

개선된 블록 펄스 계수 추정 기법을 이용한 선형 시불변계의 상태 추정에 관한 연구

論 文

51D-4-2

A Study on The State Estimation of The Time-Invariant Linear Systems via The Improved Parameter Estimation Method for The Block Pulse Coefficients

金 泰 勳* · 金 珍 泰** · 鄭 堤 旭*** · 沈 在 先[§]
(Tai-Hoon Kim · Jin-Tae Kim · Je-Wook Chung · Soo Ahn)

Abstract - Because Block Pulse functions are used in a variety of fields such as the analysis and controller design of systems, it is necessary to find the more exact value of the Block Pulse series coefficients. This paper presents a method for the state estimation of the time-invariant linear systems via the improved estimation method for the Block Pulse coefficients by using the Simpson's rule.

The proposed method using the Simpson's rule improve the accuracy of the Block Pulse coefficients

Key Words : Block Pulse coefficients, Simpson's rule, State estimation, Time-invariant Linear system

1. 서 론

직교함수들은 시스템의 제반 문제들을 대수적 접근 방식에 의하여 쉽게 해결할 수 있도록 하기 때문에 지금까지 많이 사용되어 왔으며[1-3], 직교 함수를 사용하는 경우 오차가 적은 직교 함수 급수의 계수를 구하는 것은 시스템 문제를 해결하는데 있어서 가장 중요한 문제들 중의 하나이다. 특히 이산화된 데이터 형식으로 입력되는 데이터들의 변화 폭이 큰 경우 상대적으로 큰 오차가 발생된다는 문제점을 가지고 있으며, 이러한 경우 직교 함수 급수의 원래 정의대로 적분을 통하여 급수의 계수를 구하는 것은 불가능하므로 근사화된 계수값을 사용할 수밖에 없다. 그런데, 기존의 방식들은 각 구간에서의 함수값에 대한 평균을 블록 펄스 계수로 사용하는 것이었으므로[4-6], 블록 펄스 급수의 계수를 구하는 과정에서 필연적으로 오차를 포함하게 되는 문제점을 안고 있었다.

본 논문에서는 Simpson의 적분 규칙을 사용하는 보간법을 이용하여 새로운 블록 펄스 급수 계수 추정 기법을 제안하고, 이를 선형 시불변계에 적용함으로써 기존의 계수 추정 기법보다 정확성을 향상시킬 수 있음을 보였다.

2. 보간법의 적용

서로 다른 $(n + 1)$ 개의 점 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 값을 알고 있을 경우에, 구간 $[a, b]$ 사이에 존재하는 x_k 는 다음의 식을 만족하게 된다.

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b \text{ 와 } y_k = f(x_k)$$

이 $n+1$ 개의 점을 지나는 n 차의 다항식 $p(x)$ 를 구하는 방법을 보간법(interpolation)이라고 하며, 이렇게 구한 다항식 $p(x)$ 를 보간 다항식(interpolation polynomial)이라고 한다. 또한 서로 다른 $(n + 1)$ 개의 점 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 들을 마디점(node point)라고 한다. 이렇게 구한 보간 다항식 $p(x)$ 를 사용하여 x_0 와 x_n 사이 또는 그 구간 밖의 x 에 대한 값을 구할 수 있다[7].

3. Simpson의 적분 규칙

일반적으로 같은 정도의 계산 횟수로 사다리꼴 방법보다 더 정확한 수치 적분값을 구하는 방법이 알려져 있는데, 이것은 선형 보간 다항식 대신 이차 보간 다항식을 사용하여 정적분의 수치 적분값을 구하는 방법이며, 이 방식은 'Simpson의 적분 규칙(Simpson's rule)'이라고 한다[8].

다음의 그림 3.1과 같이 세 점 $a, c = (a + b)/2, b$ 에서의 $f(x)$ 에 대한 이차 보간 다항식을 $p_2(x)$ 라고 하면, Lagrange 형태의 보간 다항식 $p_2(x)$ 는 다음과 같다.

