

약 가시성 다각형에서 최소 링크를 가진 경비원 경로 (A Watchman route with Minimum links in the Weakly Visible Polygons)

류 상 루*
(Sang-Ryul Ryu)

요 약

주어진 다각형의 내부를 경로를 따라 이동하면서 감시하는 경비원 경로는 길이의 최소화 또는 링크의 최소화 등으로 구분할 수 있다. 최소링크를 가진 경비원 경로(watchman route with minimum route)는 경로의 방향 전환 횟수가 최소인 경비원 경로이며, 약 가시성 다각형(weakly visible polygon)은 서로 약 가시성을 가진 두 개의 체인으로 구성된 다각형이다. 본 논문에서는 n 개의 꼭지점을 가진 약 가시성 다각형의 최소 링크를 가진 경비원 경로를 구하는 $O(n^2)$ 시간의 알고리즘을 제시한다.

ABSTRACT

The watchman routes which an watchman patrols the interior of given polygon moving along the route are classified to minimum length or minimum links. The watchman route with minimum links has minimum changes of direction and a weakly visible polygon consists of two chains which have mutually weakly visibility. In this paper, we present an $O(n^2)$ time algorithm for finding the watchman route with minimum links in the weakly visible polygons, where n is the number of vertices of a given polygon.

1. 서론

실생활에서도 많이 사용되고 있는 가시성(visibility)은 2차원 또는 3차원의 대상이 가진 내부 또는 외부의 가시적 특성을 분석하여 컴퓨터 응용분야에서 활용할 가시성 정보와 효율적인 처리기법 등을 제시하고 있으며, 컴퓨터 그래픽스, 영상 처리, VLSI 설계, 로봇틱스, 네트워크, 지리정보 시스템 등의 분야에서 많이 응용되고 있다.

화랑(art gallery) 문제는 평면상의 공간으로 주어진 다각형의 내부를 감시하는 경비원들의 인원수나 경비원들의 위치를 결정하는 문제이다. Chvátal은 n 개의 꼭지점을 가진 다각형의 경비원의 수는 $\lfloor n/3 \rfloor$

으로 충분하며 때때로 꼭 필요하다는 연구결과를 제시하였고[5], 그 이후 직교 다각형이나 내부에 hole을 가진 다각형 등으로 다각형의 형태 변화를 시도한 연구결과들이 제시되었다[1][11][12].

그리고 경비원의 형태에 변화를 주어 다각형 내부에서 이동할 수 있는 동적 감시자로서의 역할을 부여한 연구들도 제시되었다. 그 예로서 경비원이 다각형의 경계선 또는 내부의 한 점에서 출발하여 내부에 형성되는 경로를 따라 이동하며 전체적으로 감시할 수 있는 최단 경비원 경로(shortest watchman route)를 찾는 효율적인 알고리즘이 제시되었다[4]. 그리고 직교 다각형과 단순 다각형에 대하여 최단 경비원 경로 및 최소링크의 경비원 경로들을 구하는 $O(n)$ 시간의 알고리즘들도 제시되었고[2][3][16][17]

* 정회원 : 청운대학교 컴퓨터과학과

논문접수 : 2002. 1. 5.

심사완료 : 2002. 1. 20.

※ 본 논문은 2000년 청운대학교 학술지원조성비에 의해 연구되었음.

다각형의 변을 따라 이동하는 경비원 문제와 내부의 중간 지점을 통과하는 경로문제 등에 관한 결과들도 제시되었다[14][15].

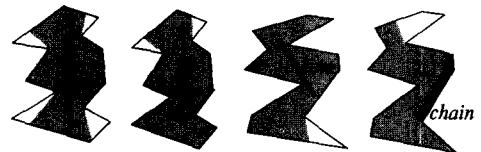
Icking과 Klein은 다각형을 2개의 체인으로 분리하여 서로 반대 체인을 따라 이동하는 2명의 감시자들이 체인의 시작점에서부터 항상 서로 볼 수 있는 상태를 유지하며 체인의 끝점에 도착할 수 있는지의 여부를 결정하는 2-guard 문제를 제시하였다. 그들은 서로 약 가시적인 2개의 체인으로 구성된 약 가시적 다각형만이 2-guard 문제의 조건을 만족함을 증명하고 $O(n \log n)$ 시간 내에 주어진 다각형에 대한 2-guard 문제를 결정할 수 있는 알고리즘을 제시하였고[8], 그 이후 Heffernan이 $\theta(n)$ 시간을 가진 최적 알고리즘을 제시하였다[7].

