

論文2002-39SC-5-3

# 컴퓨터연산을 통한 언어형 퍼지 제어 시스템의 새로운 안정도 해석

## (A New Computational Approach for the Stability Analysis of the Linguistic Fuzzy Control Systems)

金 殷 泰 \*

(Eun-Tai Kim)

### 요 약

본 논문에서는 컴퓨터 연산을 통한 언어형 퍼지 제어 시스템의 안정도를 해석하는 새로운 방법을 제안한다. 제안하는 방법은 최근 각광을 받고 있는 선형행렬부등식을 이용한 방법이다. 기존의 수치적 방법과 비교할 때 본 논문에서 제안되는 방식의 특징은 좀더 완화된 방식으로 안정화 문제뿐 아니라 고정점 레귤레이션 문제에도 적용될 수 있는 특징을 가지고 있다. 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 확인한다.

### Abstract

In this paper, a novel computational approach for the stability analysis of the linguistic fuzzy system is proposed. The suggested analysis method is easily implemented by the recently spotlighted convex optimization techniques called Linear Matrix Inequalities (LMI). Compared with the previous works, the new method proposed herein is more relaxed and is applicable to not only the stabilization problem but also to the set-point regulation problem. Finally, the applicability of the suggested methodology is highlighted via computer simulations.

**Keyword** : computational approach, LMI, set-point regulation problem, linguistic fuzzy system

### I. 서 론

인간의 언어와 사고과정을 그대로 구현한 퍼지 논리는 최근 공학이나 과학의 분야에서 강력한 실시간 개발 툴로 각광을 받고 있고 특히 제어분야에서 많은 응용 결과가 보고되고 있다<sup>1, 2)</sup>.

이 같은 응용과 함께 이론분야에서도 연구가 진행되고 있는데 이론 분야에 대한 연구는 주로 안정도 해석으로 집중되고 있다. 지금까지 보고된 퍼지 안정도에 대한 연구는 사용된 퍼지 제어 시스템의 종류에 따라 다음의 몇 가지로 구분될 수 있다.

우선 가장 널리 연구가 진행되는 퍼지 시스템은 Takagi-Sugeno (TS) 퍼지 시스템이다. TS 퍼지 시스템은 후건부가 선형식으로 표현된 퍼지 시스템으로 선형 제어 이론을 이용하여 해석할 수 있다는 특징 때문에 많은 연구가 진행되고 있다. 가장 대표적인 연구로는 Tanaka 등의 연구를 들 수 있다<sup>3, 4)</sup>.

두 번째로는 적응 퍼지 시스템을 들 수 있다. 적응 퍼지 시스템은 기존의 적응 비선형 제어를 대신하는

\* 正會員, 延世大學校 電氣電子工學部

(Yonsei University, School of Electrical and Electronic Engr.)

※ 이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2000-003-E00359)

接受日字:2001年4月25日, 수정완료일:2002年7月26日

방식으로 Wang에 의해 시작되었고<sup>[5]</sup> 최근 Chen등에 의해  $H_\infty$  이론과 결합하여 연구가 널리 진행되고 있다<sup>[6]</sup>. 이외에도 여러 가지 다른 퍼지 시스템에 대한 연구가 진행되어 대표적인 예로 Kawaji 등에 의한 퍼지 슬라이딩 제어기에 대한 연구를 들 수 있다<sup>[7]</sup>.

그러나 아직 Mamdani가 처음 사용했던 형태의 언어형 퍼지 시스템이나 그 변형인 싱글톤 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구는 거의 진행되고 있지 않은 것이 사실이다. 이는 언어형 퍼지 제어가 설계는 용이하지만 인간의 언어로 표현되어 있기 때문에 안정도 해석이 어렵기 때문이다.

본 논문에서는 지금까지의 연구와는 전혀 다른 방식으로 언어형 싱글톤 퍼지 제어 시스템의 안정도를 해석한다. 본 논문의 방식은 컴퓨터 연산에 기반을 둔 방식으로 우선 안정도 해석을 위해 퍼지 시스템을 영역별 어떤 시스템으로 변환한다. 어떤 시스템으로의 변환은 2차 계획법 (Quadratic Programming)을 이용한다. 그후 변형된 어떤 시스템의 안정도는 S과정과 선형행렬부등식 (Linear Matrix Inequality)<sup>[8]</sup>을 이용하여 판정한다. 본 논문의 방식은 최근에 발표된<sup>[9]</sup>의 방식을 발전시킨 것으로 안정화 문제뿐 아니라 고정점 레귤레이션 문제에도 적용될 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같은 II장에서는 언어형 퍼지 시스템을 어떤 변환을 통하여 해석적인 식으로 표현하고 III장에서는 변형된 어떤식을 이용하여 퍼지 제어 시스템의 안정도를 판정하는 방식을 제안한다. IV장에서는 모의 실험을 통하여 타당성을 확인하고 V장에서 결론을 맺는다.

II. 싱글톤 퍼지 시스템과 영역별 어떤 변환

다음의 2-입력 1-출력의 퍼지 제어를 생각한다.

$$R^{nm} : \text{If } e_1 \text{ is } A_1^n \text{ and } e_2 \text{ is } A_2^m, \text{ then } u \text{ is } u^{nm} \quad (n=1, \dots, p \quad \text{이고} \quad m=1, \dots, q). \quad (1)$$

여기서  $e = x - r$ 는 제어오차로  $x$ 는 시스템 출력이고  $r$ 는 원하는 레퍼런스 신호이다. 이때 싱글톤 퍼지화와 추론의 T음을 이용하면 퍼지 추론의 결과는 다음의 식 (2)으로 주어진다.

$$u = Fuz(e) = Fuz(e_1, e_2) =$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{A_1^i(e_1)A_2^j(e_2)}{\sum_r \sum_s A_1^r(e_1)A_2^s(e_2)} \right\} u^{ij} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \Pi^{ij}(e_1, e_2) u^{ij} \quad (2)$$

여기서  $\Pi^{ij}(e_1, e_2)$ 는 퍼지 기저함수이고 전건부 소속함수는 그림 1과 같은 비모순적 삼각형 함수를 이용하도록 한다. 이 때 각 영역은 다음의 식으로 표시된다.