* 正 會 員 : 韓 國 情 報 保 護 振 興 院 選 任 研 究 員
** 正 會 員 : 成 均 館 大 電 氣 電 子 및 컴퓨터工學部 博士課程
*** 正 會 員 : 비즈로컴 研究所長
[§] 正 會 員 : 삼척대 電氣工學科 教授
接受H字 : 2001年 12月 22H
最終完了 : 2002年 2月 6H

$$p_2(x) = f(a) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b) \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c) \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \quad (3.1)$$

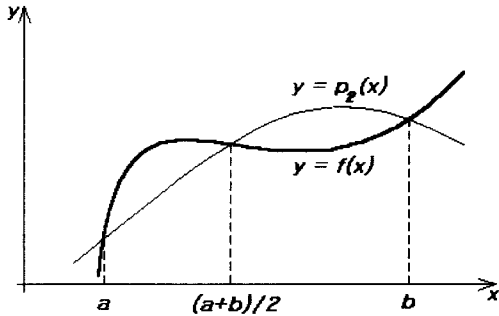


그림 3.1 Simpson 적분방법
Fig. 3.1 Simpson's rule

식 (3.1)에서 마디점들이 등간적이고 간격의 차이가 h 라고 한다면, 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$b = a + 2h, c = a + h \text{ (단, } h = (a + b)/2) \quad (3.2)$$

또한 식 (3.1)에서 $x = a + ht$ 로 치환하고 $dx = h dt$ 를 이용하면 적분을 더 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p_2(x) dx \\ &\approx f(a) \int_0^2 \frac{h(t-2)(h(t-1))}{(-2h)(-h)} h dt \\ &\quad + f(b) \int_0^2 \frac{ht h(t-1)}{(2h)(h)} h dt \\ &\quad + f(c) \int_0^2 \frac{ht h(t-2)}{(h)(-h)} h dt \\ &= f(a) \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt + f(b) \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2 - t) dt \\ &\quad - f(c) h \int_0^2 (t^2 - 2t) dt \\ &= f(a) \frac{h}{2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_{t=0}^{t=2} \\ &\quad + f(b) \frac{h}{2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=2} - f(c) h \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_{t=0}^{t=2} \\ &= f(a) \frac{h}{2} \left(\frac{2}{3} \right) + f(b) \frac{h}{2} \left(\frac{2}{3} \right) - f(c) h \left(\frac{-4}{3} \right) \\ &= \frac{h}{3} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad (3.3) \end{aligned}$$

따라서 Simpson의 적분 공식은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x) dt \doteq \frac{h}{3} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad (3.4)$$

이제 Simpson 적분 방법의 오차를 생각해보도록 한다.

계산을 간단히 하기 위하여 소구간을 $[x_0, x_2]$ 라고 가정하고 오차를 구해 보도록 하자. 오차 E 는 보간 다항식의 오차 정리[9]에 의하여 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$E = \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x] dx \quad (3.5)$$

$g(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ 가 $x = x_1$ 에서 부호가 변하므로 적분에 관한 평균값 정리[10]를 사용하는 것은 불가능하다. 다음의 식 (3.6)과 같이 정의하면

$$w(x) = \int_{x_0}^x (t-x_0)(t-x_1)(t-x_2) dt \quad (3.6)$$

$w(x_0) = w(x_2) = 0$ 이고, 구간 $[x_0, x_2]$ 에서 $w(x) > 0$ 이다. 부분적분을 이용하면 식 (3.6)은 다음의 식 (3.7)과 같다.

