

# 적응 $H_\infty$ 제어기의 설계에 관한 연구

## - 다항식 접근방법

論 文

51D-4-1

### A Study on the Design of Adaptive $H_\infty$ Controller - Polynomial Approach

金 玟 贊\* · 朴 勝 圭\*\* · 金 泰 元\*\*\* · 安 鎬 均\*\*

(Min-Chan Kim · Seung-Kyu Park · Tae-Won Kim · Ho-Gyun Ahn)

**Abstract** - This paper presents a  $H_\infty$  robust controller with parameter estimation in polynomial approach. For good performance of a uncertain system, the parameters are estimated by RLS algorithm. The controller minimizes the sum of  $H_\infty$  norm between sensitivity function and complementary sensitivity function by employing the Youla parameterization and polynomial approach at the same time. A numerical example and its simulation results are given to show the validity of the proposed controller

**Key Words** :  $H_\infty$  controller, robust control, parameter estimation, RLS algorithm, polynomial approach

#### 1. 서 론

시스템의 설계자의 궁극적인 설계 목적은 실제 환경에서도 설계된 시스템이 목적에 맞게 잘 동작하게 만들어야 한다는 것이다. 실질적으로 시간이 지나감에 따라 시스템 구성요소들이 노화된다거나 파라미터들이 온도나 다른 환경적 조건들에 의해서 변화될 수 있고 부화 변화나 외란과 같은 운전 조건들이 바뀔 수 있기 때문에 제어 시스템은 이러한 상황들을 잘 견딜 수 있어야 한다. 비록 환경이 변하지 않는 경우에도 모델의 불확실성이 또 다른 문제로 설정될 수가 있다. 종종 우리가 물리계를 수학적인 모델링 식으로 표현할 때 간략화를 위해서 여러 가정을 필요로 하게 된다. 특히 비선형성은 알 수가 없어서 모델링을 할 수가 없거나 모델링에 포함될 지라도 나중에 해석을 간략화하는 과정에서 무시되는 경우가 많다. 그 결과 제어 시스템은 간략화 되어서 설계되기 때문에 실제 환경에서의 시스템이 잘 동작하리라고는 보장할 수가 없다. 따라서 제어기 설계를 위한 시스템의 모델이 실제의 시스템과 같지 않을 경우 모델에 근거한 제어기 설계 기법에서 도출된 시스템의 안정성과 성능이 실제 시스템에서는 어떻게 달라지는가에 대한 연구에 많은 관심을 두고 있는데 그 결과 제어기 설계에서 근본적으로 요구되는 폐루프 시스템의 안정성을 잃는 등 심각한 문제가 초래 될 수도 있는 것이다. 따라서 제어 시스템이 실제적 환경에서도 적절하게 운전될 수 있는 강인성(robustness)이라는 특성을 가진 견실 제어기(robust controller)가 많이

연구되고 있다.

견실 제어기 설계 기법 중의 하나인  $H_\infty$  제어기법은 설계자가 제어대상 시스템에 포함된 불확실성의 모델을 결정한 후, 폐루프 시스템이 내부적으로 안정해야 한다는 제한 조건을 만족시키면서 설계자가 결정한 불확실성에 걸맞게 폐루프 시스템의 견실 안정도를 최대화시키려고 하는, 즉 제약조건 하에서 최적화 문제를 푸는 설계기법이라고 할 수 있다.  $H_\infty$  제어 설계기법은 크게 상태공간 접근 방식(state-space approach)과 다항식 접근 방식(polynomial approach)으로 발전해왔다.

상태공간 접근방식  $H_\infty$  제어에서는 외란과 출력 사이에 대한 영향이 상태공간 행렬에 의해서 명확하게 표현되어 있어야 하며 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 외란과 입출력 전달함수의  $H_\infty$ -놈(norm)을 최소화하는 제어이득을 결정하기 위한 리카치 방정식(Riccati Equation)을 만족시키는 조건을 찾아내는 것이며 많은 결과들이 이 방법을 이용하여 발전해왔다.[1][2][3]

반면에 다항식 접근 방식은 Grimble에 의해서 발전되어 왔으며 감도 함수와 부감도 함수의  $H_\infty$ -놈(norm)의 합을 최소화함으로써 단지 입력과 출력 사이의 전달함수만 알고 있는 시스템에서도 미지 외란의 영향을 최소화시킬 수가 있다.[4][5][6][7] 하지만 Grimble 논문에서는 이중 최소값 문제가 나타나고 적응제어에 적합한 전형적인 평가함수로의 접근이 어렵고 하중 함수들이 바뀔 때만 극 배치가 가능하다고 하였으므로 전형적인  $H_\infty$  평가함수를 최소화시키지 못한다.

