

Analytic Problems in Applying the Properties of the Modified z-Transform

鄭 台 相* · 李 宰 碩**
(Tae-Sang Chung · Jae Seok Lee)

Abstract - While the z-transform method is a basic mathematical tool to relate the input/output signals only at the sampling instants in analyzing and designing sampled-data control systems, the modified z-transform which is a variation of the z-transform is widely used to represent the details of continuous signals between the sampling instants. To relate the modified z-transform to the corresponding regular z-transform, some properties were established regarding the modified z-transform method. This paper will show that these properties, in their current forms, cause some analytic problems, when they are applied to the signals with discontinuities at the sampling instants, which accordingly limit their applications significantly. In this paper, those analytic problems will be investigated, and the theorems of the modified z-transform will be revised by adopting new notations on the z-transform so that those can be correctly interpreted and used without any analytic problems. Also some additional useful schemes of applying the modified z-transform will be developed.

Key Words : z변환, 변형 z변환, 좌극 z변환, 우극 z변환

1. 서 론

샘플-데이터 제어시스템(sampled-data control systems)에 있어서는, 제어 대상 플랜트의 몇몇 연속 신호들이 주기적으로 샘플되고, 이는 설정된 제어법칙에 따른 수치적 계산에 의하여 조작되어 제어 대상 플랜트에 인가되며, 다음 샘플 순간까지 한 주기 동안 같은 값으로 유지된다. 이 경우 각각의 이웃하는 두 개의 샘플 순간 사이의 한 주기동안 제어 대상 플랜트의 모든 신호들은 고정된 제어 입력을 제외하고는 일반적으로 플랜트의 동역학방정식(일반적으로 미분방정식)에 의하여 연속적으로 변할 것이다. 그러나, 샘플 순간 사이의 값들은 모든 구간에서 같은 동역학방정식에 의하여 변화하지만, 샘플 순간의 제어신호의 불연속적 변화 때문에 입력, 출력 그리고 내부 상태변수들의 관계를 전구간에 걸쳐 모두 적용될 수 있는 한 개의 동역학방정식(라플라스 변환)으로 표현할 수는 없다. 따라서 이 경우 샘플 순간의 입출력 신호 값들만의 관계를 짓는 z변환(z-transform) 방식이 사용된다.

연속 신호 $c(t)$ 를 주기 T 로 샘플한 신호의 z변환을 정의에 따라 아래와 같이 기술한다 [1-4]:

$$\begin{aligned}
 C(z) &= Z[C(s)] = Z[c(t)] = Z[c(kT)] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c(kT)z^{-k} \\
 &= c(0) + c(T)z^{-1} + \dots + c(kT)z^{-k} + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $C(s)$ 는 연속신호 $c(t)$ 의 라플라스 변환(Laplace transform)이며, $c(kT)$ 는 $c(t)$ 를 샘플한 이산신호이다. 공학분야에 있어서의 전형적인 임펄스 반응은 구간 $t \geq 0$ 에서 감쇠신호 $g(t) = e^{-at}$ 의 형태, 그리고 이의 라플라스 변환은 $1/(s+a)$ 로 주어지며, (1)에 의한 z변환은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 G(z) &= Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = Z[e^{-at}] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} = \frac{z}{z - e^{-aT}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

주목할 점은 신호 $g(t) = e^{-at}$ 는 $t \geq 0$ 의 전 구간에서 연속이지만, 시간 $t=0$ 에서 0에서 1로의 불연속(jump)이 존재하는데, (2)에서 $g(0) = g(0^-) = 0$ 이 아닌 $g(0) = g(0^+) = 1$ 을 취하였다는 점이다.

식 (1)에 정의한 z변환의 역변환은 아래와 같이 표현된다.

* 正 會 員 : 中央大 工大 電子電氣工學部 教授 · 工博

** 正 會 員 : 中央大 工大 制御計測工學科 博士課程

接受日字 : 2002年 9月 5日

最終完了 : 2002年 11月 14日

$$c_k = c(kT) = Z^{-1} [C(z)] \quad (3)$$

z 변환은 연속신호의 샘플순간의 값을 취하기 때문에, 연속신호의 z 변환으로부터 두 개의 이웃한 샘플 순간 사이의 신호의 연속적 복원은 이론적으로 불가능하다. 역 z 변환은 $c(t)$ 를 주기적으로 샘플한 수열의 k 번째 항 c_k 혹은, T 가 샘플 주기로 이해된다면 시간 kT 에서의 함수값 $c(kT)$ 를 표현할 뿐이다. (2)에 상응하는 역 z 변환은 다음과 같이 된다.