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_0}^{x_2} \dot{w}(x) f[x_0, x_1, x_2, x] dx \\ &= w(x) f[x_0, x_1, x_2, x] \Big|_{x=x_0}^{x=x_2} \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_2} w(x) \frac{d}{dx} f[x_0, x_1, x_2, x] dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_2} w(x) f[x_0, x_1, x_2, x, x] dx \quad (3.7) \end{aligned}$$

적분에 관한 평균값 정리를 이용하면 오차는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} E &= -f[x_0, x_1, x_2, \eta, \eta] \int_{x_0}^{x_2} w(x) dx \\ &= \frac{f^{(24)}(\xi)}{24} \frac{4}{15} h^5, \quad (x_0 < \xi < x_2) \\ &= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad (x_0 < \eta < x_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

따라서 m 항 전개 미소구간에서의 블록 펄스 급수 계수의 오차는 다음의 식 (3.9)와 같게 된다.

$$E = -m \times \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (3.9)$$

4. 블록 펄스 계수 추정 기법

4.1 기존의 블록 펄스 계수의 추정

기존에 사용하던 블록 펄스 급수 전개 기법은, 원래의 함수 $f(t)$ 가 구분 연속 상수값의 함수 $\hat{f}(t)$ 에 의하여 근사화될 수 있음을 의미하는 것이며, 이러한 근사화는 구간 $t \in [0, t_j]$ 에서 $f(t)$ 와 $\hat{f}(t)$ 사이의 평균자승오차를 표시하는 식 (4.1)의 최소값에 도달하는 것이다[11].

$$\varepsilon = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} F_j \psi_j(t) \right]^2 dt \quad (4.1)$$

식 (4.1)이 최소값이 되기 위해서는 다음 조건을 만족하여야 하며,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial F_i} = -\frac{2}{t_f} \int_0^{t_f} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} F_j \psi_j(t) \right] \psi_i(t) dt = 0 \quad (4.2)$$

그리고 블록 펄스 함수의 직교성으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{ih}^{(i+1)h} F_i \psi_i(t) dt = \int_{ih}^{(i+1)h} f(t) \psi_i(t) dt \quad (4.3)$$

따라서, 식 (4.2)의 평균자승오차 ε 을 최소로 하기 위한 필요조건으로 블록 펄스 계수 $F_i (i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F_i = \frac{1}{h} \int_0^{t_f} f(t) \psi_i(t) dt = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} f(t) dt \quad (4.4)$$

식 (4.4)는 블록 펄스 계수들의 기하학적인 의미를 나타내며, i 번째 블록 펄스 계수 F_i 는 i 번째 미소구간에서 원래 함수 $f(t)$ 의 적분 평균값이다. 다시 말하면, i 번째 블록 펄스 계수 F_i 는 $f(t)$ 의 곡선중 미소구간 $t \in [ih, (i+1)h)$ 에서의 면적과 관계가 있는 것이다.

하지만 만일 함수 $f(t)$ 의 정적분을 구할 수 없는 경우라면, 일반적으로 사용하는 적분 방법을 이용하는 것 자체가 불가능하며, 이럴 경우에는 블록 펄스의 폭 h 가 충분히 작다고 가정할 후 다음과 같은 단순한 관계로부터 근사적으로 블록 펄스 계수들을 결정할 수 있다[12].

$$F_i \approx \frac{1}{2} \{ f(t_i) + f(t_{i+1}) \} \quad (4.5)$$

단, $f(t_i)$ 와 $f(t_{i+1})$ 은 $t = ih$ 와 $t = (i+1)h$ 에서의 $f(t)$ 의 값

그러나 식 (4.5)는 각각의 블록 펄스 계수가 미소구간의 두 끝점들에서의 원래 함수의 평균값에 의해서 근사화됨을 나타내는 것이다. 일반적으로 사용되어 온 이 방법을 사용할 경우, 블록 펄스 계수는 각각의 구간에 대한 함수 $f(t)$ 의 평균값이므로 곡선인 구간에서는 식 (4.4)에 대한 근사적인 식 (4.5)의 오차가 커지게 된다.