본 논문에서는 2-guard 문제가 적용될 수 있는 약 가시적 다각형에 대하여 1명의 경비원이 경로를 따라 이동하면서 감시할 수 있는 최소링크의 경비원 경로(watchman route with minimum links)를 구하는 문제를 연구하였고 그 결과로 $O(n^2)$ 시간과 $O(n)$ 공간 복잡도의 알고리즘을 제시한다. 경비원 경로는 다각형의 내부를 감시하기 위하여 경비원이 이동하는 통로이며 다각형 내부에 완전히 포함되는 선분들의 연속으로 구성될 수 있으며, 경비원은 이 경로를 왕복하며 다각형의 내부를 완전하게 감시한다. 그리고 최소 링크의 경비원 경로는 경로의 진행 방향이 변환되는 횟수가 최소인 경로이다. 2장에서는 약 가시적 다각형의 경비원 경로 문제에 대한 개념들과 알고리즘을 제시하고, 3장에서는 최소링크의 경비원 경로를 구하는 전체적인 알고리즘을 제시한다. 그리고 4장에서는 결과를 정리하고 앞으로의 연구 방향을 제시한다.

2. 약 가시성 다각형의 경비원 경로

단순 다각형 P 는 n 개의 꼭지점들을 반 시계(count-clockwise) 방향으로 나열한 순서 집합 $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ 또는 변의 순서 집합 $\{e(v_0, v_1), \dots, e(v_{n-1}, v_0)\}$ 으로 표현할 수 있으며 꼭지점 $v_i(i=0, 1, \dots, n-1)$ 는 2차원 평면상에서 좌표 (x_i, y_i) 로 표현된다. 이웃하는 두 변이 형성하는 꼭지점의 내부 각이 180° 보다 작으면 볼록(convex) 꼭지점이라 하고

180° 보다 클 경우 오목(concave) 꼭지점이라 한다. 선분은 2개의 양 끝점에 의해 결정되므로 다각형 P 의 서로 다른 두 점 p 와 q 를 가정하자. 점 p 와 q 를 연결한 선분이 P 에 완전히 포함될 때, p 와 q 는 서로 가시적(visible)이라고 한다. p 에서 시작하여 q 를 거쳐 계속 진행되는 방향성 직선(directed line)을 $L(p, q)$ 라고 한다. 그리고 p 에서 q 로의 방향을 가지며 p 와 q 를 양 끝점으로 하는 선분(directed line segment)을 $l(p, q)$ 라고 하고 선분 l_i 와 l_j 의 교차점을 $I(l_i, l_j)$ 라고 한다. $L(p, q)$ 의 한쪽 면에만 존재하는 점들의 집합을 반 평면(half plane) $H(p, q)$ 라고 하고, 다각형 P 를 구성하고 있는 경계 $Bd(P)$ 의 변을 반 시계 방향으로 검색할 때, P 의 내부는 $Bd(P)$ 의 반 평면 집합이다. 이때 $Bd(P)$ 에 의해 구분되는 P 의 내부를 $Int(P)$ 라고 하고 외부를 $Ext(P)$ 라고 하면 다각형 P 는 $Bd(P)$ 과 $Int(P)$ 로 구성된다. $Bd(P)$ 의 인접하지 않은 두 점 p 와 q 를 연결한 $l(p, q)$ 이 $Int(P)$ 에 완전히 포함될 때 현(chord)이라 하고 $c(p, q)$ 로 표기한다. 그리고 시계 방향으로 p 에서 q 까지의 변의 연속을 체인(chain) $ch(p, q)$, 반 시계 방향의 체인을 $ch^*(p, q)$ 라고 한다. $ch(p, q)$ 를 구성하고 있는 꼭지점들이 모두 볼록 꼭지점이면 $ch(p, q)$ 는 볼록 체인이라 하고, 모두 오목 꼭지점이라면 오목 체인이라 한다. 다각형 내부의 한 점 r 이 $l(p, q)$ 의 모든 점에서 가시적이라면 r 은 $l(p, q)$ 과 강 가시적(strongly visible)이라 하고, $l(p, q)$ 의 한 점 이상에서 가시적이면 r 은 $l(p, q)$ 에 대해 약 가시적(weakly visible)이라 한다. $Int(P)$ 와 $Bd(P)$ 를 구성하고 있는 점들 중에서 p 에서 가시적인 점들의 집합은 P 에 완전히 포함되는 부분 다각형이며, 이를 점 가시성(point-visibility) 다각형 $Vis(p)$ 라고 한다. 만약 다각형 P 와 $Vis(p)$ 가 동일하다면 P 는 성형 다각형이다(그림 1).