$$g_k = g(kT) = Z^{-1} \left[\frac{z}{z-p} \right] = p^k \quad (4)$$

그림 1은 기본적인 샘플-데이터 선형 제어시스템의 블록 선도이다. 여기서 샘플기는 주기를 T 로 하는 이상적인 임펄스(impulse) 샘플기로 가정되었으며, 따라서 제어 대상 플랜트 $G(s)$ 는 임펄스에 반응한다고 가정되었다. 주의할 것은 본 논문에서 그림 1의 플랜트가 일반적인 경우는 $G(s)$ 를 나타내고, 예제로 사용될 경우는 $1/(s+a)$ 를 나타낸다. 플랜트의 반응식 $g(t)$ 는 전달함수 $G(s)$ 의 역 라플라스 변환이다. 플랜트에 임펄스를 인가하면 출력은 연속신호 $g(t)$ 가 된다. 연속 입력 $e(t)$ 의 주기적 샘플 값을 크기로 하는 임펄스를 플랜트에 주기적으로 인가하면, 시간 $t=kT$ 에서의 플랜트의 응답은 플랜트가 선형인 관계로 이 시점까지 인가된 모든 임펄스에 대한 응답의 중첩에 의하여 다음과 같이 이산 컨볼루션(discrete convolution)의 형태로 주어진다:

$$c(kT) = \sum_{j=0}^k g(kT-jT)e(jT) \quad (5)$$

여기서 시간 jT 에서 $e(jT)$ 크기의 임펄스가 가해질 경우 시간 kT 까지는 경과시간이 $kT-jT$ 이며 따라서 시간 kT 에서의 응답은 $g(kT-jT)e(jT)$ 가 된다.

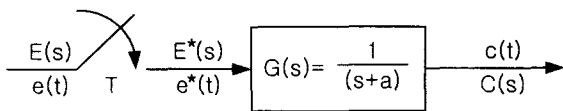


그림 1 기본적인 샘플-데이터 제어시스템의 예. 샘플기는 샘플 주기를 T 로 하는 이상형 임펄스 샘플기이다. 플랜트 $G(s)$ 는 임펄스 입력에 반응하는 것으로 가정된다.

Fig. 1 A sampled-data control system. The sampler is an ideal impulse sampler with sampling time T . The plant $G(s)$ is assumed to respond to the impulse.

그림 1의 시스템은 시간 $t=0$ 에서 인가한 임펄스가 시간 $t < 0$ 에서는 영향을 미치지 못하는 인과관계의 플랜트(causal system)이므로 시간 $t < 0$ 에서 $g(t)=0$ 이 된다. 이 조건을 이용하여 (5)의 수열의 합에 사용한 인덱스 변수 j 를 k 를 넘어 무한대까지 연장할 수 있다.

$$c(kT) = \sum_{j=0}^k g(kT-jT)e(jT) = \sum_{j=0}^{\infty} g(kT-jT)e(jT) \quad (6)$$

식 (6)의 양변에 z 변환을 취하면 z 영역에서의 전달함수 관계가 구해진다 [1-4]:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(kT-jT)e(jT)z^{-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e(jT)z^{-j} \sum_{k=j}^{\infty} g(kT-jT)z^{-(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e(jT)z^{-j} \sum_{k-j=0}^{\infty} g(kT-jT)z^{-(k-j)} \\ &= E(z)G(z) \end{aligned} \quad (7)$$

위 식의 전개에서, 앞의 수열의 합에서 인덱스 변수 j 는 0보다 크거나 같은 변수이나, 두 번째 수열의 합의 과정에서는 $j \geq 0$ 인 상수로 취급되어야 하며, 또한 두 번째 수열의 합을 위한 인덱스의 시작 $k-j=-j$ 이 $k-j=0$ 으로 바뀐 것은 $k-j < 0$ 의 범위에서는 수열의 항의 값이 $g(kT-jT)=0$ 이 되어 수열의 합에 포함할 필요가 없기 때문이다. 그리고 이 논문에서 앞으로 보여줄 이론 전개에 필요에 의하여 강조하고자 하는 점은 두 번째 수열의 합 $G(z)$ 는 식에 나타난 j 값에 관계가 없다는 점이다.

식 (7)은 출력의 z 변환이 입력의 z 변환과 플랜트의 z 변환의 곱으로 표시되는 것을 나타낸다. 따라서 (7)의 관계에 의하여 샘플-데이터 제어시스템에서 z 변환을 이용하여 입력과 출력간의 z 영역에서의 대수적인 전달함수(pulse transfer function)를 구성할 수 있다.