4.2 Simpson 적분 규칙을 이용한 블록 펄스 계수 추정

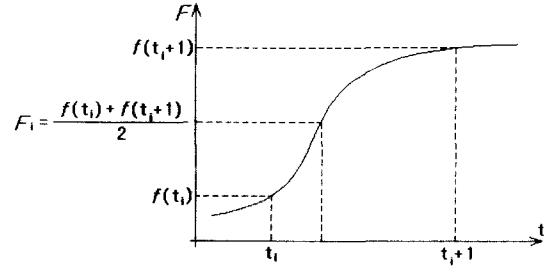


그림 4.1 기존의 블록 펄스 계수

Fig. 4.1 Common block pulse coefficient

일반적으로 같은 정도의 계산 횟수로 사다리꼴 방법보다 더 정확한 수치 적분값을 구하는 방법으로, 이차 보간 다항식을 사용하여 정적분의 수치 적분값을 구하는 ‘Simpson의 적분 방법(Simpson’s rule)’이 알려져 있다. 다음의 그림 4.2와 같이 세 점 $t_i, c = (t_i + t_{i+1})/2, t_{i+1}$ 에서의 $f(t)$ 에 대한 이차 보간 다항식을 $p_2(t)$ 라고 하면, Lagrange 형태의 보간 다항식 $p_2(t)$ 는 다음과 같다.

$$p_2(t) = f(t_i) \frac{(x-t_{i+1}) \left(x - \frac{t_i+t_{i+1}}{2} \right)}{(t_i-t_{i+1}) \left(t_i - \frac{t_i+t_{i+1}}{2} \right)} + f(t_{i+1}) \frac{(x-t_i) \left(x - \frac{t_i+t_{i+1}}{2} \right)}{(t_{i+1}-t_i) \left(t_{i+1} - \frac{t_i+t_{i+1}}{2} \right)} + f\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right) \frac{(x-t_i)(x-t_{i+1})}{\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2} - t_i\right) \left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2} - t_{i+1}\right)} \quad (4.9)$$

식 (4.9)에서 마디점들이 등간격이고 간격의 차이가 h 라고 한다면, 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$t_{i+1} = t_i + 2h, \frac{t_i + t_{i+1}}{2} = t_i + h \quad (4.10)$$

단, $h = (t_i + t_{i+1})/2$

또한 식 (4.9)에서 $x = t_i + ht$ 로 치환하고 $dx = h dt$ 를 이용하면 식 (3.4)에서와 같은 Simpson의 적분 공식을 이용하여 다음의 식 (4.11)과 같이 블록 펄스 계수를 쉽게 구할 수 있다.

$$F_i = \frac{h}{3} \left[f(t_i) + 4f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) + f(t_{i+1}) \right] \quad (4.11)$$

5. 블록 펄스 계수 추정 방식의 비교

다음과 같은 정적분이 가능한 함수가 주어진 경우를 고려하도록 한다.

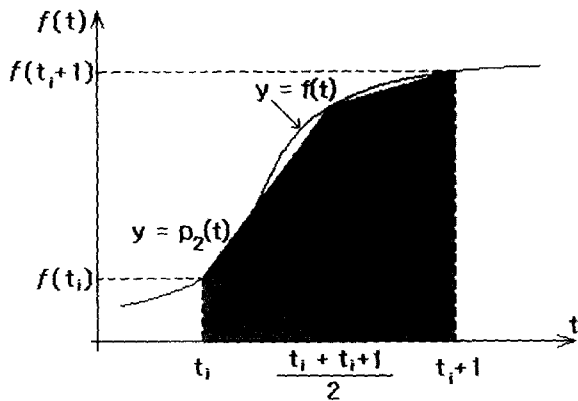


그림 4.2 Simpson 적분 공식을 이용한 블록 펄스 계수
Fig. 4.2 Block pulse coefficients obtained by Simpson's rule

$$f(t) = t^4 \tag{5.1}$$

이 함수를 구간 $t \in [0, 1]$ 에서 4항 전개 ($m = 4$)하는 경우에 블록 펄스 계수의 값을 구하여 보도록 하자.