따라서 본 논문에서는 시스템의 파라미터를 모른다고 가정했을 때 이를 파라미터 추정 알고리즘을 사용하여 파라미터를 추정하며 다항식 접근 방식에서의 이중 최소값 문제를 없애기 위하여 Youla 제어기를 사용함으로써 전형적인

\* 正 會 員 : 昌 原 大 工 大 電 氣 工 學 科 博 士 課 程

\*\* 正 會 員 : 昌 原 大 工 大 電 氣 工 學 科 教 授 · 工 博

\*\*\* 正 會 員 : 昌 原 技 能 大 電 氣 科 助 教 授

接 受 H 字 : 2001 年 4 月 23 日

最 終 完 了 : 2002 年 2 月 19 日

평가함수가 최소화되고 하중 함수들을 변화시키지 않고 극배치가 가능한  $H_\infty$  강인 제어를 설계하는 것이 그 목적이다.

### 2. 이산 시스템의 파라미터 추정 방법

외란과 단일 입출력을 갖는 안정한 연속 시간 시스템  $G(s)$ 를 다음과 같은 ARMAX 모델로 나타낼 수 있다고 가정한다. 그리고 식 표현의 간략화를 위해서 변수  $A(z^{-1})$ 는  $A$ 로 표현하며  $z^{-1}$ 는 시간 지연 연산자이다.

$$Ay(t) = Bu(t) + Cw(t) \quad (1)$$

여기서,  $A = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}$   
 $B = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + \dots + b_mz^{-m}$   
 $C = 1$   
 이며,  $u(t)$ ,  $y(t)$ 는 각각 시스템의 입출력이고  $w(t)$ 는 백색 잡음이나 외란이며  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ),  $b_j$  ( $j=0,1,2,\dots,m$ ) 들은 미지의 파라미터이다. 그리고 각 다항식의 차수  $m, n$ 은 알고 있다고 가정한다.  
 식(1)을 풀어쓰면 다음식과 같다.

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \dots - a_ny(t-n) + b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_mu(t-m) + w(t) \quad (2)$$

위의 식을 쉽게 해석하기 위해서 그 값을 알 수 있는 회귀 벡터와 알지 못해서 추정해야하는 파라미터 벡터로 나누면 다음과 같다.

$$y(t) = \varphi^T(t-1) \theta \quad (3)$$

여기서,  $\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T$ ,  
 $\varphi^T(t-1) = [-y(t-1) \ -y(t-2) \ \dots \ -y(t-n) \ u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-n)]$

이다.  
 결국 식(1)은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$y(t) = \varphi^T(t-1) \theta + w(t) \quad (4)$$

시스템의 파라미터를 추정하기 위해서 추정오차를 이용해야 하므로 추정 파라미터를  $\hat{\theta}(t)$ , 추정 출력( $\hat{y}(t)$ )을  $\varphi^T(t-1) \hat{\theta}(t)$ 라고 하면 추정 오차는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$e(t) = y(t) - \varphi^T(t-1) \hat{\theta}(t) \quad (5)$$

위의 식에서 추정오차가 작아지는 방향으로 추정 파라미터를 변화시킬 수 있으면 실제 파라미터를 추정 할 수 있게 된다. 따라서 시스템의 파라미터를 추정하기 위해서 본 논문에서 도입된 축차최소 자승법(RLS : Recursive Least Square)의 구조는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(k-1) + K(t)e(t) \\ K(t) &= \frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \\ P(t) &= \frac{1}{\lambda} [P(k-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T P(t-1)}{\lambda + \varphi^T P(t-1)\varphi(t)}] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 벡터  $K(t)$ 는 하중 인자이고  $P(t)$ 는 공분산 행렬이다. 또한  $\lambda$ 는 망각 인자이며 그 크기는  $0 < \lambda < 1$  이다.

### 3. 공칭 시스템의 $H_\infty$ 제어기 설계

본 논문에서는 다음 그림과 같은 단일 입력 단출력(SISO) 연속시간 시스템을 고려해보자.

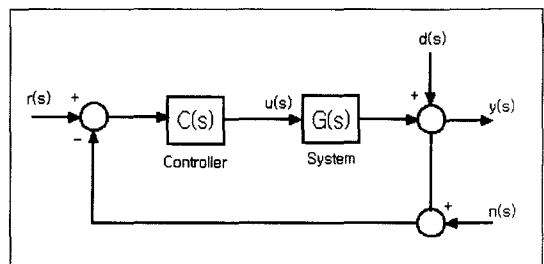


그림 1 외란과 잡음을 포함하는 폐한 제어 시스템의 블록도  
 Fig. 1 Block diagram of a feedback control system containing disturbance and noise

여기서,  $r$ 은 기준 입력이며  $d$ 는 외란 입력,  $n$ 은 센서 혹은 측정 잡음이다.  
 따라서 폐루프 시스템의 출력은 다음식과 같다.

$$y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} r(s) + \frac{1}{1 + C(s)G(s)} d(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} n(s) \quad (7)$$

만약  $e(s) = r(s) - y(s)$  라고 놓으면

$$e(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} r(s) - \frac{1}{1 + C(s)G(s)} d(s) + \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} n(s) \quad (8)$$

그러므로 시스템의 입력은 다음과 같다.

$$u(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} (r(s) - d(s) - n(s)) \quad (9)$$

위의 관계에 의해서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1 + C(s)G(s)} : \text{감도함수} \\ T(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} : \text{부감도함수} \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)에서 두 함수를 동시에 만족하는 함수를 혼합감도 함수라고 한다. 그러므로 위의 두 함수는 모든 주파수 영역

에서 다음 조건을 만족한다.

