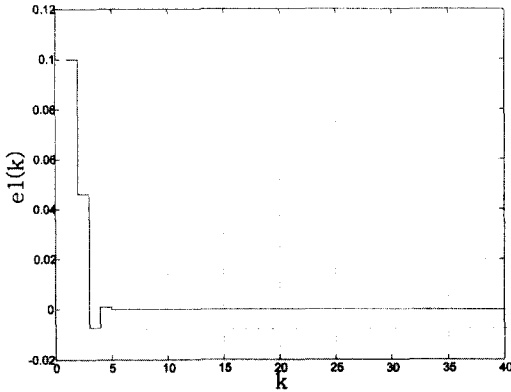
와 같이 한번에 얻어진다. 전실  $H_\infty$  필터와  $\gamma$  한계치는 변수치환 (15)와 해 (32)로부터

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.0153 & -0.0048 \\ -0.3701 & -0.2635 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} -0.0506 \\ 0.7645 \end{bmatrix} y(k) \quad (33)$$

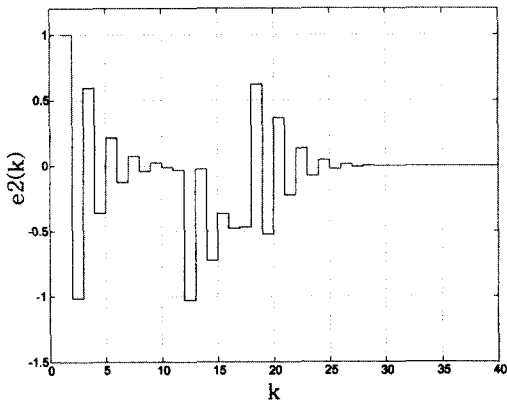
$$\gamma_R^* = 1.6955$$

과 같이 직접 구해진다. 그림 1의 (a)와 같은 잡음 신호 벡터  $w(k)$ 를 선택하면 오차 상태 벡터와 오차 상태 출력  $z(k)$ 의 신호는 그림 1의 (b)-(d)로 나타난다. 그림 1의 (b)와 (c)에서,  $k \rightarrow \infty$ 함에 따라 오차 상태들이 영에 수렴하기 때문에 전실  $H_\infty$  필터가 필터링 오차 다이내믹스를 점근적으로 안정화시킨다. 또한, 식 (13)으로 정의한 유도  $L_2$  노음 관계와 그림 1의 (a)와 (d)의 신호로부터 구한  $\gamma$  한계는  $0.4215(\sqrt{\gamma_R^*})$ 로써 식 (33)에서 구한 값보다 작음을 알 수 있다.

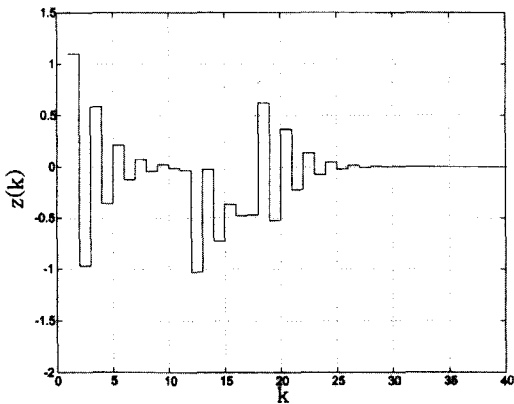
하중요소를 포함한 모든 변수를 구하는 경우에는, 정리 2로부터 전실  $H_\infty$  필터와 유도  $L_2$  노음 한계 및 하중요소  $R$ 은



(a) 오차 상태 :  $e_1(k)$   
(a) error state :  $e_1(k)$



(b) 오차 상태 :  $e_2(k)$   
(b) error state :  $e_2(k)$



(c) 오차 상태 출력 :  $z(k)$   
(c) error state output :  $z(k)$

그림 2.  $R$ 이 주어지지 않은 경우의 오차 상태와 오차 상태 출력의 궤적

Fig. 2. The trajectories of error states and error state output without a given  $R$ .

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.0491 & 0.0000 \\ -1.1368 & -0.5000 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 1.0417 \end{bmatrix} y(k)$$

$$\gamma^* = 0.4167 \tag{34}$$

$$R = 10^7 \times \begin{bmatrix} 8.8496 & 0.0005 & 0 & 0 \\ 0.0005 & 3.3988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.6075 & -0.0314 \\ 0 & 0 & -0.0314 & 3.2346 \end{bmatrix}$$

로 구해진다. 하중요소  $R$ 을 포함한 모든 변수의 견지에서  $\gamma^*$ 를 구하였으므로  $\gamma_R^*$ 보다 작은 한계치를 구할 수 있다. 하지만, 실제 응용부분에서는 초기 하중요소  $R$ 을 적절히 선택함으로써 상호절충(trade-off)을 고려한 적절한 성능을 만족하도록 필터를 설계할 수 있다. 그림 1의 (a)와 동일한 잡음 신호 벡터를 선택하면, 오차 상태 벡터와 오차 상태 출력의 궤적은 그림 2에서 주어진다. 오차 상태 벡터들이  $k \rightarrow \infty$ 로 감에 따라 영으로 수렴하므로, 구한 견실  $H_\infty$  필터가 불확실성과 잡음 신호에도 불구하고 필터링 오차 다이내믹스를 점근적으로 안정화 시킴을 알 수 있다. 또한, 식 (13)의 유도  $L_2$  노음의 관계로부터  $\gamma$ 를 구하면  $2.1980 \times 10^{-4}$  ( $\langle \gamma^* \rangle$ )와 같으므로 변형한  $H_\infty$  성능지수의  $\gamma$  한계를 만족한다.