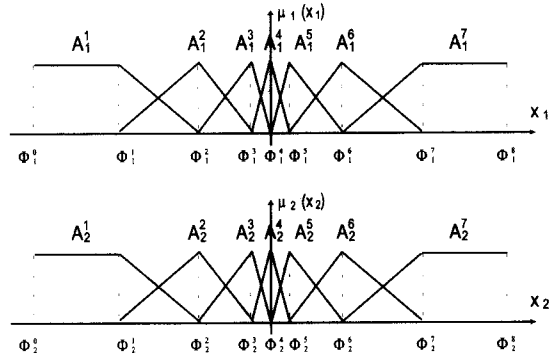


그림 1. 전건부 소속함수  
Fig. 1. Premise membership functions.

$$\Omega^{nm} \equiv \{ e = (e_1, e_2) \mid \phi_1^n \leq e_1 \leq \phi_1^{n+1}, \phi_2^m \leq e_2 \leq \phi_2^{m+1} \} \quad (n=0, \dots, p, m=0, \dots, q) \quad (3)$$

여기서  $\phi_1^n, \phi_2^m$ 의 정의는 그림 1에서 찾을 수 있다. 또 본 논문에서 원점은 제어기의 평형점으로 가정한다.  $\Omega_0$ 는 원점을 포함한 영역의 집합을 나타내는 것으로 하고  $\bar{\Omega}$ 는 원점을 포함하지 않은 영역의 집합으로 한다.

본 논문에서는 임의의 영역  $\Omega^{nm}$  ( $n=0, \dots, p, m=0, \dots, q$ )에 대하여 퍼지 제어를 다음의 식으로 표현한다.

$$Fuz(e_1, e_2) = C_{12}^{nm} e_1 e_2 + C_1^{nm} e_1 + C_2^{nm} e_2 + C_0^{nm} \quad (4)$$

여기서  $C_{12}^{nm}, C_1^{nm}, C_2^{nm}, C_0^{nm}$ 는 [9]에서 주어진 상수이다. 이제 다음과 같이 퍼지 제어를 두 개의 어떤 시스템으로 유계한다.

$$F^{nm} e + f_0^{nm} \equiv f_1^{nm} e_1 + f_2^{nm} e_2 + f_0^{nm} \leq Fuz(e_1, e_2) = C_{12}^{nm} e_1 e_2 + C_1^{nm} e_1 + C_2^{nm} e_2 + C_0^{nm} \quad (5)$$

$$\leq \overline{F}^{nm} e + \overline{f}_0^{nm} \equiv \overline{f}_1^{nm} e_1 + \overline{f}_2^{nm} e_2 + \overline{f}_0^{nm}$$

여기서  $e \equiv [e_1 \ e_2]^T$ ,  $F^{nm} \equiv [f_1^{nm} \ f_2^{nm}]$ ,  $\overline{F}^{nm} \equiv [\overline{f}_1^{nm} \ \overline{f}_2^{nm}]$ 이다. 이제  $F^{nm}$ ,  $\overline{F}^{nm}$ ,  $f_0^{nm}$ ,  $\overline{f}_0^{nm}$ 을 계산하는 문제는 다음의  $\overline{\Sigma}^{nm}$ ,  $\underline{\Sigma}^{nm}$ 을 구하는 문제와 같다.

$$\overline{\Sigma}^{nm} = (\overline{\sigma}_1^{nm} \ \overline{\sigma}_2^{nm} \ \overline{\sigma}_c^{nm})^T \quad (6-1)$$

$$\underline{\Sigma}^{nm} = (\underline{\sigma}_1^{nm} \ \underline{\sigma}_2^{nm} \ \underline{\sigma}_c^{nm})^T \quad (6-2)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_1^{nm} e_1 + \underline{\sigma}_2^{nm} e_2 + \underline{\sigma}_c^{nm} &\leq C_{12}^{nm} e_1 e_2 \\ &\leq \overline{\sigma}_1^{nm} e_1 + \overline{\sigma}_2^{nm} e_2 + \overline{\sigma}_c^{nm} \end{aligned} \quad (6-3)$$

for  $\forall (e_1, e_2) \in \Omega^{nm}$ .

이는  $F^{nm}$ ,  $\overline{F}^{nm}$ ,  $f_0^{nm}$ ,  $\overline{f}_0^{nm}$ 이 주어지면  $\overline{\Sigma}^{nm}$ 과  $\underline{\Sigma}^{nm}$ 을 다음과 같이 쉽게 계산할 수 있기 때문이다.

$$\begin{cases} \overline{f}_1^{nm} = C_1^{nm} + \overline{\sigma}_1^{nm}, & \overline{f}_2^{nm} = C_2^{nm} + \overline{\sigma}_2^{nm}, & \overline{f}_0^{nm} = C_0^{nm} + \overline{\sigma}_c^{nm} \\ \underline{f}_1^{nm} = C_1^{nm} + \underline{\sigma}_1^{nm}, & \underline{f}_2^{nm} = C_2^{nm} + \underline{\sigma}_2^{nm}, & \underline{f}_0^{nm} = C_0^{nm} + \underline{\sigma}_c^{nm} \end{cases} \quad (7)$$