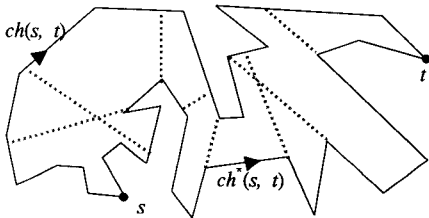


[그림 1] 가시성 다각형의 4가지 유형
[Fig. 1] Four types of visibility polygon

그리고 변 e 에서 가시적인 점들의 집합을 변 가시성 다각형 $Vis(e)$ 이라 하고, 선분 l 에서 가시적인

점들의 집합을 선분 가시성 다각형 $Vis(l)$ 이라 하고, 체인 ch 에서 가시적인 점들의 집합을 체인 가시성 다각형 $Vis(ch)$ 이라 한다. 그리고 주어진 다각형에 대해 가시성 다각형들은 각각 선행시간 내에 구성할 수 있다[13].

$Bd(P)$ 의 서로 다른 꼭지점 s 와 t 를 가정할 때 체인 $ch(s, t)$ 과 $ch^*(s, t)$ 는 P 를 이등분하는 체인이다. $ch(s, t)$ 의 모든 점들이 $ch^*(s, t)$ 의 한 점 이상에서 가시적이고 동시에 $ch^*(s, t)$ 의 모든 점들이 $ch(s, t)$ 의 한 점 이상에서 가시적이라면 $ch(s, t)$ 과 $ch^*(s, t)$ 는 서로 약 가시적(mutually weakly visible)이라고 한다. 그리고 두개의 약 가시 체인으로 구성된 다각형이 약 가시적 다각형이다[7][8][그림 2].



□ 그림 2] 약 가시성 다각형

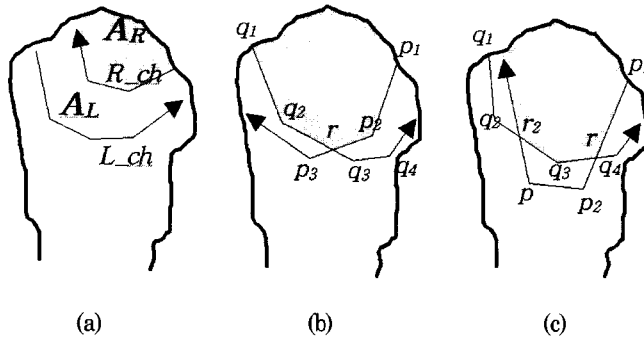
[Fig. 2] A weakly visible polygon

임의의 한 선분이 약 가시적 다각형 내부의 한 점을 지나고 그 선분이 다각형 내부에 완전하게 포함되며 동시에 양 끝점이 약 가시체인 $ch(s, t)$ 와 $ch^*(s, t)$ 에 위치한다면 다각형의 내부는 $ch(s, t)$ 또는 $ch^*(s, t)$ 에 의해 항상 약 가시적이다. 경비원은 반드시 다각형 내부에 완전히 포함된 경비원 경로를 따라 이동하며 다각형의 내부를 감시하므로 약 가시적 다각형의 가시체인은 다각형의 내부에 구성되는 경비원 경로에 항상 가시적이다.