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (11)$$

출력에서 알 수 있듯이 감도함수와 부감도함수의 이득이 작아야 출력에 미치는 영향을 최소화할 수가 있다. 하지만 감도함수와 부감도함수의 합이 1이므로 두 함수를 동시에 최소화할 수가 없으므로 저주파 성분인 외란을 저주파에서 상쇄시키고 고주파 성분인 센서 혹은 측정잡음을 고주파에서 상쇄시키는 강인 제어를 설계하는 것이 중요하다. 그리고 최소화하려는 값에 하중을 주면 그 값이 더 작아지게 된다. 결국 감도함수와 부감도함수가 다음조건을 만족하도록  $H_\infty$  강인 제어를 설계하여야 한다.

$$\begin{aligned} |S| &\leq W_s^{-1} \quad \text{또는} \quad |W_s S| \leq 1 \\ |T| &\leq W_T^{-1} \quad \text{또는} \quad |W_T T| \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

그림 1에서 이산시간으로 고려한 시스템의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$G = A^{-1}B \quad (13)$$

$H_\infty$  제어를 설계하는데 있어서 Grimble은 다음과 같은 형태의 제어를 사용하였다.

$$C = \frac{N_0}{M_0} \quad (14)$$

여기서  $M_0, N_0$ 는 다음 방정식을 만족하는 안정한 유리함수이다.

$$AM_0 + BN_0 = 1 \quad (15)$$

식(14)와 같은 제어를 사용하면 감도함수와 부감도함수는 다음식을 만족한다.

$$S = \frac{AM_0}{AM_0 + BN_0} \quad (16)$$

$$T = \frac{BN_0}{AM_0 + BN_0} \quad (17)$$

Grimble의 다항식 접근 방법을 사용하려면  $M_0$  나  $N_0$  둘 중 하나로 통일하여 표현한 다음 혼합감도함수를 최소화해야 하지만 식(15)를 만족하면서 혼합감도 함수를 가진  $H_\infty$  평가 함수를 최소화하는  $M_0, N_0$ 를 구하는 것이 쉽지 않다. 따라서 본 논문에서는 이러한 문제점을 해소하기 위해서 직접 구할 수 있는  $M_0, N_0$ 를 사용하고 혼합감도함수의  $H_\infty$ -norm을 최소화하기 위해서 Youla제어를 도입하였다. 강인한  $H_\infty$  제어기 설계의 목적은 다음과 같은 혼합감도함수의 평가함수를 최소화시키는 것이다.

$$J = \|W_1 S\|_\infty^2 + \|W_2 T\|_\infty^2 \quad (18)$$

$$= \sup \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} ((W_1 S)^*(W_1 S) + (W_2 T)^*(W_2 T)) \frac{dz}{z} \quad (19)$$

여기서, S는 감도함수, T는 부감도 함수를 나타내며

$$W_1 = \frac{W_{1n}}{W_{1d}} \quad \text{와} \quad W_2 = \frac{W_{2n}}{W_{2d}}$$

는 하중함수이다.

전형적인 평가함수를 최소화시키기 위해서 다음과 같은 Youla 제어를 사용한다.

$$C = \frac{N_0 + AK}{M_0 - BK} \quad (20)$$

감도함수와 부감도함수는 다음과 같이 된다.

$$S = (M_0 - BK)A \quad (21)$$

$$T = (N_0 + AK)B \quad (22)$$

다항식  $M_0 = \frac{M_{0n}}{M_{0d}}, N_0 = \frac{N_{0n}}{N_{0d}}$  라고 놓고 분모 다항식  $N_{0d}$  ( $= M_{0d}$ )를 안정하게 잡으면 다음식을 만족한다.

$$AM_{0n} + BN_{0n} = N_{0d} \quad (23)$$

따라서 식(23)을 가진 페루프 계통은 내부 안정도가 보장된다. 식(18), 식(19)에서와 같은 평가함수를 최소화하는 식(20)에서의 Youla 제어기의 파라미터 값 K를 결정하기 위해서 다음과 같은 보조정리가 필요하다.

◆ 보조정리

$$J = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} (X_0(z^{-1})\Sigma(z^{-1})) \frac{dz}{z} \quad (24)$$

위의 평가함수에서 실 유리함수  $\Sigma(z^{-1}) = \Sigma^*(z^{-1}) > 0$  인 경우 J가  $|z|=1$  위에서 적분항이  $X_0(z^{-1})\lambda^2$ (실수) 일 때 최소가 되도록 하는 제어기는  $\sup_{|z|=1} \|X_0(z^{-1})\|$ 를 역시 최소화시킨다.