이제 비보수적 안정도 해석을 위해 (5)의 조건하에 최적의  $\overline{\Sigma}^{nm}$ 과  $\underline{\Sigma}^{nm}$ 를 구해야 한다. 즉  $\overline{\Sigma}^{nm}$ 의 경우 (5)의 조건하에서

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}_{opt}^{nm} &= \arg \min \overline{F}^{nm}(\overline{\Sigma}^{nm}) \\ &= \arg \min \frac{1}{2} \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} \{ \overline{F}^{nm}(e_1, e_2) \}^2 de_1 de_2 \\ &= \arg \min \frac{1}{2} \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} \left\{ (\overline{\sigma}_1^{nm} e_1 + \overline{\sigma}_2^{nm} e_2 \right. \\ &\quad \left. + \overline{\sigma}_c^{nm}) - C_{12}^{nm} e_1 e_2 \right\}^2 de_1 de_2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } \overline{F}^{nm}(\overline{\Sigma}^{nm}) &= \overline{F}^{nm}(\overline{\sigma}_1^{nm}, \overline{\sigma}_2^{nm}, \overline{\sigma}_c^{nm}) \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} \{ \overline{F}^{nm}(e_1, e_2) \}^2 de_1 de_2. \end{aligned}$$

이 목적함수는 다음의 2차 함수로 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{F}^{nm}(\overline{\Sigma}^{nm}) &\equiv \frac{1}{2} \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} \left\{ (\overline{\sigma}_1^{nm} e_1 + \overline{\sigma}_2^{nm} e_2 \right. \\ &\quad \left. + \overline{\sigma}_c^{nm}) - C_{12}^{nm} e_1 e_2 \right\}^2 de_1 de_2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \overline{a}_{11}^{nm} \cdot (\overline{\sigma}_1^{nm})^2 + \overline{a}_{22}^{nm} \cdot (\overline{\sigma}_2^{nm})^2 + \overline{a}_{cc}^{nm} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot (\overline{\sigma}_c^{nm})^2 + 2 \overline{a}_{12}^{nm} \overline{\sigma}_1^{nm} \overline{\sigma}_2^{nm} + 2 \overline{a}_{1c}^{nm} \overline{\sigma}_1^{nm} \overline{\sigma}_c^{nm} \\ &+ 2 \overline{a}_{2c}^{nm} \overline{\sigma}_2^{nm} \overline{\sigma}_c^{nm} + 2 \overline{a}_1^{nm} \overline{\sigma}_1^{nm} + 2 \overline{a}_2^{nm} \overline{\sigma}_2^{nm} \\ &\left. + 2 \overline{a}_c^{nm} \overline{\sigma}_c^{nm} + 2 \overline{a}_0^{nm} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\overline{\Sigma}^{nm})^T \overline{H}^{nm} \overline{\Sigma}^{nm} + (\overline{C}^{nm})^T \overline{\Sigma}^{nm} + \overline{a}_0^{nm} \quad (9) \end{aligned}$$

여기서

$$\overline{\Sigma}^{nm} = \begin{pmatrix} \overline{\sigma}_1^{nm} \\ \overline{\sigma}_2^{nm} \\ \overline{\sigma}_c^{nm} \end{pmatrix}, \quad \overline{H}^{nm} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11}^{nm} & \overline{a}_{12}^{nm} & \overline{a}_{1c}^{nm} \\ \overline{a}_{12}^{nm} & \overline{a}_{22}^{nm} & \overline{a}_{2c}^{nm} \\ \overline{a}_{1c}^{nm} & \overline{a}_{2c}^{nm} & \overline{a}_{cc}^{nm} \end{pmatrix}, \quad \overline{C}^{nm} = \begin{pmatrix} \overline{a}_1^{nm} \\ \overline{a}_2^{nm} \\ \overline{a}_c^{nm} \end{pmatrix}$$

$$\overline{a}_{11}^{nm} = \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_1^2 de_1 de_2$$

$$= \frac{1}{3} \{ (\overline{\sigma}_1^{nm})^3 - (\underline{\sigma}_1^{nm})^3 \} \{ \overline{\sigma}_2^{nm} - \underline{\sigma}_2^{nm} \}$$

$$\overline{a}_{22}^{nm} = \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_2^2 de_1 de_2$$

$$= \frac{1}{3} \{ \overline{\sigma}_2^{nm} - \underline{\sigma}_2^{nm} \} \{ (\overline{\sigma}_1^{nm})^3 - (\underline{\sigma}_1^{nm})^3 \}$$

$$\overline{a}_{cc}^{nm} = \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} de_1 de_2$$

$$= \{ \overline{\sigma}_1^{nm} - \underline{\sigma}_1^{nm} \} \{ \overline{\sigma}_2^{nm} - \underline{\sigma}_2^{nm} \}$$

$$\overline{a}_{12}^{nm} = \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_1 e_2 de_1 de_2$$

$$= \frac{1}{4} \{ (\overline{\sigma}_1^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_1^{nm})^2 \} \{ (\overline{\sigma}_2^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_2^{nm})^2 \}$$

$$\overline{a}_{1c}^{nm} = \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_1 de_1 de_2$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\overline{\sigma}_1^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_1^{nm})^2 \} \{ \overline{\sigma}_2^{nm} - \underline{\sigma}_2^{nm} \}$$

$$\overline{a}_{2c}^{nm} = \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_2 de_1 de_2$$

$$= \frac{1}{2} \{ \overline{\sigma}_1^{nm} - \underline{\sigma}_1^{nm} \} \{ (\overline{\sigma}_2^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_2^{nm})^2 \}$$

$$\overline{a}_1^{nm} = -C_{12}^{nm} \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_1^2 de_1 de_2$$

$$= -\frac{1}{6} C_{12}^{nm} \{ (\overline{\sigma}_1^{nm})^3 - (\underline{\sigma}_1^{nm})^3 \} \{ (\overline{\sigma}_2^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_2^{nm})^2 \}$$