위의 내용을 설명하는 예제로서 입력이 $E(s)=1/s$ 이고 플랜트가 $G(s)=1/(s+a)$ 인 경우를 고려하여 보자. 입력의 샘플이 플랜트에 인가될 것이므로 입력의 z 변환을 구하여 보자.

$$E(z) = Z \left[\frac{1}{s} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1} \quad (8)$$

식 (2)에서 이미 주어진 플랜트의 z 변환과 입력의 z 변환 (8)을 (7)에 대입하면 출력의 z 변환이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-aT})} \\ &= \frac{1}{1-e^{-aT}} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{e^{-aT}z}{z-e^{-aT}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

식 (4)에 주어진 역 z 변환 관계를 (9)에 적용하면 출력의 수열이 주어진다.

$$c_k = c(kT) = \frac{1}{1 - e^{-aT}} [1 - e^{-aT} e^{-kaT}] = 1 + e^{-aT} + e^{-2aT} + \dots + e^{-kaT} \quad (10)$$

식 (10)에 나타난 것과 같이, 시간이 $(k-1)T$ 에서 kT 로 경과할 때 출력은 e^{-akT} 만큼 증가함을 알 수 있으며, 이런 추세로 k 가 무한대로 접근할 때 $a > 0$ 의 조건에서 $c(kT)$ 는 지수함수의 형태로 $1/(1 - e^{-aT})$ 에 수렴함을 알 수 있다. 그러나 샘플링 순간 사이의 한 주기동안의 $c(t)$ 의 변화나 샘플링 순간의 $c(t)$ 의 연속 혹은 불연속의 어떤 정보도 (9)나 (10)에서 구할 수 없다.

2. 좌극 z 변환과 우극 z 변환

수치계산을 하는 디지털 블록의 입력과 출력, 그리고 샘플-데이터 시스템의 연속 플랜트에 인가되는 입력은 샘플링 순간에만 새로운 값으로 변경되지만, 샘플링 순간의 임펄스 입력의 인가로 발생할 수 있는 불연속성을 제외하고는, 플랜트의 출력을 포함한 내부 상태변수는 한 주기동안 플랜트의 동력방정식에 의하여 연속적으로 변화하는 연속 신호이다.

그림 1에 주어진 플랜트는 선형시스템이므로 주기를 T 로 하여 주기적으로 단위 임펄스가 인가된다면, 시간 간격 $kT \leq t < (k+1)T$, ($k \geq 0$)에서의 플랜트의 응답은 $j=0$ 에서부터 $j=k$ 까지의 모든 임펄스 입력에 대한 지연 임펄스 응답인 $g(t-jT) = e^{-a(t-jT)}$ 의 중첩으로 구할 수 있다.

$$c(t) = \sum_{j=0}^k g(t-jT) = \sum_{j=0}^k e^{-a(t-jT)} = \frac{(1 - e^{-a(k+1)T})}{1 - e^{-aT}} e^{-a(t-kT)} \quad (11)$$

그림 2는 (11)에서 $T=1$, $a=1$ 일 때의 $c(t)$ 를 나타낸다. 이 그림에서 알 수 있듯이, $c(t)$ 는 샘플링 순간인 kT 에서 언제나 불연속이 있음을 알 수 있다.

식 (11)의 관계에서 시간 인덱스 k 대신에 $k-1$ 을 대입하여 시간 간격 $kT - T \leq t < kT$ ($k \geq 1$)에서의 플랜트 응답을 구할 수 있다.

$$c(t) = \frac{(1 - e^{-akT})}{1 - e^{-aT}} e^{-aT} e^{-a(t-kT)} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)에 $t=kT$ 를 대입하면 각각 다음의 값들이 주어진다:

$$c(kT^+) = \frac{(1 - e^{-a(k+1)T})}{1 - e^{-aT}} \quad (13)$$

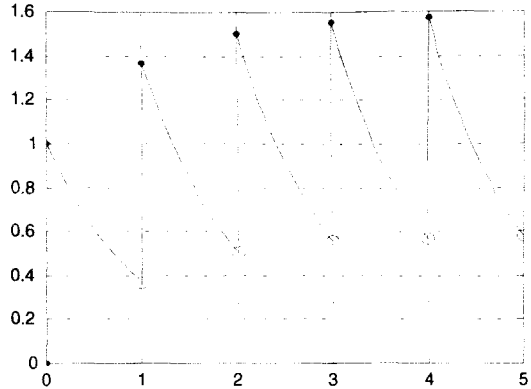


그림 2. 그림 1의 샘플-데이터 시스템에 단위 임펄스를 연속적으로 인가할 때의 응답. 응답은 모든 샘플 순간에 점프 불연속을 나타낸다.

Fig. 2. Output response of the sampled-data system in Fig. 1 for the unit impulse train input. The response shows jump discontinuities at the sampling instants.

$$c(kT^-) = \frac{(1 - e^{-akT})}{1 - e^{-aT}} e^{-aT} \quad (14)$$

여기서 $t=kT^+$ 와 $t=kT^-$ 는 시간변수 t 가 각각 kT 의 우측에서, 그리고 kT 의 좌측에서 kT 로 접근할 때의 시간의 극한값을 의미하며, $c(kT^+)$ 와 $c(kT^-)$ 는 각각 상응하는 출력값에도 서로 같지 않음을 알 수 있다. 매 샘플링 순간($t=kT, k=1, 2, \dots$)의 출력의 불연속 값을 d_k 로 표현할 때, 이는 (13)과 (14)의 차이로 구해진다:

$$d_k = d(kT) = c(kT^+) - c(kT^-) = 1, \quad k \geq 1 \quad (15)$$

시간 $t < 0$ 에서 출력은 0이므로 $c(0^-) = 0$ 이 되고, 또 (13)에서 $c(0^+) = 1$ 이 되므로 시간 $t=0$, 즉 $k=0$ 에서 출력의 불연속 값의 차이도 1이 된다.