증명 : 참고문헌[8] 참조

식(19)와 식(24)의 관계로부터 는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} X_0(z^{-1})\Sigma(z^{-1}) &= (\overline{W_1}S)^*(\overline{W_1}S) + (\overline{W_2}T)^*(\overline{W_2}T) \\ &= (\overline{W_1}(M_0 - BK)A)^*(\overline{W_1}(M_0 - BK)A) \\ &\quad + (\overline{W_2}(N_0 + AK)B)^*(\overline{W_2}(N_0 + AK)B) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{여기서, } \overline{W_1} = W_1 \frac{B_\sigma}{A_\sigma} = \frac{\overline{W_{1n}}}{\overline{W_{1d}}}, \quad \overline{W_2} = W_2 \frac{B_\sigma}{A_\sigma} = \frac{\overline{W_{2n}}}{\overline{W_{2d}}}$$

$$(A_\sigma, B_\sigma \text{는 실 유리함수}) \quad (26)$$

이다.

위의 식은 스펙트럴 분해(Spectral factorization)에 의해서 다음과 같은 완전제곱 형태의 식이 된다.

$$\begin{aligned} & (Y_f Y_c K + \frac{(-\overline{W_1^* W_1 M_0 A} + \overline{W_2^* W_2 B N_0})(AB)^*}{Y_f^* Y_c^*})^* \\ & (Y_f Y_c K + \frac{(-\overline{W_1^* W_1 M_0 A} + \overline{W_2^* W_2 B N_0})(AB)^*}{Y_f^* Y_c^*}) + \frac{\overline{W_1^* W_1 W_2^* W_2}}{Y_f^* Y_f} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $Y_f^* Y_f = \overline{W_1^* W_1} + \overline{W_2^* W_2}$ ,  $Y_c^* Y_c = (BA)^* BA$ ,

$$Y_f = \frac{Y_{fn}}{Y_{fd}}$$

이다.

식(27)을 최소화하는 K는 안정해야 하기 때문에 다음과 같은 Diophantine 방정식을 도입하면 식(27)은 식(30)과 같이 된다.

$$\overline{W_{1d} M_{0d} F} + \overline{W_{1d}^* Y_{fn}^* Y_c^* G z^{-g}} = \overline{W_{1n}^* W_{1n} M_{0n} A (BA)^* Y_{fd}^* z^{-g}} \quad (28)$$

$$\overline{W_{2d} N_{0d} S} + \overline{W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^* L z^{-gl}} = \overline{W_{2n}^* W_{2n} N_{0n} B (BA)^* Y_{fd}^* z^{-gl}} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & (\frac{Y_f Y_c K \overline{W_{1d} M_{0d}} \overline{W_{2d} N_{0d}} - (G \overline{W_{2d} N_{0d}} - L \overline{W_{1d} M_{0d}})}{\overline{W_{1d} M_{0d}} \overline{W_{2d} N_{0d}}} - \frac{(F \overline{W_{2d} z^g} - S \overline{W_{1d} z^{gl}})}{(\overline{W_{1d}^* W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^*})})^* \\ & (\frac{Y_f Y_c K \overline{W_{1d} M_{0d}} \overline{W_{2d} N_{0d}} - (G \overline{W_{2d} N_{0d}} - L \overline{W_{1d} M_{0d}})}{\overline{W_{1d} M_{0d}} \overline{W_{2d} N_{0d}}} - \frac{(F \overline{W_{2d} z^g} - S \overline{W_{1d} z^{gl}})}{(\overline{W_{1d}^* W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^*})}) \\ & + \frac{\overline{W_1^* W_1 W_2^* W_2}}{Y_f^* Y_f} \end{aligned} \quad (30)$$

여기서, 윗첨자  $g, gl$ 은 Diophantine 방정식이  $z^{-1}$ 의 다항식 해를 갖도록 하기 위해 곱해지는  $z^{-1}$ 의 최저 차수이다. 식(30)은 다음과 같이 간략화 될 수 있다.

$$(T_1 + T_2)^*(T_1 + T_2) + \sum \frac{\overline{W_1^* W_1 W_2^* W_2}}{Y_f^* Y_f} \quad (31)$$

여기서,  $G_a = G \overline{W_{2d} N_{0d}} - L \overline{W_{1d} M_{0d}}$

$$T_1 = \frac{Y_f Y_c K \overline{W_{1d} M_{0d}} \overline{W_{2d} N_{0d}} - G_a}{\overline{W_{1d} M_{0d}} \overline{W_{2d} N_{0d}}}$$

$$T_2 = -\frac{(F \overline{W_{2d} z^g} - S \overline{W_{1d} z^{gl}})}{(\overline{W_{1d}^* W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^*})}$$

$$\sum = (\frac{B_a^* B_a}{A_a^* A_a})$$

식(31)은 나머지 정리(residue theorem)에 의하여 다음 식을 만족한다.

$$T_1^* T_1 + T_2^* T_2 + \sum \frac{\overline{W_1^* W_1 W_2^* W_2}}{Y_f^* Y_f} \quad (32)$$

**(증명)**

식(32)에서  $(T_1 + T_2)^*(T_1 + T_2)$ 를 전개하면 다음과 같다.

$$T_1^* T_1 + T_2^* T_2 + T_1^* T_2 + T_1 T_2^* \quad (33)$$

식(30)에서  $T_1$ 은 Z-평면에서 모든 극점들이 단위원 안에 있으므로 점근적으로 안정(asymptotically stable)하고  $T_2$ 는 모든 극점들이 단위원 밖에 있으므로 엄격하게 불안정(strictly unstable)하다. 그리고 식(33)에서  $T_1^* T_2$ 는 단위원 안에서 해석가능(analytic)하므로 나머지 정리에 의하여 다음과 같다.