$$\overline{a}_2^{nm} = -C_{12}^{nm} \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_1 e_2^2 de_1 de_2$$

$$= -\frac{1}{6} C_{12}^{nm} \{ (\overline{\sigma}_1^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_1^{nm})^2 \} \{ (\overline{\sigma}_2^{nm})^3 - (\underline{\sigma}_2^{nm})^3 \}$$

$$\overline{a}_c^{nm} = -C_{12}^{nm} \int_{e_2=\underline{\sigma}_2^{nm}}^{\overline{\sigma}_2^{nm}} \int_{e_1=\underline{\sigma}_1^{nm}}^{\overline{\sigma}_1^{nm}} e_1 e_2 de_1 de_2$$

$$= -\frac{1}{4} C_{12}^{nm} \{ (\overline{\sigma}_1^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_1^{nm})^2 \} \{ (\overline{\sigma}_2^{nm})^2 - (\underline{\sigma}_2^{nm})^2 \}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_0^{nm} &= \int_{e_2 = \phi_2^{n+1}}^{\phi_2^{n+1}} \int_{e_1 = \phi_1^n}^{\phi_1^{n+1}} \frac{1}{2} (C_{12}^{nm})^2 e_1^2 e_2^2 de_1 de_2 \\ &= \frac{1}{18} (C_{12}^{nm})^2 \{(\phi_1^{n+1})^3 - (\phi_1^n)^3\} \{(\phi_2^{n+1})^3 - (\phi_2^n)^3\} \end{aligned}$$

또 (5)의 상한조건을 다음의 행렬 부등식으로 표현한다.

$$\bar{A}^{nm} \bar{\Sigma}^{nm} \leq \bar{b}^{nm} \tag{10}$$

여기서

$$\bar{A}^{nm} = \begin{pmatrix} -\phi_1^n & -\phi_2^n & -1 \\ -\phi_1^n & -\phi_2^{n+1} & -1 \\ -\phi_1^{n+1} & -\phi_2^n & -1 \\ -\phi_1^{n+1} & -\phi_2^{n+1} & -1 \end{pmatrix}, \bar{\Sigma}^{nm} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_c \end{pmatrix}, \bar{b}^{nm} = \begin{pmatrix} -C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^n \\ -C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^{n+1} \\ -C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^n \\ -C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

따라서 퍼지 시스템 (4)의 어핀변환은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \text{(QP 1)} \quad \bar{\Sigma}_{opt}^{nm} &= \arg \min \frac{1}{2} (\bar{\Sigma}^{nm})^T \\ & \quad \bar{H}^{nm} \bar{\Sigma}^{nm} + (\bar{C}^{nm})^T \bar{\Sigma}^{nm} \end{aligned} \tag{11-1}$$

$$\text{subject to } \bar{A}^{nm} \bar{\Sigma}^{nm} \leq \bar{b}^{nm} \tag{11-2}$$

또 하한에 대해서도 같은 방법을 쓰면

$$\begin{aligned} \text{(QP 2)} \quad \underline{\Sigma}_{opt}^{nm} &= \arg \min \frac{1}{2} (\underline{\Sigma}^{nm})^T \underline{H}^{nm} \underline{\Sigma}^{nm} \\ & \quad + (\underline{C}^{nm})^T \underline{\Sigma}^{nm} \end{aligned} \tag{12-1}$$

$$\text{subject to } \underline{A}^{nm} \underline{\Sigma}^{nm} \leq \underline{b}^{nm} \tag{12-2}$$

**주의 1.**

위의 영역별 변환에서 원점을 포함하여 있는 영역  $\Omega^{nm} \in \Omega_0$ 에서는 퍼지 제어기 (5)가 어핀 시스템이 아닌 선형시스템으로 유계되어야 한다. ■

**III. 선형 행렬 부등식을 이용한 퍼지 시스템의 안정도 해석**

본 절에서는 언어형 싱글톤 퍼지 시스템의 안정도를 해석한다. 우선 퍼지 제어기는 식(5)의 어핀시스템으로 유계한다.

$$\begin{aligned} \underline{F}^{nm} e + \underline{f}_0^{nm} \leq \text{Fuz}(e_1, e_2) \leq \bar{F}^{nm} e + \bar{f}_0^{nm} \end{aligned} \tag{13}$$

for  $e \in \Omega^{nm} (n=0, \dots, p, m=0, \dots, q)$ .

이는 영역  $\Omega^{nm}$ 에서 위의 퍼지 시스템을 다음의 다각어핀시스템 (polytopic affine system)으로 볼 수 있음을 나타낸다.

$$u = \text{Fuz}(e) = \text{Co} \{ \underline{F}^{nm} e + \underline{f}_0^{nm}, \bar{F}^{nm} e + \bar{f}_0^{nm} \} \tag{14}$$

여기서  $\text{Co}(\cdot)$ 는 컨벡스 쉘 (convex hull)을 나타낸다. 이제 제어 플랜트는 다음의 TS 퍼지 시스템으로 표현되는 비선형 시스템으로 가정한다.

$$\begin{aligned} R_i: \quad & \text{If } e_1 \text{ is } M_{i1} \text{ and } e_2 \text{ is } M_{i2}, \\ & \text{then } \dot{e} = A_i e + B_i u \end{aligned} \tag{15}$$

여기서  $i=1, \dots, r$ 고  $r$ 은 퍼지 규칙의 수이다. 위 플랜트의 입출력 식은 식 (16)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \sum_{i=1}^r h_i(e) \{ A_i e + B_i u \} \\ &= \text{Co}_{i=1 \dots r} (A_i e + B_i u) \end{aligned} \tag{16}$$