식 (9)의 $C(z)$ 에 역 z 변환을 취하여 구한 (10)의 $c(kT)$ 와 (7)의 $C(z)$ 의 정의에 사용된 $c(kT)$ 는 모두 같은 식인데, 이는 실제로는 (13)에서 주어진 $c(kT^+)$ 와 같으며, (14)의 $c(kT^-)$ 가 아님이 드러난다. 마찬가지로 (7)에 사용된 $g(kT)$ 는 $g(kT^+)$ 가 된다. 이 구분이 변형 z 변환(modified z-transform) [5-8]과 관련하여 본 논문에서 제시하는 이론의 전개에 필요하다.

본 논문에서 제시하는 변형 z 변환의 특성에 관련한 이론을 전개할 때에 상호 참고를 위하여, 그리고 기존의 이론과 비교할 목적으로, (14)로 주어지는 수열 $c(kT^-)$ 의 z 변환을 $C^-(z)$ 로 나타내고 이를 $c(t)$ 의 좌극 z 변환(left-side z-transform)이라고 본 논문에서 다시 정의한다.

$$\begin{aligned}
 C^-(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c(kT^-)z^{-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-akT})}{1-e^{-aT}} e^{-aT} z^{-k} \quad (16) \\
 &= \frac{e^{-aT}z}{(z-1)(z-e^{-aT})}
 \end{aligned}$$

여기서 $c(0^-)=0$ 이 사용되었다. 마찬가지로 $c(kT^+)$ 의 z 변환을 $C^+(z)$ 로 나타내고, 이를 $c(t)$ 의 우극 z 변환(right-side z -transform)이라고 정의하는데, 이는 실제로 (7) 혹은 (9)에서 주어진 기존의 $C(z)$ 와 같은 식이 됨을 알 수 있다. 위의 정의들에 의하면 z 변환을 하고자 하는 연속 신호가 샘플링 순간에 불연속이 없으면 좌극 z 변환과 우극 z 변환은 서로 같지만, 불연속이 있으면 두 변환이 서로 다름을 앞의 예에서 알 수 있다. 제어공학에서 사용하는 z 변환이 우극 z 변환임이 함축적으로 [3]에 언급되어 있다.

3. 변형 z 변환과 점프 불연속 신호

샘플링 순간 사이의 반응 신호의 연속적 변화를 다루기 위하여 z 변환의 다른 형태가 많이 개발되었다 [5-9]. 그 중의 하나인 변형 z 변환은 다음과 같이 정의된다:

$$Z_m[c(t)] = C(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT - T + mT)z^{-k} \quad (17)$$

여기서 매개변수 m 은 $0 \leq m < 1$ 을 만족하며, 시간이 $t < 0$ 에서 연속함수 $c(t)$ 는 0이 되는 조건이 함께 주어진다. 위의 정의는 연속함수 $c(t)$ 의 시간 축에서 $(1-m)T$ 만큼 지연된 신호, 즉 $c(t - (1-m)T)$ 의 z 변환과 같다. 시간 $t < 0$ 에서 $c(t)=0$ 의 조건을 이용하여 (17)을 아래와 같이 변형할 수 있다.

$$Z_m[c(t)] = C(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c(kT + mT)z^{-k} \quad (18)$$

식 (18)의 양변에 z 를 곱하면 다음의 결과를 주며,

$$zC(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT + mT)z^{-k} \quad (19)$$

이 관계에 역 z 변환을 취하면 다음의 결과가 된다.

$$c(kT + mT) = Z^{-1}[zC(z, m)] \quad (20)$$

플랜트의 입력과 출력의 전달함수 관계에 의하여 $C(z, m)$ 을 구할 수 있다면, (20)과 같이 역 z 변환에 의하여 $c(kT + mT)$ 를 구할 수 있고, 따라서 $c(t)$ 는 시간 인덱스가 $k \geq 0$ 인 정수이며, m 이 0과 1사이의 임의의 값을 취하여, 시간이 $kT \leq t < kT + T$ 의 범위에서 연속적 응답을 구할 수 있다.