#### IV. 결 론

모든 시스템 행렬에 폴리토프형 블록 한계 불확실성을 가지는 이산시간 선형 시스템에 대한 견실  $H_\infty$  필터 설계 알고리즘에 관하여 논의하였다. 초기 상태를 고려하는 하중요소를 아는 경우와 모르는 경우에 대하여 각각 견실  $H_\infty$  필터가 존재할 조건과 설계방법을 언급하였다. 또한, 제한한 견실  $H_\infty$  필터는 필터링 오차 다이내믹스의 점근적 안정성을 보장할 뿐 아니라 변형한  $H_\infty$  성능지수의  $\gamma$  한계치를 선형행렬부동식 방법에 의하여 해석적으로 직접 계산한다. 수치 예제를 통하여 제시한 필터 설계 알고리즘의 타당성을 확인하고 성능을 분석하였다. 향후과제로는 대각화 된  $P$ 가 아니라 일반화한  $P$ 에 대한 견실  $H_\infty$  필터 설계방법을 제시하는 것이다.

참 고 문 헌

[1] Y. Theodor, U. Shaked, and C. E. de Souza, "A game theory approach to robust discrete-time  $H_\infty$  estimation," IEEE Trans. Signal Processings, vol. 42, pp. 1486-1495, 1994.

[2] H. Li and M. Fu, "A linear matrix inequality approach to robust  $H_\infty$  filtering," IEEE Trans. Signal Processings, vol. 45, pp. 2338-2350, 1997.

[3] P. Gahinet, "Explicit controllers formulas for LMI-based  $H_\infty$  synthesis," Automatica, vol. 32, pp. 1007-1014, 1996.

[4] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "All controllers for the general  $H_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas," Automatica, vol. 30, pp. 1307-1317, 1994.

[5] J. C. Geromel, J. Bernussou, M. C. de Oliveira, " $H_2$  and  $H_\infty$  robust filtering for discrete-time linear systems," Proc. Conference on Decision and Control, Tamap, FL, USA, pp. 632-637, 1998.

[6] R. M. Palhares and P. L. D. Peres, "Robust  $H_\infty$  filtering design with pole constraints for discrete-time systems: An LMI approach," Proc. American Control Conference, San Diego, CA, USA, pp. 4418-4422, 1999.

[7] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira, " $H_2$  and  $H_\infty$  robust filtering for convex-bounded uncertain systems," Proc. Conference on Decision and Control, Tamap, FL, USA, pp. 146-151, 1998.

[8] S. H. Jin and J. B. Park, "Robust  $H_\infty$  filtering for polytopic uncertain systems via convex optimization," IEE Proc.-Control Theory Appl., vol. 148, pp. 55-59, 2001.

[9] J. Hale and S. M. V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, New York, Springer-Verlag, 1993.

[10] J. C. Geromel, "Optimal linear filtering under parameter uncertainty," IEEE Trans. Signal Processings, vol. 47, pp. 168-175, 1999.

[11] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox, Mathworks, 1995.

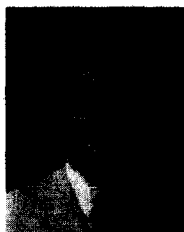
저 자 소 개



金 鍾 海(正會員)

1993년 : 경북대학교 전자공학과 공학사. 1995년 : 공학석사. 1998년 : 공학박사. 1998년 11월~2002년 2월 : 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년 3월~2001년 3월 : 오사카대학 기계공학부

컴퓨터제어기계공학과 객원연구원. 2002년 3월~현재 : 선문대학교 전자정보통신공학부 전임강사. <주관심분야 : 견실(robust)  $H_\infty$  제어, 시간지연시스템 해석 및 제어기 설계, 특이시스템(singular system) 해석 및 제어기 설계, 산업응용제어 및 자동항법제어, 비약성(non-fragile) 및 신뢰성(reliable) 제어 등>



吳 道 昌(正會員)

1991년 : 경북대학교 전자공학과 공학사. 1993년 : 공학석사. 1997년 : 공학박사. 1997년 2월~1997년 8월 : 창원대학교 국책초빙교수. 1997년 8월~현재 : 건양대학교 IT 학부 조교수. <주관심분야 : 견실

$H_\infty$  제어, 모델 및 제어기 차수축소, 시간지연시스템 해석 및 제어기 설계, CDMA 전력제어, 산업응용제어 및 자동항법제어 등>



李 甲 來(正會員)

1987년 : 경북대학교 전자공학과 공학사. 1990년 : 공학석사. 1999년 : 공학박사. 1990년 3월~1995년 4월 : 국방과학연구소 연구원. 1997년 3월~2001년 8월 : 두원공과대학 조교수. 2001년 9월~현재 : 평

택대학교 정보과학부 교수. <주관심분야 : 지능제어 및  $H_2/H_\infty$  제어, 산업네트워크제어 및 필드버스 프로토콜 구현, 임베디드(Embedded)시스템 등>