여기서  $w_i(e) = M_{i1}(e_1)M_{i2}(e_2)$ ,  $h_i(e) = \frac{w_i(e)}{\sum_{i=1}^r w_i(e)}$ ,

$h_i(e) \geq 0$ . 편의상  $\Delta^{nm}$ 를 다음과 같이 영역  $\Omega^{nm}$ 에서 활성화되는 퍼지 규칙의 집합으로 한다.

$$\Delta^{nm} \equiv \{ i \mid h_i(e) \neq 0 \text{ for } \exists e \in \Omega^{nm} \}$$

이 경우 퍼지 제어기와 플랜트 (18)의 페루프 시스템은 다음의 다각시스템으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \text{Co} \{ (A_i + B_i \underline{F}^{nm}) e + B_i \underline{f}_0^{nm}, \\ & \quad (A_i + B_i \bar{F}^{nm}) e + B_i \bar{f}_0^{nm} \} \\ &= \text{Co} \{ \underline{E}_i^{nm} e + B_i \underline{f}_0^{nm}, \bar{E}_i^{nm} e + B_i \bar{f}_0^{nm} \} \\ &= \text{Co} \{ \underline{E}_i^{nm} e + \underline{c}_i^{nm}, \bar{E}_i^{nm} e + \bar{c}_i^{nm} \} \text{ for } e \in \Omega^{nm}, \end{aligned} \tag{17}$$

여기서  $i \in \Delta^{nm}$ ,  $\underline{E}_i^{nm} \equiv (A_i + B_i \underline{F}^{nm})$ ,  $\bar{E}_i^{nm} \equiv (A_i + B_i \bar{F}^{nm})$ ,  $\underline{c}_i^{nm} \equiv B_i \underline{f}_0^{nm}$  and  $\bar{c}_i^{nm} \equiv B_i \bar{f}_0^{nm}$ .

또 2차 안정조건을 선형행렬부등식의 형태로 표시하기 위해 영역  $\Omega^{nm}$ 를 이차부등식의 형태로 표현한다. 즉  $\Omega^{nm}$  이 다음과 같이 주어지면

$$\phi_1^n \leq e_1 \leq \phi_1^{n+1} \quad (18-1)$$

$$\phi_2^n \leq e_2 \leq \phi_2^{n+1} \quad (18-2)$$

이는 다음과 같은 이차부등식으로 바꿀 수 있다.

$$e^T Q_1^{nm} e + 2e^T R_1^{nm} + s_1^{nm} \leq 0 \quad (19-1)$$

$$e^T Q_2^{nm} e + 2e^T R_2^{nm} + s_2^{nm} \leq 0 \quad (19-2)$$

여기서

$$Q_1^{nm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1^{nm} = \left( -\frac{1}{2}(\phi_1^n + \phi_1^{n+1}) \quad 0 \right)^T,$$

$$s_1^{nm} = \phi_1^n \phi_1^{n+1},$$

$$Q_2^{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2^{nm} = \left( 0 \quad -\frac{1}{2}(\phi_2^n + \phi_2^{n+1}) \right)^T,$$

$$s_2^{nm} = \phi_2^n \phi_2^{n+1}.$$

정리 1.

영역  $\Omega^{nm} \in \bar{\Omega}$ 에서 선형행렬부등식 (20)을 만족하는 공통 양한정 행렬  $P$ 와 양수  $\bar{\tau}_i^{nm}$ ,  $\underline{\tau}_i^{nm}$ 가 존재하면 폐루프 시스템 (17)은 주어진 영역에서 에너지 함수  $V(e) = e^T P e$ 의 의미에서 2차적으로 안정하다.

$\Omega^{nm} \in \bar{\Omega}$  영역에서

$$\bar{\Xi}_{ai}^{nm T} P_a + P_a \bar{\Xi}_{ai}^{nm} - \sum_{i=1}^2 \bar{\tau}_i^{nm} Q_{ai}^{nm} < 0 \quad (20-1)$$

$$\Xi_{ai}^{nm T} P_a + P_a \Xi_{ai}^{nm} - \sum_{i=1}^2 \underline{\tau}_i^{nm} Q_{ai}^{nm} < 0 \quad (20-2)$$

$\Omega^{nm} \in \Omega_0$  영역에서

$$\bar{\Xi}_i^{nm T} P + P \bar{\Xi}_i^{nm} < 0 \quad (20-3)$$

$$\Xi_i^{nm T} P + P \Xi_i^{nm} < 0 \quad (20-4)$$

여기서  $\bar{\Xi}_{ai}^{nm} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\Xi}_i^{nm} & \bar{c}_i^{nm} \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Xi_{ai}^{nm} \equiv \begin{pmatrix} \Xi_i^{nm} & c_i^{nm} \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$P_a \equiv \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \quad (i=1,2).$$

(증명)

$V(e) = e^T P e$ 을 리아프노프 후보함수로 하여 영역  $\Omega^{nm}$ 에서 그 시간 도함수를 구하면

$$\frac{dV}{dt} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}$$

$$= \text{Co} \{ (\bar{\Xi}_i^{nm} e + \bar{c}_i^{nm})^T P e + e^T P (\bar{\Xi}_i^{nm} e + \bar{c}_i^{nm}) \\ (\Xi_i^{nm} e + c_i^{nm})^T P e + e^T P (\Xi_i^{nm} e + c_i^{nm}) \}.$$

즉  $\Omega^{nm} \in \bar{\Omega}$ 에서,

$$e^T (\bar{\Xi}_i^{nm T} P + P \bar{\Xi}_i^{nm}) e + \bar{c}_i^{nm T} P e + e^T P \bar{c}_i^{nm} < 0 \quad (21-1)$$

$$e^T (\Xi_i^{nm T} P + P \Xi_i^{nm}) e + c_i^{nm T} P e + e^T P c_i^{nm} < 0 \quad (21-2)$$