그림 1의 플랜트의 출력에 변형 z 변환을 고려하여 보자. 시간 $t = kT + mT$ 에서 출력 $c(t)$ 는 (5)에 주어진 것과 같

이 이산 컨볼루션에 의하여 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned}
 c(kT + mT) &= \sum_{j=0}^k g(kT + mT - jT)e(jT) \quad (21) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} g(kT + mT - jT)e(jT)
 \end{aligned}$$

수열의 합에 사용한 인덱스 변수 j 를 k 를 넘어 무한대까지 연장한 것은 (6)의 유도에서 밝힌 이유와 같은 까닭이다. (21)를 (18)에 대입한 결과에 대수적 연산을 수행하면 다음의 결과가 얻어진다

$$\begin{aligned}
 C(z, m) &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(kT + mT - jT)e(jT)z^{-k} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} e(jT)z^{-j} z^{-1} \sum_{(k-j)=-j}^{\infty} g[(k-j)T + mT]z^{-(k-j)} \quad (22) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} e(jT)z^{-j} z^{-1} \sum_{(k-j)=0}^{\infty} g[(k-j)T + mT]z^{-(k-j)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} e(jT)z^{-j} G(z, m) = E(z)G(z, m)
 \end{aligned}$$

위 식에서 수열의 합을 위한 인덱스의 처음으로 $k-j=-j$ 대신에 $k-j=0$ 를 사용한 것은 $k-j < 0$ 의 범위에서는 수열의 항의 값이 $g(kT - jT + mT)=0$ 이 되어 수열의 합에 포함할 필요가 없음을 이용하였다. 그리고 (17)에서 $C(z, m)$ 을 정의한 것과 같이 $G(z, m)$ 은 $g(t)$ 의 변형 z 변환이다:

$$\begin{aligned}
 Z_m[g(t)] &= G(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT - T + mT)z^{-k} \quad (23) \\
 &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} g(kT + mT)z^{-k}
 \end{aligned}$$

이 논문에서 앞으로 보여줄 이론 전개에 필요에 의하여 강조하고자 하는 점은 (22)에서 첫 번째 수열의 합 $E(z)$ 를 위한 식에서는 j 가 운항 인덱스 변수(running index variable)로 사용되지만, 두 번째 수열의 합 $G(z, m)$ 을 위한 식에서 j 는 0보다 크거나 같은 상수로 취급되며, 또한 그 결과는 j 값에 관계가 없다는 점이다.

식 (22)는 입력과 출력의 전달관계를 규정하는 일반 z 변환 관계식 (7)에 대응하는 변형 z 변환 전달함수 관계식이 된다. 바로 이 식이 샘플링 순간의 신호값(신호가 실지로 샘플링 되거나 혹은 샘플링 되지 않거나에 관계가 없음)의 수열과 매 샘플링 순간에서 mT 만큼 떨어진 시점의 연속 신호의 값으로 구성된 수열을 z 영역에서 전달함수관계로 서로 연결시킬 수 있게 하는 근본적인 배경 이론이 된다. (22)의 관계를 (20)에 대입하면 다음의 결과가 된다:

$$\begin{aligned}
 c(kT + mT) &= Z^{-1}[zC(z, m)] \quad (24) \\
 &= Z^{-1}[zE(z)G(z, m)]
 \end{aligned}$$

위의 변형 z 변환 전달함수 관계 (24)를 그림 1의 플랜트에 적용하여 보자. (23)에 주어진 정의에 의하여 그림 1의 $G(s)$ 의 변형 z 변환 $G(z, m)$ 은 아래와 같이 계산된다:

$$G(z, m) = Z_m \left[\frac{1}{s+a} \right] = Z_m [e^{-at}] \quad (25)$$

$$= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha(k+m)T} z^{-k} = \frac{e^{-\alpha m T}}{z - e^{-\alpha T}}$$

식 (8)과 (25)의 결과를 (22)에 대입하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$C(z, m) = E(z)G(z, m) = \frac{e^{-\alpha m T} z}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})} \quad (26)$$

식 (26)을 (24)에 대입한 후 역 z 변환을 취하면 출력 $c(t)$ 의 한 주기 동안의 값을 구할 수 있다.

$$c(kT+mT) = Z^{-1} \left[\frac{e^{-\alpha m T} z^2}{(z - e^{-\alpha T})(z-1)} \right] \quad (27)$$

$$= \frac{1 - e^{-\alpha(k+1)T}}{1 - e^{-\alpha T}} e^{-\alpha m T}$$

식 (27)의 m 에 $m = t/T - k$ 을 대입하면 (11)에 주어진 $c(t)$ 와 같아지며, 따라서 (27)의 결과가 정확함을 알 수 있다.