약 가시적 다각형 P 의 내부를 감시하기 위한 경비원 경로는 반드시 가시 체인의 꼭지점인 s 와 t 를 출발점과 도착점으로 선택해야 할 필요는 없다. 경비원 경로가 다각형의 경계가 아닌 내부의 한 점에서 진행한다면 꼭지점 s 와 t 를 양 끝점으로 하는 경비원 경로에 비하여 경로의 전체적인 길이와 진행 과정 등이 훨씬 효율적일 수 있다. $Int(P)$ 에 포함되는 최소링크의 경비원 경로가 가지는 양 끝점의 위치를 결정하기 위하여 다음의 과정을 제시한다.

약 가시적 다각형의 가시 체인 $ch(s, t)$ 의 꼭지점 s 에서 시계 방향으로 검색하여 만나는 변들 중에서 볼록 꼭지점과 오목 꼭지점을 양 끝점으로 하는 첫 번째 변의 볼록 꼭지점을 시작점으로 하여 오목 꼭지점으로의 방향을 가지고 다각형의 내부로 연장된 방향성 직선을 L_1 이라고 하자. 약 가시적 다각형의 가시 체인들은 서로 약 가시적이므로 L_1 은 반드시 다른 가시 체인과 교차한다. 그러나 $ch(s, t)$ 의 변들 중에서 볼록 꼭지점과 오목 꼭지점의 순서로 구성된 변에서 연장된 방향성 직선 L_1, L_2, \dots, L_n 는 다각형의 내부에서 교차할 수 있다($i < n$). 이 경우 방향성 직선들의 반 평면 집합의 경계선의 일부를 형성하는 체인은 볼록 체인이 되며 교차 체인 L_ch 라고 한다. 같은 방법으로 $ch^*(s, t)$ 의 꼭지점 s 에서 반 시계 방향으로 검색하여 만나는 변들 중에서 볼록 꼭지점과 오목 꼭지점을 양 끝점으로 하는 첫 번째 변에서 연장된 방향성 직선을 R_1 이라고 하자. $ch^*(s, t)$ 의 변들 중에서 볼록 꼭지점과 오목 꼭지점의 순서로 구성된 변에서 연장된 방향성 직선 R_1, R_2, \dots, R_j 도 다각형의 내부에서 교차할 수 있으므로($j < n$), 이러한 방향성 직선들의 반 평면 집합의 체인은 볼록 체인이며 교차 체인 R_ch 라고 한다. 이 경우 L_ch 와 R_ch 는 볼록 체인이므로 L_ch 와 R_ch 를 구성하고 있는 교차점들은 반드시 볼록 꼭지점들이다. L_ch 가 교차점들을 연결하여 $ch(s, t)$ 의 한 점 u 와 $ch^*(s, t)$ 의 한 점 v 를 끝점으로 하는 체인이라면, L_ch 과 $ch(v, u)$ 는 약 가시적 다각형 P 에 완전히 포함되는 부분 다각형의 경계를 이루고 있으며 부분 다각형을 가시 영역 A_L 이라 한다. 그리고 교차 체인 R_ch 가 $ch^*(s, t)$ 의 한 점 x 와 $ch(s, t)$ 의 한 점 y 를 끝점으로 하는 체인이라면, R_ch 는 다각형의 내부에 가시 영역 A_R 를 형성한다. 항상 서로 약 가시적인 특성을 가진 $ch(s, t)$ 과 $ch^*(s, t)$ 로부터 구성된 A_L 와 A_R 는 반드시 다각형 내부의 한 점 이상에서 교차해야하므로 가시 영역들의 교차 형태를 다음과 같이 3가지로 구분할 수 있다.

첫째, A_L 이 A_R 에 완전히 포함될 경우(또는 반대 경우)로써 L_ch 가 R_ch 보다(R_ch 가 L_ch 보다) 꼭지점 s 에 더 가까이 위치한다[그림 3(a)]. 둘째는 L_ch 와 R_ch 가 한 점에서 교차할 경우[그림 3(b)]이고, 셋째는 두 점 이상에서 교차할 경우이다[그림 3(c)].