$\Omega^{nm} \in \Omega_0$ 에서

$$e^T (\bar{\Xi}_i^{nm T} P + P \bar{\Xi}_i^{nm}) e < 0 \quad (21-3)$$

$$e^T (\Xi_i^{nm T} P + P \Xi_i^{nm}) e < 0. \quad (21-4)$$

이제 (20)이 만족하면 S과정을 이용하여 (21)을 얻을 수 있다. ■

본 논문에서는 퍼지 시스템의 안정조건을 완화하기 위하여 구분적 2차 안정조건을 고려한다. 기본 아이디어는 안정도 판정을 위해 하나의 공통 2차 리아프노프 함수를 사용하는 것이 아니라 각 영역별로 다른 2차 리아프노프 함수를 허용하는 것이다. 이때 각 영역별로 다른 2차 리아프노프 함수는 전체적으로 연속으로 설계하여 리아프노프의 정리를 위배하지 않도록 한다. 각 영역  $\Omega^{nm}$ 의 연결부에서 연속인 리아프노프함수를 구하기 위해 다음과 같은 새로운 행렬  $F_a^{nm}$ 를 정의한다. 이 정의는<sup>[10]</sup>의 정의와 일치한다.

$$F_a^{nm} e_a = F_a^{n'm'} e_a, \quad e \in \Omega^{nm} \cap \Omega^{n'm'} \quad (22)$$

또 구분적 리아프노프 함수를 다음과 같이 정한다.

$$V(e) = \begin{cases} e^T P^{nm} e, & \text{for } \Omega^{nm} \in \Omega_0 \\ e_a^T P_a^{nm} e_a, & \text{for } \Omega^{nm} \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (23-1)$$

$$P^{nm} = F^{nm T} X F^{nm} \quad (23-2)$$

$$P_a^{nm} = F_a^{nm T} X F_a^{nm} \quad (23-3)$$

여기서  $\Omega^{nm}$ 과  $\Omega^{n'm'}$ 는 이웃한 영역을 나타내는 것으로 한다.  $e_a^T \equiv (e^T \ 1)$ 이며  $X$ 는 임의의 대칭행렬로 이 행렬에 따라 리아프노프함수가 결정된다. 또

$F_a^{nm} = (F_a^{nm} \ f_a^{nm})$  는 식 (22)를 만족하여 리아프노프 함수 (23)은 각 구간사이에서도 연속이고  $f_a^{nm}$  는  $F_a^{nm}$  의 마지막 열이다. 본 논문에서는 일반성을 더하기 위하여 가능한 구분적 2차 리아프노프 함수를 다음과 같이 파라미터화한다.

$$V(e) = \begin{cases} e^T P_a^{nm} e, & \text{for } \Omega_a^{nm} \in \Omega_0 \\ e_a^T P_a^{nm} e_a, & \text{for } \Omega_a^{nm} \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (24-1)$$

$$P_a^{nm} = P + F_a^{nm T} X F_a^{nm} \quad (24-2)$$

$$P_a^{nm} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} + F_a^{nm T} X F_a^{nm} \quad (24-3)$$

**정리 2.**

영역  $\Omega_a^{nm} \in \bar{\Omega}$ 에서 선형행렬부등식 (25)을 만족하는 공통 양한정 행렬  $P$ 와 양수  $\bar{\tau}_i^{nm}$ ,  $\underline{\tau}_i^{nm}$ ,  $\gamma_i^{nm}$ 가 존재하면 페루프 시스템 (17)는 점근적으로 (구분 2차적으로) 안정하다.

영역  $\Omega_a^{nm} \in \bar{\Omega}$ 에서

$$P_a^{nm} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} + F_a^{nm T} X F_a^{nm} \quad (25-1)$$

$$P_a^{nm} + \sum_{i=1}^2 \gamma_i^{nm} Q_{ai}^{nm} > 0 \quad (25-2)$$

$$\bar{E}_{ai}^{nm T} P_a^{nm} + P_a^{nm} \bar{E}_{ai}^{nm} - \sum_{i=1}^2 \bar{\tau}_i^{nm} Q_{ai}^{nm} < 0 \quad (25-3)$$

$$E_{ai}^{nm T} P_a^{nm} + P_a^{nm} E_{ai}^{nm} - \sum_{i=1}^2 \underline{\tau}_i^{nm} Q_{ai}^{nm} < 0 \quad (25-4)$$

영역  $\Omega_a^{nm} \in \Omega_0$ 에서

$$P_a^{nm} = P + F_a^{nm T} X F_a^{nm} \quad (25-5)$$

$$P_a^{nm} > 0 \quad (25-6)$$

$$\bar{E}_i^{nm T} P_a^{nm} + P_a^{nm} \bar{E}_i^{nm} < 0 \quad (25-7)$$

$$E_i^{nm T} P_a^{nm} + P_a^{nm} E_i^{nm} < 0 \quad (25-8)$$

여기서  $\bar{E}_{ai}^{nm} \equiv \begin{pmatrix} \bar{E}_i^{nm} & \bar{c}_i^{nm} \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{ai}^{nm} \equiv \begin{pmatrix} E_i^{nm} & c_i^{nm} \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$P_a \equiv \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \quad Q_{ai}^{nm} = \begin{pmatrix} Q_i^{nm} & R_i^{nm} \\ R_i^{nm T} & s_i^{nm} \end{pmatrix} \quad (i=1,2).$$

**(증명)**

정의에 의해 식 (24)의 리아프노프 후보함수는 연속이고 구분적으로 미분가능하며, 양한정이어서 다음을 만족하는 양수  $\alpha > 0$ 와  $\beta > 0$ 가 존재한다.