4. 변형 z 변환의 특성 적용시의 해석적 문제점

앞에서 밝힌 바와 같이 변형 z 변환은 주어진 연속신호를 시간 축에서 $(1-m)T$ 만큼 지연된 신호의 z 변환과 같다 [1-3]. 물론 문제의 신호는 $t < 0$ 에서 0이 되는 조건을 만족하여야 한다. 이 정의에 따르면, $m=1$ 이 되면 변형 z 변환을 구하기 위한 신호에 지연이 없으므로, 변형 z 변환과 일반 z 변환이 같은 식으로 표현될 것으로 결론지을 수 있다 [1-3]. 실지로 $m=1$ 을 (18)에 대입하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$C(z, 1) = C(z, m)|_{m=1}$$

$$= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c([k+1]T)z^{-k} \quad (28)$$

$$= z^{-1} \{c(T) + c(2T)z^{-1} + \dots\}$$

$$= C(z) - c(0)$$

이 식은 변형 z 변환의 특성중의 하나로서, 변형 z 변환과 일반 z 변환을 관계 지우는 잘 정립된 이론이다. 국내외의 대부분의 디지털제어공학의 참고서나 교과서가 이 관계를 기술하고 있다 [1-4].

그러나 본 논문에서는 (28)의 관계가 성립되지 않음을 보여주는 반례를 제시하여 (28)의 결론을 유도함에 있어서 변

형 z 변환의 정의 (18)을 해석함에 심각한 이론적인 오류를 범하고 있음을 보여주고자 한다. 그리고 이 오류에 대한 원인을 이론적으로 규명하고, 마지막으로 (28)의 관계를 수정할 것이다.

그림 1의 플랜트에 대한 변형 z 변환 전달관계식 (26)을 다시 고려하여 보자. (26)에 $m=1$ 을 대입하면 다음과 같다.

$$C(z, 1) = C(z, m)|_{m=1} = \frac{e^{-\alpha T} z}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})} \quad (29)$$

식 (28)에 포함된 $c(0)$ 가 그림 2에서 보여주듯이 $c(0^-)=0$ 이나 $c(0^+)=1$ 의 둘 중 어떤 값을 취하더라도, (29)의 $C(z, 1)$ 과 (9)에 주어진 $C(z)$ 가 (28)의 관계를 만족시키지 못함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\frac{e^{-\alpha T} z}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})} \neq \frac{z^2}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})} - \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (30)$$

심각한 상황은 (28)의 관계가 디지털제어공학의 참고서나 교과서로 자주 채택되는 많은 교재들에 어떠한 의심도 없이 기술되고 있음에도 불구하고 [1-4], 그리고 변형 z 변환의 다른 특성을 유도할 때도 자주 인용됨에도 불구하고, 본 논문에서 보여준 바와 같이 아주 단순하고 전형적인 예제에서도 성립되지 않는다는 점이다.

위의 예제에서 보여 주었듯이 변형 z 변환의 특성 (28)이 성립되지 않는 이유는 (17)이나 (18)에 주어진 변형 z 변환의 정의에 포함된 매개 변수 m 은 1과 같거나 1보다 크면 아니 된다는 조건을 무시한 때문이다. 이 조건을 만족하지 못하면, 즉 $m \geq 1$ 이 되면, (22)의 두 번째 수열의 합산에 추가 항이 포함되어 그 결과가 $G(z, m)$ 이 되지 않으며, 따라서 (22)에 기술된 전달관계 $C(z, m) = E(z)G(z, m)$ 가 더 이상 유효하지 않게 된다. 다음은 반례를 들어 이 점을 설명하고자 한다.

식 (23)의 $G(z, m)$ 의 정의에서 $m=1$ 을 대입하면 다음의 결과가 된다:

$$G(z, 1) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} g(kT+mT)z^{-k} \Big|_{m=1} \quad (31)$$

$$= z^{-1} \{g(T) + g(2T)z^{-1} + g(3T)z^{-2} + \dots\}$$

식 (22)의 두 번째 수열의 합을 상수 j 가 $j=0$ 인 경우와 $j>0$ 인 경우로 분리하여 고려하여 보자. 첫째로 $j=0$ 인 경우는

$$z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} g([k-j]T+mT)z^{-(k-j)} \Big|_{m=1: j=0} \\ = z^{-1} \{g(T) + g(2T)z^{-1} + g(3T)z^{-2} + \dots\} \quad (32) \\ = G(z, 1)$$

이 되어 (31)과 (32)가 같음을 알 수 있다. 그러나 $j > 0$ 인 경우는 (31)과 다른 결과가 된다:

$$z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} g([k-j]T+mT)z^{-(k-j)} \Big|_{m=1: j>0} \\ = z^{-1} \sum_{k=j-1}^{\infty} g([k-j]T+T)z^{-(k-j)} \quad (33) \\ = z^{-1} \{g(0)z^1 + g(T) + g(2T)z^{-1} + \dots\} \\ = g(0) + G(z, 1)$$