[그림 3] 가시 영역들의 교차 형태

[Fig. 3] Intersection types of visible areas

경비원은 경로를 따라 이동하며 다각형의 내부를 지속적으로 감시해야 하므로 경비원 경로의 양 끝점 사이를 왕복해야 하므로 양 끝점의 위치를 결정하는 방법에 따라 경비원 경로가 가지는 링크의 수가 달라질 수 있다. [그림 3]에서, 약 가시적 다각형 P 의 가시 영역 A_L 과 A_R 이 교차하여 중복되는 영역을 교차 영역 A_s 이라 하고, $Int(P)$ 에 포함되는 A_s 의 $Bd(A_s)$ 를 한계 체인 Ws_ch 라고 한다. A_s 의 내부는 블록 다각형의 특성을 가지게 되며 Ws_ch 에서 강 가시적이므로 경비원 경로는 Ws_ch 의 모든 점들을 출발점으로 선택할 수 있다. 상대적으로 가시 체인의 꼭지점 t 를 중심으로 구성되는 교차 영역 A_t 의 $Bd(A_t)$ 을 한계 체인 Wt_ch 라고 할 때, A_t 의 내부 또한 Wt_ch 에서 강 가시적이며 경비원 경로의 도착점은 Wt_ch 의 어떠한 점이라도 가능하다. [그림 3(a)]의 경우, 경비원 경로는 가시 영역 A_L 과 A_R 의 내부를 모두 감시하기 위하여 A_R 의 경계인 R_ch 까지 진행되어야 한다. 즉, 경비원의 이동 경로와 A_R 에 속한 모든 점들이 서로 약 가시적이 되기 위하여 경비원 경로는 최소한 R_ch 의 한 점까지는 진행해야만 하므로 R_ch 가 한계 체인 Ws_ch 가 된다. 교차 체인들이 한 점에서 교차하는 [그림 3(b)]의 경우, Ws_ch 는 2개의 교차 체인이 교차하는 점 r 을 포함하는 $ch(p_1, r) \cup ch(r, q_1)$ 이 된다. 그리고 교차 체인들이 두 점 이상에서 교차하는 [그림 3(c)]의 경우, Ws_ch 는 교차점 r_1 과 r_2 를 양 끝점으로 하는 $ch(r_1, r_2)$ 를 포함하는 $ch(p_1, r_1) \cup ch(r_1, r_2) \cup ch(r_2, q_1)$ 이 된다.

약 가시적 다각형에서 경비원 경로가 반드시 방문해야 하는 한계 체인 Ws_ch 를 알고리즘 “Find corner chain”에서 구성한다. 2개의 가시 체인으로 구성된 약 가시적 다각형이 주어졌을 때, “Find corner chain” 알고리즘은 한계 체인 Ws_ch 과 Ws_ch 을 $O(n^2)$ 시간 내에 구성할 수 있다.

Algorithm Find corner chain

Input : 가시체인 $ch(s, t)$, $ch^*(s, t)$

Output : 한계 체인 Ws_ch

단계 1. 초기화

1.1 $ch(s, t)$ 의 변에서 연장된 방향성 직선 집합 $L = \{L_1, L_2, \dots, L_j\}$ 과 $ch^*(s, t)$ 에서의 방향성 직선 집합 $R = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ 을 구성한다($j, k \leq n/4$). 그리고 집합 L 과 R 을 저장 하기 위한 스택 S_L 과 S_R 을 초기화한다.

1.2 꼭지점 s 에서 시작하여 $ch^*(s, t)$ 의 첫 오목 꼭지점으로서의 방향성 직선 E_L 을 구성한다. 같은 방법으로 s 에서 $ch(s, t)$ 의 첫 오목 꼭지점으로서의 방향성 직선 E_R 을 구성한다.