$$\alpha \|e(t)\|^2 \leq V(t) \leq \beta \|e(t)\|^2. \quad (26)$$

$V(e)$ 의 시간도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_a^T P_a^{nm} e_a + e_a^T P_a^{nm} \dot{e}_a + e_a^T \dot{P}_a^{nm} e_a \\ &= Co \{ (\bar{E}_i^{nm} e + \bar{c}_i^{nm})^T P_a^{nm} e + e^T P_a^{nm} (\bar{E}_i^{nm} e + \bar{c}_i^{nm}) \\ &\quad (E_i^{nm} e + c_i^{nm})^T P_a^{nm} e + e^T P_a^{nm} (E_i^{nm} e + c_i^{nm}) \}. \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

정리1에 의해

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{a.e.}$$

따라서 페루프 퍼지 시스템 (17)은 안정하다. ■

**IV. 컴퓨터 모의실험**

본 절에서는 컴퓨터 모의실험을 통하여 제안한 방식의 타당성을 확인한다. 제어 대상은 Electrocraft사의 E530 모터이고 그 특성 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{f_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (f_b f_i + R_a B_m) s} \quad (27)$$

$\theta$ (로우터의 회전량)

$e_a$ (아마추어 전압)

$f_i$ (토크 상수) = 10.02 oz-in./A

$f_b$ (역기전력 상수) = 7.41V/1000 rpm = 0.00741 V/rad/s

$R_a$ (아마추어 저항) = 2.64  $\Omega$

$L_a$ (아마추어 인덕턴스) = 3.39 mH

$B_m$ (비스크스 마찰계수) = 0.1 oz-in./1000rpm = 9.55  $\times 10^{-4}$  oz-in./rad/s

$J_m$ (로우터 관성) = 0.0038 oz-in.-s<sup>2</sup>

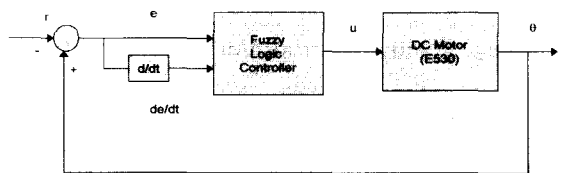


그림 2. 퍼지 제어기로 제어하는 직류모터  
Fig. 2. The DC motor controlled by the FLC.

편의상 제어대상은 선형시스템으로 하였다. 이는 TS 퍼지 시스템에서 퍼지 규칙이 1개인 경우로 생각할 수

있다. 퍼지 제어기는 위치오차와 그 시간 변화율을 입력으로 사용하여 설계하며 그림 2와 같이 페루프를 형성한다.

우선 인간의 사고 방식에 의해 퍼지 제어를 설계한다. 설계한 퍼지 제어기는 표 1과 같고 그 계수는 그림 3, 표 2, 3과 같다. 여기서 제어 오차는  $e = \theta - r$ 로 정의되며  $r$ 은 원하는 값이다.

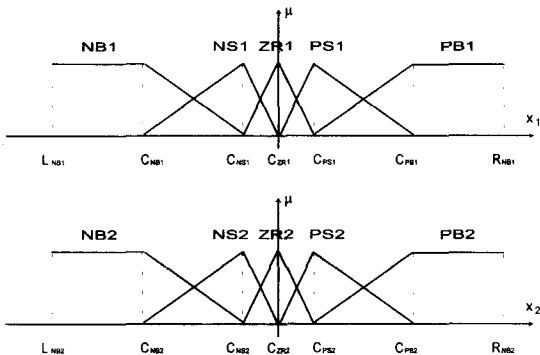


그림 3. 전진부 소속 함수

Fig. 3. The premise membership functions.

표 1. 퍼지제어기의 퍼지관계

Table 1. THE RULE RELATION OF THE FLC.

$e$	$NBE$	$NSE$	$ZRE$	$PSE$	$PBE$
$\dot{e}$					
$PBDE$	$U_{ZR}$				
$PSDE$	$U_{PS}$	$U_{ZR}$			
$ZRDE$	$U_{PM}$	$U_{PS}$	$U_{ZR}$		
$NSDE$	$U_{PD}$	$U_{PB}$	$U_{PS}$	$U_{ZR}$	
$NBDE$	$U_{PVB}$	$U_{PB}$	$U_{PM}$	$U_{PS}$	$U_{ZR}$

표 2. 퍼지제어기의 전진부 파라미터

Table 2. PREMISE PARAMETERS OF THE FLC ( $e$  (rad),  $\dot{e}$ (rad/sec)).

$e$	$L_{NBE}$	$C_{NBE}$	$C_{NSE}$	$C_{ZRE}$	$C_{PSE}$	$C_{PBE}$	$R_{PBE}$
	-15	-5	-2.5	0	2.5	5	15
$\dot{e}$	$L_{NSDE}$	$C_{NSDE}$	$C_{NSDE}$	$C_{ZRDE}$	$C_{PSDE}$	$C_{PBDE}$	$R_{PBDE}$
	-80	-40	-20	0	20	40	80

표 3. 퍼지제어기 후진부 파라미터

Table 3. CONSEQUENT PARAMETERS OF THE FLC ( $u$  (V)).