위 식에서 보듯이 (33)에는 (32)의 결과에 $g(0)$ 항이 추가 되어 있다. 앞에서 강조하였듯이 (22)의 전개에서 두 번째 수열의 합에 있어서 j 는 0이나 양수의 상수로 취급되나 그 결과는 j 값에 관계가 없어야 함에도 불구하고, (32)와 (33)에 보여주었듯이 m 값이 1이 되면 j 값에 따라 수열의 합이 $G(z, m)$ 이 되지 않는 경우가 생긴다. 일반적으로 m 이 1보다 큰 어떤 값에 대하여도 마찬가지로 (22)의 두 번째 수열의 합산에 추가 항이 포함되어 그 결과가 $G(z, m)$ 이 되지 않음을 쉽게 보여 줄 수 있으며, 따라서 (22)에 기술된 전달관계 $C(z, m) = E(z)G(z, m)$ 가 더 이상 유효하지 않게 된다. 이 경우 변형 z 변환은 전혀 유용하지 못하게 된다. 따라서 (22)가 유효하기 위한 m 의 범위는 $0 \leq m < 1$ 임이 강조되어야 한다.

앞의 문단에서의 통찰에 의하면 수정 z 변환의 특성 (28)의 유도에 적용한 $m=1$ 의 조건은 실제로는 $m=1^-$, 즉 m 이 1보다 작은 값에서 1로 접근하는 것으로 이해되어야 하며, 따라서 (28)은 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$C(z, m)|_{m=1^-} = C(z, 1^-) \\ = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c([k+1]T^-)z^{-k} \quad (34) \\ = C^-(z) - c(0^-) = C^-(z)$$

여기서 $c(0^-) = 0$ 의 조건이 사용되었으며, (34)에 포함된 $C^-(z)$ 는 (16)에 나타난 것과 같이 본 논문에서 새롭게 정의한 $c(t)$ 의 좌극 z 변환이다. 그림 1의 예제에 대하여 (16)의 $C^-(z)$ 와 (29)의 $C(z, 1)$ 은 서로 같으므로 (34)의 관계가 유효함이 확인된다. 주목할 점은 (34)의 결과에는 시간 $t=0$ 에서의 초기조건 $c(0^+)$ 이나 $c(0^-)$ 이 관련되어 있지 않다는 점이다. 또 다른 주목할 점은, 시간 $t=0$ 에서의 우극 초기조건이 $c(0^+) = 0$ 인 경우는 $c(t)$ 가 매 샘플링 순간에 불연속(jump discontinuity)이 없는 경우이며, 이 경우에는 우극 z 변환, 좌극 z 변환, 그리고 일반 z 변환의 세 변

환 모두가 같은 결과를 갖게 되므로 (34)는 물론 유효하며, 아울러 이 경우에 제한하여 (28)의 결과도 유효하다. 위 두 경우의 어느 경우이든 (34)는 유효하므로 변형 z 변환에 관한 일반화된 특성으로 본 논문이 제안한다.

비슷한 접근 방식에 의하여 변형 z 변환의 다른 모든 정리들도 임펄스 입력에 대한 불연속적 응답의 경우까지도 수용하도록 수정되거나 정리의 의미를 명확히 해석할 수 있도록 하여야 한다.

식 (20)에 m 의 값을 $m=0^+$ 과 $m=1^-$ 로 취하면 각각 다음의 결과가 주어진다.

$$c(kT^+) = Z^{-1}[zC(z, 0^+)], \quad k \geq 0 \quad (35)$$

$$c([k+1]T^-) = Z^{-1}[zC(z, 1^-)], \quad k \geq 0 \quad (36)$$

그리고 (19)의 관계에 $m=0^+$ 의 값을 대입하면 다음의 결과가 된다.

$$C^+(z) = C(z) = zC(z, 0^+) \quad (37)$$

식 (17)의 역 z 변환은 $c(t)$ 의 다른 표현을 준다:

$$c(kT - T + mT) = Z^{-1}[C(z, m)] \quad (38)$$

여기서 시간은 $(k-1)T \leq t < kT$ 의 범위이며, 인덱스는 $k \geq 1$ 을 만족하여야 한다. 왜냐하면 시간 인덱스가 $k=0$ 인 경우, (38)이 유효한 시간 간격은 $-T \leq t < 0$ 인데, 이때의 $c(t)$ 는 0이 됨이 변형 z 변환의 정의에 포함되었다. (38)에 $m=0^+$ 와 $m=1^-$ 의 조건을 대입하면 각각 다음의 결과가 된다:

$$c([k-1]T^+) = Z^{-1}[C(z, 0^+)], \quad k \geq 1 \quad (39)$$

$$c(kT^-) = Z^{-1}[C(z, 1^-)], \quad k \geq 1 \quad (40)$$

그리고 (17)에 $m=1^-$ 의 조건을 대입하면 (34)에 주어진 결과가 되는데 관련된 식들을 함께 모으기 위하여 여기에 반복해 기술한다.