1.3 $Push(S_L, L_1)$ 이 시작하는 오목 꼭지점의 좌표)
 if (L_1 이 E_L 과 교차하지 않음) $Push(S_L, l(L_1, ch^*(s, t)))$;
 else if ($l(L_1$ 의 시작점 좌표, $l(L_1, E_L))$ 이 $ch^*(s, t)$ 과 교차하지 않음) $Push(S_L, l(L_1, E_L))$; else $Push(S_L, l(L_1, ch^*(s, t)))$;
 $ES_L = l(s, S_L[top])$; $i = 1$;

단계 2. 가시 체인 $ch(s, t)$ 에서 교차 체인 L_ch 의 구성

```

while (비결정적 방향성 직선이  $L$ 에 존재)
{  $i \leftarrow i + 1$  ;
if ( $I(L_i, ES_L)$ 의  $y$ 좌표 값 <  $S_L[top]$ 의  $y$ 좌표 값)
{ if ( $I(L_i$ 의 시작점,  $I(L_i, ES_L)$ 가  $ch^*(s, t)$ 와 교차하지 않음)
{ while ( $I(S_L[top], S_L[top-1])$ 이  $L_i$ 와 교차하지 않음)  $S_L[top]$  삭제;
 $temp = I(L_i, I(S_L[top], S_L[top-1]))$ ;  $S_L[top]$ 삭제;
push( $S_L, temp$ ); push( $S_L, I(L_i, ch^*(s, t))$ );
else { if ( $L_i$ 과  $ch(S_L[top], s)$ 가 교차) {  $temp = I(L_i, I(S_L[top], S_L[top-1]))$ ;  $S_L[top]$ 삭제; push( $S_L, temp$ );
push( $S_L, I(L_i, ch(temp, s))$ );}
 $ES_L = I(s, S_L[top])$ ; }

```

단계 3. 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 에서 교차 체인 R_ch 의 구성 : R_ch 를 스택 S_R 에 저장

```

단계 4. 한계 체인  $Ws\_ch$ 의 구성
 $Ws\_ch = ch_L = ch_R = 0$  ;
 $S_M$ 에  $L\_ch$ 와  $R\_ch$ 의 교차점들을 모두 저장;
if ( $S_M$ 이 비어있음) {  $Ws\_ch =$  교차체인  $L\_ch$ 과  $R\_ch$  중에서 완전히 포함되는 교차체인 }
else { if ( $S_M$ 에 저장된 교차점  $p$ 가 존재)
{  $ch_L = ch(S_L[top], p)$ ;  $ch_R = ch(S_R[top], p)$ ;  $Ws\_ch = ch_L \cup ch_R$  ;}
else {  $pivot = 0$  ;  $S_L = S_L$  ;  $S_m = S_M$  ;  $S_R$ 의 좌표 값들을  $S_L$ 에 역순으로 저장 ;
if ( $S_L[top]$ 이  $ch(s, S_L[top])$ 에 포함 )
 $pivot = S_R[top]$ ; else  $pivot = S_L[top]$  ;
while ( $S_m[top]$ 이  $I(S_L[top], S_L[top-1])$ 에 포함되지 않음) {  $ch_L = ch_L \cup I(S_L[top], S_L[top-1])$ ;
 $S_L[top]$  삭제; }
while ( $S_m[top]$ 이  $I(S_R[top], S_R[top-1])$ 에 포함되지 않음) {  $ch_R = ch_R \cup I(S_R[top], S_R[top-1])$ ;
 $S_R[top]$  삭제 ; }
if ( $pivot == S_L[top]$ ) {  $ch_L = ch_L \cup I(S_L[top], S_m[top])$ ;
 $Ws\_ch = Ws\_ch \cup ch_L$ ;  $S_L[top], S_L[top]$  삭제;  $S_R[top] = S_m[top]$ ;  $pivot = right$ ; }
else {  $ch_R = ch_R \cup I(S_R[top], S_m[top])$ ;  $Ws\_ch = Ws\_ch \cup ch_R$ ;  $S_L[top], S_L[top]$  삭제;  $S_L[top] = S_m[top]$ ;  $pivot = left$ ; }
 $S_m[top]$  삭제 ;

