

論文2002-39SC-4-1

루프형성기법을 이용한 최적 강인 PID 제어기 동조 (Robust Optimal PID Cotroller Tuning Using Loop-Shaping Method)

金 占 坤 * , 徐 丙 高 *

(Jeom Gon Kim and Byung Shul Suh)

요 약

본 논문에서는 2차 시스템의 안정도-강인성과 성능-강인성을 동시에 만족시키기 위해 루프형성절차기법을 사용하여 가중치 요소 Q와 R을 선정하는 최적 강인 LQ-PID 레귤레이터 동조 방법을 제안한다.

Abstract

This paper presents a new loop shaping procedure for tuning the robust optimal LQ-PID regulators by selecting the appropriate weighting factors Q and R in order to satisfy both the stability-robustness and the performance-robustness.

Keyword : LQR, Weighting Selection, PID Tuning, Loop-Shaping, Robustness

I. 서 론

제어기술자들에게 주요 관심사 중의 하나는 강인한 안정도와 좋은 성능을 유지하면서 설계사양을 만족시키는 것이다. 강인성 문제에 대해서는 LQG-LTR^[1]과 H^∞ ^[2-3]과 같은 강인제어기 설계 방법들이 발전되어왔다. 이 들은 견고한 수학적인 최적화 이론에 기초한 제어기설계 방법일지라도 현실적인 활용에는 좀더 연구가 필요하기 때문에 산업현장에서는 PID 제어기가 널리 사용되고 있다. 그 이유는 구조가 간단하고 강인성을 내포하고 있으며 기술자들에게 친숙하기 때문이다. 그래서 이들 강인 최적 설계이론을 PID에 접목시키

려는 연구가 있어왔다. H^∞ 제어이론을 PID에 적용시키기 위하여, Grimble^[4]은 H^∞ 제어기가 PID 구조를 가질 수 있는 어떠한 부류를 만들려는 노력을 하였고, Matteredzoni와 Rocco^[5]는 강인한 PID 제어기 동조를 위해 모델오차한계를 설정하여 IMC 구조를 가지는 H^∞ 제어기 강인 동조 알고리즘을 개발하였다. 반면에, LQG-LTR처럼 LQR의 강인성을 이용하는 새로운 LQ 접근방법이 있다. Shih와 Chen^[6]은 2차 시스템에서 최적상태회환제어법칙을 PID 제어기로 표현할 수 있음으로서 PID 동조를 LQR 설계문제로 바꿀 수 있음을 제안하였다. 최근에는 He 등^[9]은 시간지연을 가진 일차시스템에 대해 LQR 접근으로 최적 PI/PID 제어기 동조 알고리즘을 제안했다. 그러나 He 등의 방법은 PI동조방법을 특수한 조건에서만 PID 동조로 확장할 수 있기 때문에 사실상 일반적 PID 제어기 동조방법이라고 간주하기 힘들다.

Shih와 Chen^[6]은 가격함수(cost function)의 가중치요소 Q와 R을 Ziegler-Nichols와 Coohen-Coon의 동조결과식과 연계하여 선정하는 방법을 제안하였는데, 그 동조관계식은 동일하기 때문에 사실상 이들의 방법보다

* 正會員, 漢陽大學校 電子電氣컴퓨터工學部
(Division of Electrical and Computer Engineering,
Hanyang University)

※ 본 논문은 2001년도 한양대학교 연구비 지원에 의한 결과임.

接受日字:2001年10月11日, 수정완료일:2002年6月20日

진일보한 방법론을 제안하지 못한 결과를 초래하였다. 본 논문에서는 루프형성절차를 이용해 가격함수의 가중치요소 Q와 R을 선정하는 새로운 방법을 제시하여 기존의 방법보다 성능향상을 기할 수 있고 안정도-강인성이 보장할 수 있도록 하고자 한다.

II. 최적제어법칙과 PID 제어기

다음의 2차 시스템을 고려해 보자.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (1)$$

여기서, $y(t)$ 는 출력변수, $u(t)$ 는 제어변수, 그리고 ζ 는 제동비이다. 초기 조건 $y(0)$ 와 $dy(0)/dt$ 는 명시되어진다. 제어의 목적은 출력변수를 최종상태 값으로 이끌어내는 것인데, 이 값은 $y(\infty) = 0$ 으로 가정한다.

출력변수에 적분요소를 첨가시켜 새로운 상태변수를 도입하면 상태변수 x 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

그러면 식(1)은,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2\zeta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고, $x(0)$ 는 주어진다.