$$\oint_{z=1} (T_1^* T_2) \frac{dz}{z} = 0 \quad (34)$$

여기서  $z, \theta$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$z = \exp(j\theta), \quad \theta_1 = -\theta \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \oint_{z=1} (T_1(z) T_2(z^{-1})) \frac{dz}{z} \\ & = \oint_{-\pi}^{\pi} (T_1(\exp(j\theta)) T_2(\exp(-j\theta))) j d\theta \\ & = \oint_{-\pi}^{\pi} (T_1(\exp(-j\theta_1)) T_2(\exp(j\theta_1))) j d\theta_1 \\ & = \oint_{z=1} (T_1(z^{-1}) T_2(z_1)) \frac{dz_1}{z_1} \\ & = \oint_{z=1} (T_1 T_2^*) \frac{dz}{z} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

그러므로 식(34)과 식(36)의 결과에 의해서 식(29)는 다음식을 만족한다.

$$T_1^* T_1 + T_2^* T_2 \quad (37)$$

**(증명끝)**

따라서 식(32)에서  $K = \frac{G_a Y_{fd}}{Y_{fn} Y_c \overline{W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}}}$  일 때  $T_1$ 은 0이다.

위의 조건에서 다음과 같은 식이 성립된다.

$$T_2^* T_2 + \sum \frac{\overline{W_1^* W_1 W_2^* W_2}}{Y_f^* Y_f} \quad (38)$$

여기서 감도함수( $W_1$ )와 부감도함수( $W_2$ )는 서로 상보 관계이기 때문에 선택된  $W_1, W_2$ 의 크기는 같은 주파수에서 둘 중

하나는 작은 값을 가지므로  $\sum \frac{\overline{W_1^* W_1 W_2^* W_2}}{Y_f^* Y_f}$ 는 생략가능하며

식(38)는  $T_2^* T_2$ 가 된다.

앞의 보조 정리를 적용시키면 다음 식이 만족된다.

$$T_2^* T_2 = \sum \lambda^2 \left( \frac{(F W_{2d}^* z^g - S W_{1d}^* z^{gl})}{(W_{1d}^* W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^*)} \right)^* \left( \frac{(F W_{2d}^* z^g - S W_{1d}^* z^{gl})}{(W_{1d}^* W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^*)} \right) = \sum \lambda^2 \quad (39)$$

여기서  $F = F_0 A_\sigma^* B_\sigma^*$ ,  $S = S_0 A_\sigma^* B_\sigma^*$  라고 두면 다음 식으로 바꿀 수가 있다.

$$\left( \frac{(F_0 W_{2d}^* z^g - S_0 W_{1d}^* z^{gl})}{(W_{1d}^* W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^*)} \right)^* \left( \frac{(F_0 W_{2d}^* z^g - S_0 W_{1d}^* z^{gl})}{(W_{1d}^* W_{2d}^* Y_{fn}^* Y_c^*)} \right) = \sum \lambda^2 \quad (40)$$

만약  $F_l = F_0 W_{2d}^* z^g - S_0 W_{1d}^* z^{gl}$ ,  $D_{fc} = W_{1d} W_{2d} Y_{fn} Y_c$  라고 하면 다음 식을 만족시킨다.

$$A_\sigma = D_{fc} \lambda \quad (41)$$

$$B_\sigma = F_l \quad (42)$$

여기서  $F_l F_l^* = F_l F_l^*$  이다.

앞에서 평가함수를 최소화 시킨 K에 식(26)를 대입하고  $G_l$  을 다음과 같이 정의하면 K는 다음 식을 만족한다.

$$G_l = G W_{2d} N_{0d} - L W_{1d} M_{0d} \quad (43)$$

$$K = \frac{G_l Y_{fd}}{B_\sigma Y_{fn} Y_c W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}} \quad (44)$$

식(28),(29)의 Diophantine 방정식에 위에서 정의한 F 와 S를 대입하면 다음과 같은 변형된 Diophantine 방정식을 만족하게 된다.

$$A_\sigma W_{1d} M_{0d} F_0 + W_{1d} Y_{fn}^* Y_c^* G z^{-g} = B_\sigma W_{1n}^* W_{1n} M_{0n} A(BA)^* Y_{fd} z^{-g} \quad (45)$$

$$A_\sigma W_{2d} N_{0d} S_0 + W_{2d} Y_{fn}^* Y_c^* L z^{-gl} = B_\sigma W_{2n}^* W_{2n} N_{0n} B(BA)^* Y_{fd} z^{-gl} \quad (46)$$

또한 식(45) ×  $W_{2d} W_{2d} N_{0d}$  - 식(46) ×  $W_{1d} W_{1d} M_{0d}$ 에 의해  $G_l$ ,  $B_\sigma$ 는 다음 Diophantine 방정식의 해가 된다.