5.1 실제 적분을 이용하는 방법

식 (4.4)로 주어지는 공식을 이용하여 블록 펄스 계수의 정확한 값을 구하면 다음과 같다.

$$f_1 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_1 dt = \frac{4}{5} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^5 - 0^5 \right) = \frac{1}{1280} \tag{5.2a}$$

$$f_2 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_2 dt = \frac{4}{5} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^5 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right) = \frac{31}{1280} \tag{5.2b}$$

$$f_3 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_3 dt = \frac{4}{5} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^5 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right) = \frac{211}{1280} \tag{5.2c}$$

$$f_4 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_4 dt = \frac{4}{5} \left(1^5 - \left(\frac{3}{4} \right)^5 \right) = \frac{781}{1280} \tag{5.2d}$$

따라서 $f(t) = t^4$ 의 블록 펄스 계수는 다음과 같이 표시된다.

$$f(t) \doteq \frac{1}{1280} \psi_1(t) + \frac{31}{1280} \psi_2(t) + \frac{211}{1280} \psi_3(t) + \frac{781}{1280} \psi_4(t) \tag{5.3}$$

5.2 기존의 근사식을 이용하는 방법

일반적으로 사용하고 있는 식 (4.5)로 주어지는 공식을 이용하여 블록 펄스 계수의 값을 구하면 다음과 같다.

$$f_1 = \frac{1}{2} \left(0^4 + \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right) = \frac{1}{512} \tag{5.4a}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right) = \frac{17}{512} \tag{5.4b}$$

$$f_3 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^4 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 \right) = \frac{97}{512} \tag{5.4c}$$

$$f_4 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^4 + 1^4 \right) = \frac{337}{512} \tag{5.4d}$$

따라서 $f(t) = t^4$ 의 블록 펄스 계수는 다음과 같이 표시된다.

$$f(t) \doteq \frac{1}{512} \psi_1(t) + \frac{17}{512} \psi_2(t) + \frac{97}{512} \psi_3(t) + \frac{337}{512} \psi_4(t) \tag{5.5}$$

5.3 Simpson 공식을 이용하는 방법

Simpson 공식인 식 (4.11)로 주어지는 공식을 이용하여 블록 펄스 계수의 값을 구하면 다음과 같다.

$$f_1 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_1 dt \doteq 4 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \left(\left(\frac{1}{8} \right)^4 + \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right) = \frac{5}{6144} \tag{5.6a}$$

$$f_2 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_2 dt \doteq 4 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \left(\left(\frac{1}{4} \right)^4 + 4 \left(\frac{3}{8} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right) = \frac{179}{6144} \tag{5.6b}$$

$$f_3 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_3 dt \doteq 4 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^4 + 4 \left(\frac{5}{8} \right)^4 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 \right) = \frac{1013}{6144} \tag{5.6c}$$

$$f_4 = 4 \int_0^1 t^4 \psi_4 dt \doteq 4 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \left(\left(\frac{3}{4} \right)^4 + 4 \left(\frac{7}{8} \right)^4 + 1^4 \right) = \frac{3749}{6144} \tag{5.6d}$$

따라서 $f(t) = t^4$ 의 블록 펄스 계수는 다음과 같이 표시된다.

$$f(t) \doteq \frac{5}{6144} \psi_1(t) + \frac{179}{6144} \psi_2(t) + \frac{1013}{6144} \psi_3(t) + \frac{3749}{6144} \psi_4(t) \tag{5.7}$$

식 (5.2)부터 식 (5.7)까지로 구한 각각의 블록 펄스 계수들 중에서, 일반적으로 사용하여 온 기존의 접근 방식에 의한 값과 Simpson 공식에 의한 값을 비교한 결과를 정리하여 그림 5.1에 표시하였다(실제값과 본 논문에서 제안한 방식을 사용한 값은 곧 일치하게 된다). 또한 Simpson 공식에 의한 방법에 대한 미소구간 오차 E 는, 식(3.9)를 이용하여 확인하는 것이 가능하다.