LQR로 해석하기 위해서 식(4)와 같은 2차가격함수를 고려하자.

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4)$$

여기서 Q는 양의 반한정(positive semi-definite)대칭행렬이고, R은 양의 한정(positive definite)대칭행렬로 $Q = N^T N$, $R = \rho I$ 이다. 그러면 케환제어법칙은 다음과 같다.

$$u(t) = -G x(t) \quad (5)$$

$$G = R^{-1} B^T K \quad (6)$$

K는 양의 반한정 대칭행렬이고 다음 Riccati식의 해이다.

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K = 0 \quad (7)$$

K의 성분들을 다음과 같이 놓으면,

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{10} & K_{20} \\ K_{10} & K_{11} & K_{21} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식(5)의 최적제어법칙은 다음과 같이 PID제어형태가 된다.

$$u(t) = - \left(K_{22} \frac{dy(t)}{dt} + K_{21} y(t) + K_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (9)$$

기존의 PID제어기의 형태는,

$$u(t) = -K_c \left(y(t) + \tau_D \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (10)$$

이득 K_v 의 성분들과 비례이득 K_c 와 시정수 τ_I 그리고 τ_D 와의 관계는 다음과 같다.

$$K_{20} = \frac{K_c}{\tau_I}, \quad K_{21} = K_c, \quad K_{22} = K_c \tau_D \quad (11)$$

가중치행렬 Q를 식(12)와 같이 놓고

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} & Q_{02} \\ Q_{01} & Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{02} & Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

식(7)에 대입하면 식(13)과 같이 K에 관한 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_{00} &= \frac{1}{\rho} K_{20}^2 \\ Q_{11} &= \frac{1}{\rho} K_{21}^2 + 2K_{21} - 2K_{10} \\ Q_{22} &= \frac{1}{\rho} K_{22}^2 + 4\zeta K_{22} - 2K_{21} \\ Q_{02} &= -K_{10} + 2\zeta K_{20} + \frac{1}{\rho} K_{20} K_{22} \end{aligned} \quad (13)$$

PID 동조 파라미터를 구하기 위해서는 아래 식(14)와 같이 K를 Q에 관한 식으로 표현할 필요가 있다.

$$\begin{aligned} K_{20} &= \sqrt{\rho Q_{00}} \\ K_{22}^4 + 8\zeta \rho K_{22}^3 + (16\zeta \rho^2 + 4\rho^2 - 2\rho Q_{22}) K_{22}^2 & \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 &+ (-8\zeta\rho^2 Q_{22} + 16\zeta/\rho^3 - 8\rho^2\sqrt{\rho Q_{00}})K_{22} \\
 &+ (\rho^2 Q_{22}^2 - 16\zeta\rho^3\sqrt{\rho Q_{00}} - 4Q_{22}\rho^3 - 4Q_{11}\rho^3 + 8\rho^3 Q_{02}) = 0 \\
 K_{21} &= \frac{1}{2\rho} K_{22}^2 + 2\zeta K_{22} - \frac{1}{2} Q_{22}
 \end{aligned}$$

식 (14)에서 K_{20} , K_{21} , K_{22} 는 PID 제어기동조 파라미터들이다. 이들은 Q와 R에 의해 결정되어지므로 LQR 문제로 해석된다. 그래서 LQR의 특성인 무한대의 이득 여유(gain margin)와 60° 위상여유(phase margin)의 강인성을 갖게된다. 그러나 정상적인 LQR은 출력제한이 없기 때문에 성능에 관해 논하기가 어렵다. 그래서 본 논문에서 고려한 2차 시스템에서는 출력측에 새로운 상태변수를 도입하는 방법을 이용해 출력제한을 가지는 LQR 구조를 고려했다.

다음 장에서는 LQR의 설계 파라미터 Q와 R의 선정 방법을 루프형성기법을 통해 구체적으로 나타내고, 예제를 통해 성능-강인성이 개선됨을 보이고자 한다.

III. 가중치 요소 Q와 R의 선정

가중치요소 Q와 R은 성능-강인성 개선을 위해 플랜트 출력에서 절단한 루프전달함수의 특이값 일치기법 Suh^[7]에 기초하여 설정한다. 원래 이 기법은 Athans^[8]이 제안한 플랜트 입력측에서 절단하여 얻어진 루프전달함수의 특이값 일치기법을 출력측으로 확장한 것이다.