$$A_\sigma W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d} F_l + W_{1d} W_{2d} Y_{fn}^* Y_c^* G z^{-g} = B_\sigma (BA)^* Y_{fd}^* (W_{2d} W_{2d} N_{0d} W_{1n} W_{1n}^* A M_{0n} + W_{1d} W_{1d} M_{0d} W_{2n} W_{2n}^* B N_{0n}) z^{-gl} \quad (47)$$

위의 식을 좀더 간략화하기 위해서  $W_{1d} = W_{2d}$ 로 선택하면 식(23)에서  $M_{0d} = N_{0d}$  이므로 K와  $G_l$ ,  $F_l$ 를 구하는 식이 다음 식을 만족한다.

$$K = \frac{G_l Y_{fd}}{B_\sigma Y_{fn} Y_c W_{1d} N_{0d}} \quad (48)$$

식(45) - 식(46)에 의해  $G_l$ ,  $B_\sigma$ 은 다음과 같은 Diophantine 방정식의 해이다.

$$\lambda W_{1d} W_{1d} N_{0d} Y_{fn} Y_c F_l + W_{1d} Y_{fn}^* Y_c^* G z^{-g} = B_\sigma (BA)^* Y_{fd}^* (W_{1n} W_{1n}^* A M_{0n} + W_{2n} W_{2n}^* B N_{0n}) z^{-gl} \quad (49)$$

결국  $H_\infty$  평가함수를 최소화시키는 Youla 파라미터 K는 다음과 같다.

$$K = \frac{G_l Y_{fd}}{B_\sigma Y_{fn} Y_c W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}} \quad (50)$$

또한 식(23)에서  $M_{0d} = N_{0d}$ 이고  $W_{1d} = W_{2d}$ 라면 K는 다음 식을 만족하게 된다.

$$K = \frac{G_l Y_{fd}}{B_\sigma Y_{fn} Y_c W_{1d} N_{0d}} \quad (51)$$

#### 4. 시뮬레이션

시스템의 파라미터가 정확한 상태에서 설계된  $H_\infty$  제어기는 외란이나 노이즈에 강인성을 가지지만 파라미터가 불확실하면 그 성능이 저하되는 것이 사실이다. 그러므로 불확실한 파라미터를 가지고 설계한  $H_\infty$  제어기와 제안된 적응  $H_\infty$  제어기를 비교하여 그 유용함을 고찰하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 시행하였다.

본 논문에서 고려된 단일 입출력을 갖는 안정한 연속 시간 시스템 G(s)는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \quad (52)$$

위의 식을 샘플링 시간 0.5초로 샘플링 하여 Z.O.H.(Zero Order Hold)를 통과시켰을 때의 이산 시간 시스템은 다음 식을 만족한다.

$$G = \frac{0.0571z + 0.0247}{z^2 - 0.591z + 0.0821} \quad (53)$$

그리고 다음과 같은 하중함수(Weighting Function)를 사용한다.

$$W_S = \frac{0.1z + 99.2262}{z - 0.0067} : \text{감도함수의 하중함수} \quad (54)$$

$$W_T = \frac{10z - 9.9901}{z - 0.0067} : \text{부감도함수의 하중함수} \quad (55)$$

실제 시스템의 파라미터는 다음과 같다

$$a(t) = 0.591, b(t) = -0.0821, c(t) = 0.0571, d(t) = 0.0247 \quad (56)$$

또한 망각인자  $\lambda$ 는 0.9, 공분산 행렬의 초기 값  $P(0)$ 는

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

로 고려하며 인가된 백색잡음은 평균값이 0

이고 공분산이 1이며 파라미터의 값들이 작음을 고려하여 백색잡음의 크기를 샘플링의 두 배로 나누었다.

그림 2은 다음과 같은 불확실한 파라미터를 사용하여  $H_\infty$  제어를 설계하고 화이트 노이즈를 인가했을 때의 시스템 출력 응답 특성이다.

$$a(t) = 0.85, b(t) = -0.15, c(t) = 0.07, d(t) = 0.015 \quad (57)$$

보는바와 같이 출력의 과도 응답의 성능이 저하된 것을 알 수 있다.

그림 3는 50 스텝까지는 파라미터를 추정하면서  $H_\infty$  제어기는 식(57)의 불확실한 파라미터를 가지고 설계하고 50 스텝 이후에는 추정한 파라미터를 가지고  $H_\infty$  제어를 설계한 결과 파라미터가 추정된 다음에는 실제 시스템의 파라미터로 설계된  $H_\infty$  제어를 사용한 시스템의 출력 특성이 나타나므로 인가된 화이트 노이즈에 대해서 강인함을 알 수 있다.

그림 4에서부터 그림 7까지는 화이트 노이즈가 인가되고 RLS 알고리즘을 사용하여 시스템의 파라미터를 추정한 결과이다.