$$E = 4 \times \left(\frac{h^5}{90} \right) f^{(4)}(\xi) \approx 3.2552083E-05 \quad (5.8)$$

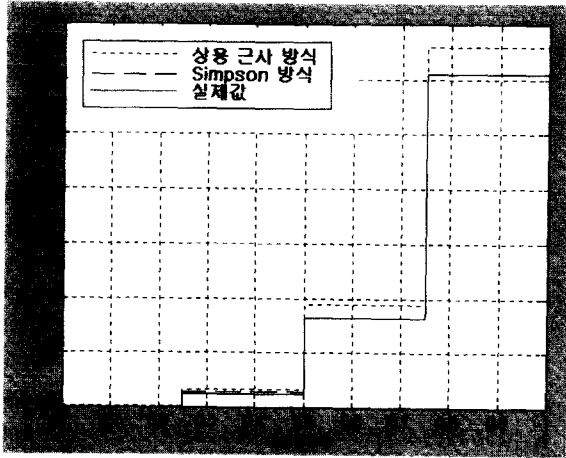


그림 5.1 t^4 에 대한 블록 펄스 계수
Fig. 5.1 Block Pulse coefficient of t^4

6. 선형 시불변계의 상태 추정

다음의 식 (6.1)과 같은 상태 방정식으로 표현되는 선형 시불변 시스템을 고려하여 보도록 하자.

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \quad (6.1)$$

이 경우의 출력 방정식은 다음의 식 (6.2)와 같다.

$$Y(t) = C X(t) + D U(t) \quad (6.2)$$

단, $U \in R^r$, $X \in R^n$, $Y \in R^p$, $A \in R^{n \times n}$,
 $B \in R^{n \times r}$, $C \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times r}$

블록 펄스 영역에서, 상태 공간 방정식으로 표현된 연속 시간 선형 시불변 시스템을 해석하는 문제는 단일 입출력 표현식 시스템의 해석과 유사한 것으로, 유한 시구간 $t \in [0, T)$ 에서의 입력 $U(t)$ 와 출력의 초기값 등을 이용하여 출력 $Y(t)$ 의 블록 펄스 계수를 구하는 것이 된다.

식 (6.1)의 선형 시불변 시스템 양변을 0부터 t 까지 적분 하면 다음의 식 (6.3)과 같이 표현된다.

$$X(t) - X(0) = A \int_0^t X(t) dt + B \int_0^t U(t) dt \quad (6.3)$$

입력 벡터 $U(t)$ 와 상태 벡터 $X(t)$ 를 블록 펄스 급수로 전개하면 각각 다음의 식 (6.4)와 같게 되고,

$$U(t) = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_m] \Phi(t) \quad (6.4a)$$

$$X(t) = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_m] \Phi(t) \quad (6.4b)$$

이것을 식 (6.3)에 대입하면 다음의 식 (6.5)를 얻을 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} & [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_m] \Phi(t) \\ & - [X(0) \quad X(0) \quad \dots \quad X(0)] \Phi(t) \\ & = A [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_m] P \Phi(t) \\ & + B [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_m] P \Phi(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

특별한 상삼각 형태를 갖는 상용 적분 연산 행렬 P 를 이용하는 경우에는 각 블록 펄스 함수 $\psi_k(t)$ (단, $k = 1, 2, \dots, m$)의 계수들을 동일하게 놓음으로써 m 개의 방정식을 얻을 수 있으며, 이 중에서 k 번째의 방정식을 $E_{(k)}$ 라고 하면 다음의 식 (6.6)으로부터

$$X_k - X(0) = \frac{h}{2} (A X_k + B U_k) + h \sum_{j=1}^{k-1} (A X_j + B U_j) \quad (6.6)$$

상태 벡터의 블록 펄스 계수들을 연속적으로 구할 수 있다.

$$X_k = \Gamma \left(X(0) + \frac{h}{2} B U_k + h \sum_{j=1}^{k-1} (A X_j + B U_j) \right) \quad (6.7)$$