$$C^-(z) = C(z, 1^-) \quad (41)$$

어떤 신호가 매 샘플링 순간마다 불연속이 있을 때, 이 점프 불연속을 기술하는 수열의 표현이 이론적으로 관심의 대상이다. 이 수열의 z 변환은 (37)의 $C^+(z)$ 와 (41)의 $C^-(z)$ 의 차이로 표현된다.

$$D(z) = C^+(z) - C^-(z) = zC(z, 0^+) - C(z, 1^-) \quad (42)$$

따라서 (42)의 역 z 변환으로 점프 불연속을 기술하는 수열을 구할 수 있다:

$$d_k = d(kT) = Z^{-1}[zC(z, 0^+) - C(z, 1^-)] , \quad k \geq 0 \quad (43)$$

요약하면, 샘플링 순간마다 점프 불연속을 가지는 경우까지도 포함하여, 어떤 연속함수의 변형 z 변환 $C(z, m)$ 이 입력의 z 변환 $E(z)$ 와 플랜트의 변형 z 변환 $G(z, m)$ 의 곱 $E(z)G(z, m)$ 로 주어지는데, 이 경우 일반 z 변환 $C(z)$, 매 샘플링 주기 $kT \leq t < kT + T$ 에서의 연속 시간함수 $c(t)$, 매 샘플링 순간의 우극값 $c(kT^+)$, 그리고 좌극값 $c(kT^-)$, 그리고 샘플링 순간마다의 점프 불연속값 $d(kT)$ 는 각각 (37), (24), (35), (40), 그리고 (43)으로 구할 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서는 연속 플랜트가 임펄스 입력에 반응하는 경우, 출력 $c(t)$ 는 일반적으로 연속함수이지만 매 샘플링 순간마다 점프 불연속을 나타내는데, 이 때문에 입력과 출력의 대수관계인 전달함수 관계의 규정에 불명확성이 나타남을 보여주었다. 따라서 불연속 함수까지를 포함하여 모든 경우에 다 적용될 수 있는 일반 전달함수 관계를 규정하기 위하여 기존의 일반 z 변환을 좌극 z 변환 $C^-(z)$ 과 우극 z 변환 $C^+(z)$ 로 세분하였다. 출력이 불연속을 나타내지 않는 경우에는 $C^-(z)$ 와 $C^+(z)$ 는 같아진다고 쉽게 결론을 내릴 수 있지만, 일반적으로 모든 출력이 불연속이 없는 것은 아니다. 일반 디지털제어공학 교재들에서 기술하는 $C(z)$ 는 실지로는 우극 z 변환 $C^+(z)$ 를 뜻함을 본 논문에서 명확히 하였다. 본 논문은 세분화된 새로운 z 변환을 이용하여 변형 z 변환의 여러 특성들을 수정하고 해석을 명확히 하여, 샘플-데이터 제어시스템 분석에 있어서 샘플링 순간에 불연속성을 보여주는 경우까지를 포함하여 샘플링 간격사이의 연속신호를 이론적 오류가 없이 해석적으로 표현이 가능하게 하도록 하였다.

참 고 문 헌

[1] Kuo, B. C., *Digital Control Systems*, 2nd ed., Saunders College Publishing, Ft. Worth, 1992
 [2] Phillips, C. L., and H. T. Nagle, Jr., *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984
 [3] Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987
 [4] Franklin, G. F., J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990
 [5] Jury, E. I., and Farmanfarma, "Tables of z-Transforms and Modified z-Transforms of Various

Sampled-Data Systems Configurations," Univ. of California, Berkeley, Electronics Research Lab., Report 136A, Ser. 60, 1955

[6] Jury, E. I., "Additions to the Modified z-Transform Method," *IRE WESCON Convention Record*, part 4, pp. 136-156, 1957
 [7] Jury, E. I., *Sampled-Data Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958
 [8] Mesa, W., and C. L. Phillips, "A Theorem on the Modified z-Transform," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-10, p. 489, October 1965
 [9] Jury, E. I., "A Note on Multirate Sampled-Data Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-12, pp. 319-320, June 1967

저 자 소 개



정 태 상 (鄭 台 相)

1978년 서울대 전기공학과 (학사)
 1982년 미국 Ohio 주립대 (석사)
 1985년 미국 Ohio 주립대 (박사)
 1986~1992년 미국 Kentucky 대 조교수
 1992~현재 중앙대 전자전기공학부 교수
 Tel : (02) 820-5321
 Fax : (02) 823-2492
 E-mail : tschung@jupiter.cie.cau.ac.kr



이 재 석 (李 宰 碩)

1994년 중앙대 제어계측공학과 (학사)
 1999년 중앙대 제어계측공학과 (석사)
 1999~현재 중앙대 제어계측공학과 박사과정
 Tel : (02) 825-1644, Fax : (02) 823-2492
 E-mail : icarus@piano.cie.cau.ac.kr