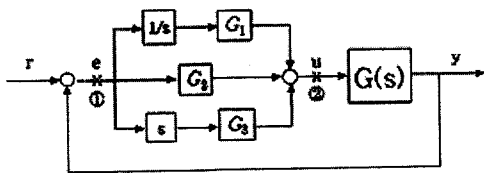


그림 1. PID 제어기
Fig 1. PID Controller.

루프형성기법으로 성능 문제를 고려하기 위해서는 그림 1에서 플랜트 입력인 ②점에서가 아닌 출력인 ①점에서 절단한 루프전달함수 T(s)를 사용해야한다.

$$T(s) = C_p(sI - A_p)^{-1} B_p (G_3 s + G_2 + \frac{G_1}{s}) \quad (15)$$

저주파수와 고주파수에서 T(s)의 극한값을 구하기 위해 Kwakernaak Sivan^[10]의 제어이득행렬 G의 극한저동인 다음과 같은 관계식을 이용한다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G = WN \quad (16)$$

여기서 W는 일원행렬(unitary Matrix)로 $W^T W = I$ 이다.

제어이득행렬 G와 설계 파라미터 N은 $G = [G_1 \ G_2 \ G_3]$ 와 $N = [N_1 \ N_2 \ N_3]$ 으로 분해하고, 각각의 N_1 , N_2 , N_3 에 대해 W가 단위행렬이 되도록 하는 새로운 설계 파라미터 \bar{N}_1 , \bar{N}_2 , \bar{N}_3 이라고 할 때 다음과 같은 극한저동식이 얻어질 수 있다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} [G_1 \ G_2 \ G_3] = [\bar{N}_1 \ \bar{N}_2 \ \bar{N}_3] \quad (17)$$

그러면 관계식 (17)을 이용해 식(15)의 T(s)의 극한값을 저주파수와 고주파수부분에서 구해보자.

저주파수 부분에서는 $s \rightarrow 0$ 이므로 T(s)는 식(18)과 같이 근사화되고 식 (17)에 의해 식(19)와 같이 변형된다.

$$T(s) \approx C_p (-A_p)^{-1} B_p \frac{1}{s} G_1 \quad (18)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p (-A_p)^{-1} B_p \bar{N}_1 \quad (19)$$

T(s)의 극한값을 구하기 위해 $C_p (-A_p)^{-1} B_p \bar{N}_1 = 1$ 을 만족하는 설계 파라미터 \bar{N}_1 은 식(20)과 같이 결정된다.

$$\bar{N}_1 = [C_p (-A_p)^{-1} B_p]^{-1} \quad (20)$$

고주파수 부분에서는 $s \rightarrow \infty$ 이므로 T(s)는 식(21)과 같이 근사화되고 식(22)과 같이 된다.

$$T(s) \approx C_p B_p G_3 \quad (21)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} C_p B_p \bar{N}_3 \quad (22)$$

$\frac{1}{\rho} C_p B_p \bar{N}_3 = 1$ 을 만족하는 설계 파라미터 \bar{N}_3 는 식 (23)과 같다.

$$\bar{N}_3 = \left[\frac{1}{\rho} C_p B_p \right]^{-1} \quad (23)$$

설계 파라미터, \bar{N}_2 는 위의 극한 기법에 의해 구하지 못했다. 그래서 다음의 특성에 기초해서 선정한다. \bar{N}_2

는 출력변수 $y(t)$ 즉, 비례 이득 K_c 와 관계가 있으므로 플랜트가 안정하다는 조건 아래 큰 값으로 선택된다(참고문헌 [6]을 참조). ρ 는 Ahans의 방법에 따라 명령추종 및 외란 장벽과 센서 잡음 장벽을 고려하여 결정된다.

IV. 예 제

시스템의 상태공간 모델식과 설계 사양은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p(t)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_d = 10^{-1}, \quad \Omega_n = 10^3$$

$\rho=0.00001$ 로 선택하면 \bar{N}_1 과 \bar{N}_3 는 식(20)과 식(23)에 의해서 결정되고, \bar{N}_2 는 플랜트의 안정조건아래 비교적 큰 값으로 선택된다. 따라서 설계 파라미터 N 과 제어이득행렬 G 는 다음과 같이 얻어진다.

$$N=[1 \ 1 \ 0.1], \quad G=[316.23 \ 324.4 \ 35.9]$$

$T(s)$ 의 루프형상이 성능-강인성을 보장함을 그림 2에서 볼 수 있다. 즉 $T(s)$ 곡선이 저주파에서 외란장벽과 고주파에서 잡음장벽을 침범하지 않는다. 그리고 그림 3에서 Shih와 Chen 방법과 본 논문에서 제안한 방법의 시간응답곡선을 나타냈다. 여기서 제안된 방법이 Shih와 Chen방법보다 오버슈트, 상승시간(rising time), 그리고 정정시간(settling time)이 개선됨을 볼 수 있다.