단, $\Gamma = \left(I - \frac{h}{2} A \right)^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, m-1$

하지만 식 (6.7)의 경우에는 모든 항을 계산할 때마다 첫 번째 항인 X_1 부터 다시 계산을 하여야 한다는 단점이 있으므로, 차분 방정식 형태를 도입하여 이 문제를 해결할 수 있다.

k 번째 항과 $k+1$ 번째 항의 관계로부터,

$$\begin{aligned} X_k - X(0) &= \frac{h}{2} (A X_k + B U_k) \\ &+ h \sum_{j=1}^{k-1} (A X_j + B U_j) \\ X_{k+1} - X(0) &= \frac{h}{2} (A X_{k+1} + B U_{k+1}) \\ &+ h \sum_{j=1}^k (A X_j + B U_j) \end{aligned}$$

다음의 식 (6.8)을 구할 수가 있다.

$$\begin{aligned} X_{k+1} - X_k &= \frac{h}{2} A (X_{k+1} + X_k) \\ &+ \frac{h}{2} B (U_{k+1} + U_k) \end{aligned} \quad (6.8)$$

식 (6.8)을 이용하면, 상태 벡터 $X(t)$ 의 블록 펄스 계수는 다음의 식 (6.9)를 통하여 반복적으로 구할 수 있게 된다.

$$X_{k-1} = \Gamma \left(\left(I + \frac{h}{2} A \right) X_k + \frac{h}{2} B (U_{k-1} + U_k) \right) \quad (6.9)$$

반복 연산을 수행하기 전에, 식 (6.7)로부터 첫 번째 항 X_1 은 다음의 식 (6.10)과 같이 구하도록 한다.

$$X_1 = \Gamma \left(X(0) + \frac{h}{2} B U_1 \right) \quad (6.10)$$

6.1 시뮬레이션

식 (6.1)과 같이 표현되는 선형 시불변 시스템의 상태에 대하여, 구간 $t \in [0, 1)$ 에서 8항 전개한 경우의 블록 펄스 계수들을 구하여 보도록 하자. 우선 파라미터 행렬들이 다음과 같이 주어졌다고 가정한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

또한 초기 조건은 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ 으로 하고 각 입력은 단위 계단 입력으로 한다. 이 경우의 실제 상태 변수들은 다음과 같이 구할 수 있게 된다.

$$x_1(t) = \frac{16}{7} e^{2t} - \frac{3}{35} e^{-5t} - \frac{6}{5} \quad (6.19a)$$

$$x_2(t) = \frac{8}{7} e^{2t} - \frac{9}{35} e^{-5t} - \frac{2}{5} \quad (6.19b)$$

실제값과 식 (4.5)를 이용하는 기존의 방법, 그리고 본 논문에서 제안한 방법을 비교하여 정리하면 다음의 표 6.1, 표 6.2와 같다.

7. 결 론

블록 펄스 함수를 사용하여 시스템 문제를 해결하기 위해서는 먼저 오차가 적은 블록 펄스 급수의 계수를 구하여야 하는데, 이 경우 기존에는 각 구간에서의 함수값에 대한 평균을 블록 펄스 계수로 사용하는 방식을 사용하였다. 하지만 이와 같은 평균값을 사용하는 방식은 함수가 급격한 변화를 포함하고 있는 경우에 정확한 값을 나타낼 수 없게 된다.