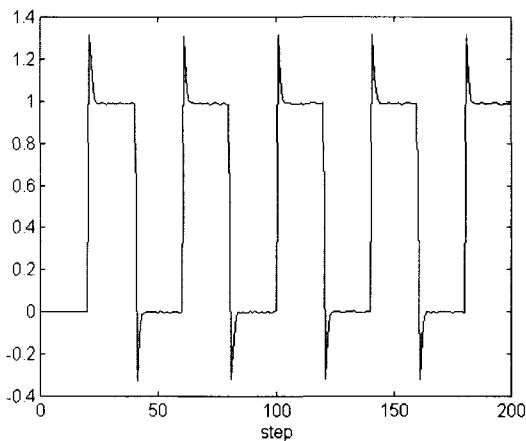


그림 2 백색 잡음과 파라미터 불확실성 존재시 시스템의 출력  
Fig. 2 The output of plant with white noise and parameter uncertainty

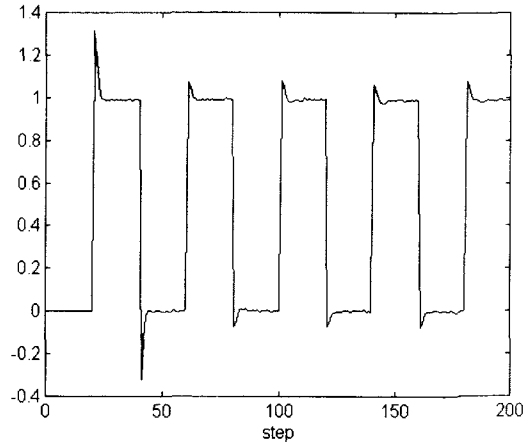


그림 3 백색 잡음과 파라미터 불확실성이 존재하고 제안된 알고리즘 사용시의 시스템 출력

Fig. 3 The output of system using proposed algorithm with white noise and parameter uncertainty