	$U_{NBE}$	$U_{NSE}$	$U_{ZRE}$	$U_{PSE}$	$U_{PBE}$	$U_{NSDE}$	$U_{ZRDE}$	$U_{PSDE}$	$U_{PBDE}$
$u$	-9	-5	-2	-1	0	1	2	5	9

전체 시스템의 안정도를 확인하기 위하여 식(27)의 E530모터를 다음의 식 (28)의 상태공간으로 표현한다.

$$\frac{de}{dt} = Ae + Bu \tag{28}$$

$$e = [e_1, e_2, e_3]^T = [e, \dot{e}, \ddot{e}]^T, u = e_a$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{(f_b f_i + R_a B_m)}{L_a J_m} & -\frac{(R_a J_m + B_m L_a)}{L_a J_m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_i}{L_a J_m} \end{pmatrix}$$

표 1~3의 파라미터를 2장의 표현법을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

- 퍼지 언어 변수 -

$$A_1^1 = NBE, A_1^2 = NSE, A_1^3 = ZRE,$$

$$A_1^4 = PSE, A_1^5 = PBE$$

$$A_2^1 = NBDE, A_2^2 = NSDE, A_2^3 = ZRDE,$$

$$A_2^4 = PSDE, A_2^5 = PBDE$$

- 전진부 파라미터 -

$$\Phi_1^0 = L_{NBE}, \Phi_1^1 = C_{NBE}, \Phi_1^2 = C_{NSE},$$

$$\Phi_1^3 = C_{ZRE}, \Phi_1^4 = C_{PSE}, \Phi_1^5 = C_{PBE}, \Phi_1^6 = R_{PBE}$$

$$\Phi_2^0 = L_{NBDE}, \Phi_2^1 = C_{NBDE}, \Phi_2^2 = C_{NSDE},$$

$$\Phi_2^3 = C_{ZRDE}, \Phi_2^4 = C_{PSDE}, \Phi_2^5 = C_{PBDE}, \Phi_2^6 = R_{NBDE}$$

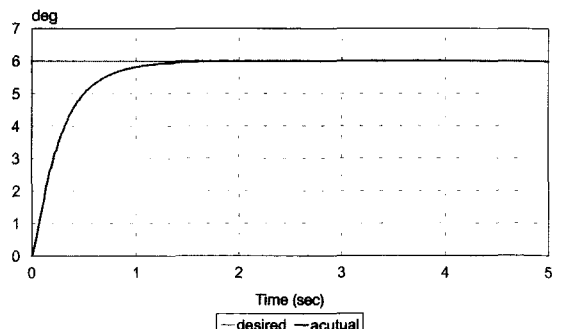


그림 4. 기준 신호  $r(t)=6$ 에 대한 모터 응답

Fig. 4. Response of the motor system for the reference  $r(t)=6$ .

본 논문에서 제안한 방식에 의해 페루프 퍼지 제어 시스템의 안정도를 판정한다. 우선 퍼지 제어를 영역 별로 어떤 시스템으로 유계하고 정리 2에 의해 안정도를 판정한다. Matlab LMI Toolbox를 이용하여 공통의  $P$ 와  $X$  행렬을 찾을 수 있고 따라서 전체 페루프 시스템은 점근적으로 안정하다. 그림 4는  $r(t)=6$  (rad)에 대한 설계된 퍼지 제어가 안정한 성능을 보이는 것을 나타낸다.

### V. 결론

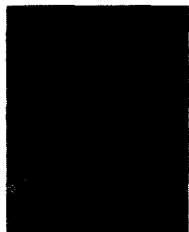
본 논문에서는 언어형 퍼지 제어 시스템의 안정도를 컴퓨터 연산을 통하여 분석하는 새로운 방식을 제안하였다. 본 논문의 방식은 기존의 방식을 완화된 방식으로 기존의 논문과 비교할 때 본 논문에서 제안되는 방식의 특징은 좀더 완화된 방식으로 안정화 문제뿐 아니라 고정점 레귤레이션 문제에도 적용될 수 있는 특징을 가지고 있다. 끝으로 본 논문에 제안한 방식을 컴퓨터 모의 실험을 통하여 그 타당성을 확인하였다.

### 참고 문헌

[1] R. R. Yager and D. P. Filev, Essentials of Fuzzy Modeling and Control, New York : John Wiley & Sons, Inc., 1994.  
 [2] D. Driankov, H. Hellendoom, and M. Reinfrank, An Introduction to Fuzzy Control, Springer-Verlag : Berlin, 1993.  
 [3] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis

and design of fuzzy control systems," Fuzzy Sets and Systems, vol. 45, 136-156, 1992.  
 [4] K. Tanaka, A Theory of Advanced Fuzzy Control, Japan : Kyoritsu Pub, 1994. (in Japanese)  
 [5] L. -X. Wang, A Course in Fuzzy Systems and Control, NJ : Prentice-Hall, 1997.  
 [6] B.-S. Chen, C.-H. Lee and Y.-C. Chang, " $H_\infty$  tracking design of uncertain nonlinear SISO systems : adaptive fuzzy approach," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 4, no. 1, pp 32-43, Feb., 1996.  
 [7] S. Kawaji and N. Matsunaga, "Fuzzy control of VSS type and its robustness," in Proc. of IFSA World Congress, Brussels, Belgium, pp. 81-84, 1991.  
 [8] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM : Philadelphia, 1994.  
 [9] E. Kim, H. Lee and M. Park, "Fuzzy control of a direct current motor system with the guaranteed stability," in Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems (FUZZ/IEEE 99), pp. 1734-1737, Seoul, Korea, 1999.  
 [10] M. Johansson, A. Rantzer and K. -E. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 7, No. 6, pp 713-722, Dec, 1999.

### 저 자 소 개



金 殷 泰(正會員)

1992년 2월 : 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사, 전체수석). 1994년 2월 : 연세대학교 전자공학과 석사과정 졸업(공학석사). 1999년 2월 : 연세대학교 전자공학과 박사과정 졸업(공학박사). 1999년 3월~

2002년 2월 : 국립한경대학교 제어계측공학과 조교수.  
 2002년 3월~현재 : 연세대학교 전기전자공학부 조교수.  
 1998년~현재 : IEEE TFS, IEEE SMC, IEEE CAS, FSS등에서 심의위원으로 활동중. <주관심분야 : 소프트웨어, 로보틱스와 메카트로닉스>