본 논문에서는 Simpson의 적분 규칙을 이용하는 새로운 블록 펄스 급수 계수 추정 기법을 제안하고, 이를 상태 방정식으로 표현된 선형 시불변계의 해석에 적용함으로써 기존의 계수 추정 기법보다 정확성을 향상시킬 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

[1] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "A State-space Approach to Walsh Series Solution of Linear System", Int. J. Systems Sci. Vol. 6, pp.929-935, 1975

표 6.1 x_1 의 블록 펄스 급수 계수값(m=8)

Table 6.1 Block Pulse Series Coefficients of x_1 (m=8)

계수 전개항수	x_1 의 값		
	실제값	기존의 방법	본 논문에서 제안한 방법
1	1.333068411826	1.346938775510	1.283490294061
2	2.100249626059	2.124392614188	2.091403970912
3	3.063149968697	3.100282289786	3.050754678901
4	4.287666471869	4.342586532507	4.271877429492
5	5.853622155790	5.933333816041	5.834032200888
6	7.860947667391	7.975175022780	7.836976468235
7	10.436584012074	10.598615702527	10.407460918384
8	13.742792028826	13.970676528007	13.707586936809

표 6.2 x_2 의 블록 펄스 급수 계수값(m=8)

Table 6.2 Block Pulse Series Coefficients of x_2 (m=8)

계수 전개항수	x_2 의 값		
	실제값	기존의 방법	본 논문에서 제안한 방법
1	1.089620403128	1.102040816326	1.079761675956
2	1.369534249634	1.381924198250	1.355858395537
3	1.795490249964	1.812855754546	1.786194212254
4	2.378044612312	2.404143776072	2.368637284393
5	3.145123108086	3.183874317925	3.134662416678
6	4.140275557135	4.196600916578	4.128006304839
7	5.423538490527	5.504029158743	5.408864703337
8	7.074204255196	7.187811329826	7.056562956221

[2] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Time Domain Synthesis via Walsh Function", Proc. IEEE, Vol. 122, No. 5, pp. 565-570, May, 1975

[3] K. R. Palanisamy and V.P. Arunachalam, "Analysis of Vibrating System via Walsh Series Approach", Int. J. Sys. Sci., Vol.18, No.8, pp. 1457-1466, 1987

[4] K. R. Palanisamy, "Analysis and Optimal Control of Linear Systems via Single Term Walsh Series Approach", Int. J. Sys. Sci., Vol. 12, No. 4, pp. 541-547, 1985

[5] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Walsh Series Analysis in Optimal Control," Int. J. Control, Vol.21, pp. 881-897, 1975

[6] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions," IEEE Trans. Automatic Control, Vol.20, pp. 596-602, 1975

- [7] S. Omatu, "Optimal Sensor Location Problem for a Linear Distributed Parameter Systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.23, pp.665-673, 1978
- [8] G. Lauster, "Distributed State Estimation and Optimal Feedback Control", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.24, pp.197-, 1979
- [9] Shuh-Chuan Tsay and Tsu-Tian Lee, "Analysis and Optimal Control of Linear Time-varying Systems via General Orthogonal Polynomials", Int. J. System Science, vol.18, no.8, pp.1579-1594, 1987
- [10] 안두수, 제어 시스템 해석을 위한 직교함수와 응용, 북두출판사, 1997
- [11] 정상권, 이승래, 권옥현, CEMTool 수치해석, 도서출판한산, 2000
- [12] J. Douglas Faires and Richard L. Burden, Numerical Analysis, PSW publishing company, 1993
- [13] 김창근, 수치해석, 교우사, 1997

저 자 소 개



김 태 훈(金 泰 勳)

1971년 2월 1일생. 1995년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1997년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 2002년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(박사). 2002년~현재 한국정보보호진흥원 선임연구원

Tel : (02) 405-5323
E-mail : taihoon@netsgo.com



김 진 태(金 珍 泰)

1972년 1월 1일 생. 1997년 경성대학교 공대 전기공학과 졸업. 1999년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~2001년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사과정 수료

Tel : (031) 290-7167
E-mail : oshkjt@ece.skku.ac.kr

정 제 욱(鄭 堤 旭)

전기학회 논문집 50D-6호 저자참조



심 제 선(沈 在 先)

1950년 7월 23일생. 1973년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1979년 단국대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1989년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(박사). 1975년~현재 삼척대학교 전기공학과 교수

Tel : (033) 570-6340