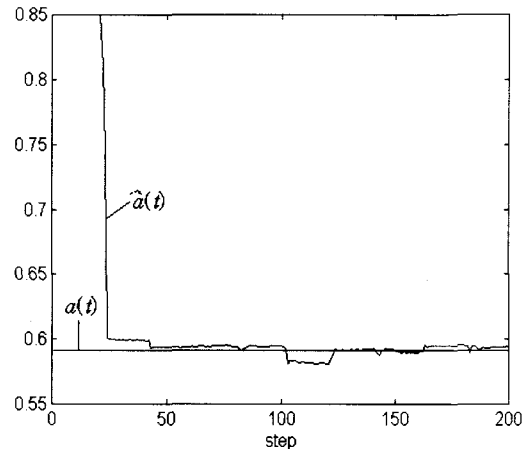


그림 4 파라미터 a의 추정

Fig. 4 Estimation of parameter a

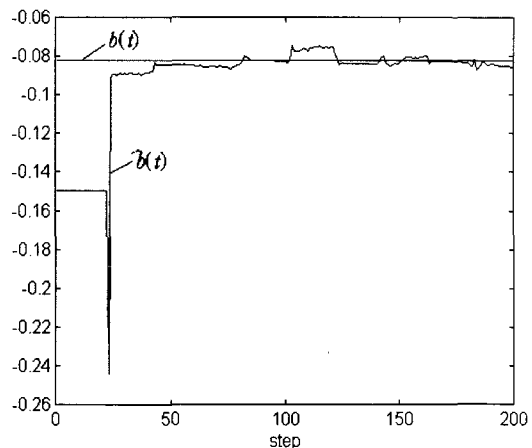


그림 5 파라미터 b의 추정

Fig. 5 Estimation of parameter b

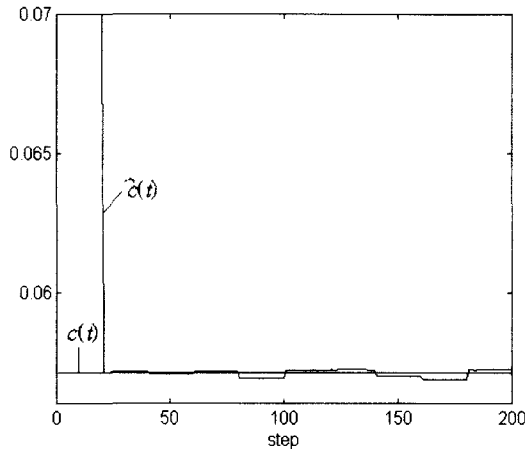


그림 6 파라미터  $c$ 의 추정

Fig. 6 Estimation of parameter  $c$

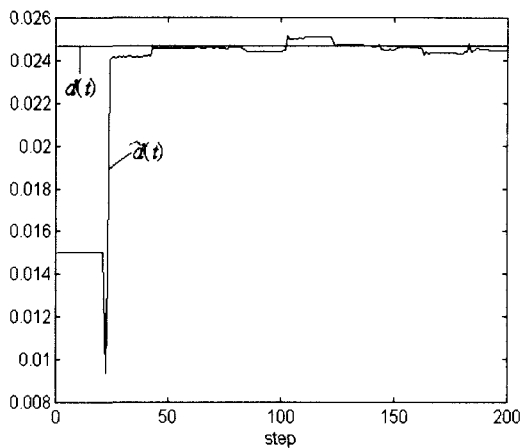


그림 7 파라미터  $d$ 의 추정

Fig. 7 Estimation of parameter  $d$

### 5. 결 론

본 논문에서는 시스템의 파라미터를 모른다고 가정했을 때 이를 추정하기 위해 망각 인자를 이용한 축차최소 자승법을 도입하여 파라미터를 추정한 뒤 외란이나 노이즈에 대하여 강인한 응답특성을 나타낼 수 있는  $H_\infty$  강인 제어를 설계하였다. 제안된  $H_\infty$  제어기는 이전에 Grimbly이 제시한 다항식 접근에서 문제시되었던 이중 최소값 문제를 Youla 제어기를 도입함으로써 해결하며 하중 함수들을 바꾸지 않고도 극배치가 가능하게 한다. 또한 수치 예제를 통하여 불확실한 파라미터를 가지고 설계한  $H_\infty$  제어기의 성능과 RLS 알고리즘으로 파라미터를 추정할 때까지는 불확실한 파라미터를 가지고  $H_\infty$  제어기를 설계하지만 파라미터를 추정한 후에는 실제 파라미터를 가지고  $H_\infty$  제어기의 설계가 가능하므로 백색 잡음에 대해서 강인한 성능과 우수한 응답 특성을 가질 수 있게 된다.

### 감사의 글

본 연구는 2002년도 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계 기술연구센터 지원에 의하여 이루어짐.

### 참 고 문 헌

- [1] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis, "State-space solutions to standard  $H_\infty$  and  $H_2$  control problems", IEEE AC-34, pp.841-847, 1989.
- [2] J. C. Doyle, K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, "Mixed  $H_\infty$  and  $H_2$  performance objective II : Optimal control", IEEE AC-39, No.8, pp.1575-1587, 1994.
- [3] D. S. Bernstein, W. M. Haddard, "LQG Control with an  $H_\infty$  Performance Bound : A Riccati Equation Approach", IEEE AC-34, pp.293-305, 1989.
- [4] D. Fragopoulou, M. J. Grimble, " $H_\infty$  controller design for the SISO case using a Wiener approach", IEEE AC-36, No.10, pp.1204-1208, 1991.
- [5] M. J. Grimble, " $H_\infty/H_2$  robust control design for a generalized control structure and flight control application", International Journal of Systems Science, vol.26, No.11, pp.2043-2068, 1995.
- [6] M. J. Grimble, " $H_\infty$  Robust controller for self-turning control application Part 2. Self-turning and Robustness", International Journal of Control, Vol.46, No.5, pp.1819-1840, 1987.
- [7] M. J. Grimble, " $H_\infty$  Robust controller for self-turning control application Part 3. Self-turning controller implementation", International Journal of Control, Vol.52, No.1, pp.15-36, 1990.
- [8] M. J. Grimble, "Optimal  $H_\infty$  robustness and the relationship to LQG design problem," International Journal of Control, Vol.43, pp.351-372, 1986.
- [9] M. J. Grmble, Ahmed El Sayed, "Solution of the  $H_\infty$  Optimal Linear Filtering Problem for Discrete-Time Systems", IEEE AC-38, pp.1092-1104, 1990.
- [10] D. C. Youla, H. Jabr and J. J. Bongiorno, Jr., "Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers -Part II: The Multivariable Case", IEEE AC-21 No.3, pp.319-338, 1976.
- [11] 박승규, 김민찬, "유도 진동기의  $H_\infty$  강인 제어에 관한 연구", 한국 자동제어 학술회의 논문집 pp.1448-1451, 1997.
- [12] 박승규, 안호균, 송대원, "혼합감도 평가함수의  $H_\infty$  norm 최소화-다항식 접근방법", 대한전기학회 논문지 제47권, 제10호 pp1706-1711, 1998. 10.

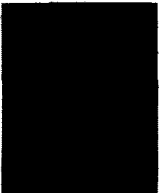
저 자 소 개



**김민찬 (金 玟 贊)**

1971년 7월 13일생. 1996년 창원대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기전자 제어공학과 졸업(석사). 1998년~현재 동 대학원 전기전자제어공학과 박사과정

Tel : 055-263-6885  
Fax : 055-263-9956  
E-mail : kmc710@kebi.com



**박승규 (朴 勝 圭)**

1960년 4월 15일생. 1984년 고려대 전기공학과 졸업. 1986년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1995년~1996년 영국 Strathclyde대 visiting scholar. 1990년~현재 창원대 전기공학과 교수

Tel : 055-279-7514  
Fax : 055-263-9956  
E-mail : skpark@sarim.changwon.ac.kr



**김태원 (金 泰 元)**

1955년 1월 1일생. 1987년 경일대 전기공학과 졸업. 1990년 금오공대 산업대학원 전자공학과 졸업(석사) 1997년~현재 창원대 전기전자제어공학과 박사과정. 현재 창원 기능대 전기과 조교수

Tel : 055-279-1865  
Fax : 055-282-1386  
E-mail : twkim@kopo.or.kr



**안호균 (安 鎬 均)**

1958년 1월 14일생. 1981년 고려대 전기공학과 졸업. 1989년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1992년~현재 창원대 전기공학과 부교수

Tel : 055-279-7516  
Fax : 055-263-9956  
E-mail : ahog@sarim.changwon.ac.kr