V. 결 론

2차 시스템에서의 PID 제어기의 강인 최적 동조를 위해 LQR 설계문제로 전환하였고, LQR의 가격함수의 가중치요소 Q 와 R 를 선정하기 위해 제어이득의 극한저동을 이용한 루프형성기법을 제안하였다. 그리고 LQR의 구조를 갖고 있어 안정도-강인성은 물론 루프형성기법에 의해 성능-강인성도 향상시킬 수 있었다. 본 연구는 2차 시스템으로 제한되어질지라도, 2차 모델은 진동, 구조적 해석 그리고 배나 항공기의 회전제어와 같이 다양한 분야에 적용되어지고 있다.

참 고 문 헌

- [1] J. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers," IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-24, No. 4, pp. 607-611, 1979.
- [2] G. Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity," IEEE Trans. On Auto. Control, Vol. AC-26, No. 2, pp. 301-320.
- [3] J. Doyle and K. Glover and P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State-space solutions to standard H2 and H control problems," IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-34, No. 8, pp. 831-847. Also see 1988 American Control Conference, Atlanta, June, 1988.
- [4] M. Grimble, "H ∞ controllers with a PID structure," J. of Dynamic Syst. Meas. And contr., Vol. 112, pp. 325-336, 1990.
- [5] C. Mattezzoni and P. Rocco, "Robust tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification," European J. of Contr, Vol. 3,

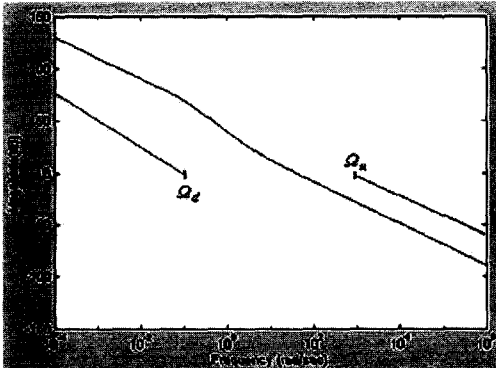


그림 2. 루프 전달함수 $T(s)$
Fig 2. Loop Shape of $T(s)$.

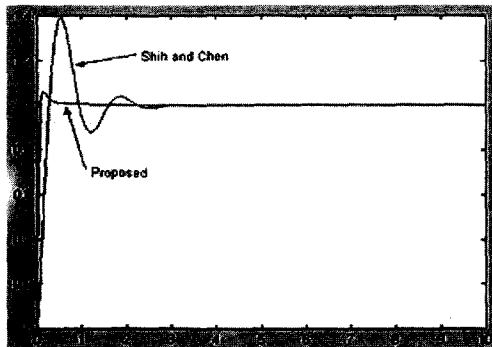
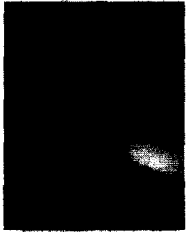


그림 3. PID제어기의 단위계단응답
Fig 3. Step Responses of PID Controller.

- pp.125-136, 1997.
- [6] Y. Shih and C. Chen, "On the weighting factors of the quadratic criterion in optimal control," *Int. J. Control*, Vol. 19, NO. 5 pp. 947-955, 1974.
- [7] B. Suh and S. Yun, "LQ-servo Design," *Proceedings of The 4th Asia-Pacific Conference on Control & Measurement*, pp. 97-100, 9-12 July 2000.
- [8] M. Athans, "Lecture Note on Multivariable Control System," M.I.T. Ref. No.860224/6234., 1986.
- [9] HE Jian-Bo, Qing-Guo Wang and Tong-Heng, Lee, PI/PID Controller Tuning Via LQR Approach, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, 1998, pp 1177-1182.
- [10] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal filters", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-17, pp.79-86, 1972. 4, pp.689-702, 1987.

 저 자 소 개



金 占 坤(正會員)

1993~1999 : 경남대학교 전자공학과 졸업. 2000~2002 : 한양대학교 전자통신전파공학과 졸업. <주관 심분야 : 최적 강인 제어, PID 제어기>

徐 丙 高(正會員)

현재 : 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부 교수