```

```

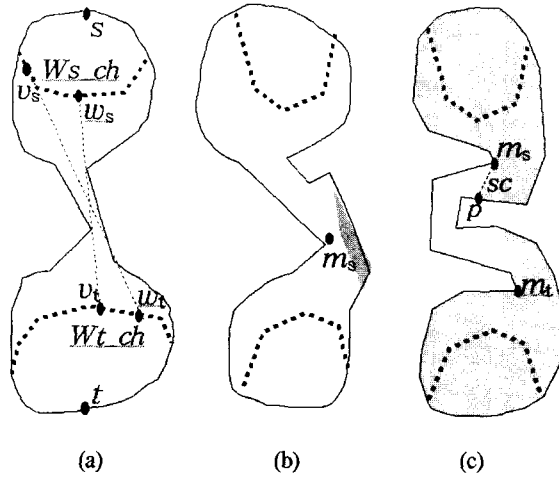
while ( $S_l \neq \emptyset$  &  $S_r \neq \emptyset$  &  $S_m \neq \emptyset$ )
{  $ch_L = ch_R = 0$ ;
while ( $S_m[top]$ 이  $I(S_l[top], S_l[top-1])$ 에 포함되지 않음) {  $ch_L = ch_L \cup I(S_l[top], S_l[top-1])$  ;
 $S_l[top]$  삭제 ; }
while ( $I(S_r[top], S_r[top-1])$ 에  $S_m[top]$ 가 포함되지 않음) {  $ch_R = ch_R \cup I(S_r[top], S_r[top-1])$ ;
 $S_r[top]$  삭제 ; }
if ( $pivot == left$ ) {  $ch_L = ch_L \cup I(S_l[top], S_m[top])$ ;
 $Ws\_ch = Ws\_ch \cup ch_L$ ;  $S_l[top], S_l[top]$  삭제;  $S_r[top] = S_m[top]$ ;  $pivot = right$ ; }
else {  $ch_R = ch_R \cup I(S_r[top], S_m[top])$ ;  $Ws\_ch = Ws\_ch \cup ch_R$  ;  $S_l[top], S_l[top]$  삭제;
 $S_l[top] = S_m[top]$  ;  $pivot = left$  ; }
 $S_m[top]$ 을 삭제 } }
 $ch_L = ch_R = 0$  ;
if ( $pivot == right$ ) { push( $S_l, S_r[top]$ );
while ( $S_l \neq \emptyset$ ) {  $ch_L = ch_L \cup I(S_l[top], S_l[top-1])$ ;  $Ws\_ch = Ws\_ch \cup ch_L$ ; } }
else { push( $S_r, S_l[top]$ ) ; while ( $S_r \neq \emptyset$ ) {
 $ch_R = ch_R \cup I(S_r[top], S_r[top-1])$ ;  $Ws\_ch = Ws\_ch \cup ch_R$ ; } }
END

```

알고리즘 "Find corner chain"에서 방향성 직선들의 교차점들을 연결한 교차 체인 L_ch 와 R_ch 는 볼록 체인이며 이 체인들의 교차를 비교, 검색하여 교차점들을 재구성하여 구성하는 한계 체인 Ws_ch 또한 볼록 체인이다. 그리고 같은 방법으로 한계 체인 Wt_ch 를 $O(n^2)$ 시간 내에 구성할 수 있으며 Wt_ch 도 볼록 체인의 특성을 가진다.

3. 최소 링크를 가진 경비원 경로

다각형의 내부에서 가시성을 방해하는 요소는 내부로 돌출한 오목 꼭지점들이다. 약 가시적 다각형 P 에서 한계 체인 Ws_ch 의 가시성 다각형 $Vis(Ws_ch)$ 에 Wt_ch 의 한 점이라도 포함되어 있거나 $Vis(Wt_ch)$ 에 Ws_ch 의 한 점이라도 포함되어 있다면, Ws_ch 와 Wt_ch 는 서로 약 가시적이다. 이 경우 Ws_ch 와 Wt_ch 를 연결하는 선분 l 이 반드시 존재하



[그림 4] 약 가시성 다각형의 기준점

[Fig. 4] Essential point of a weakly visible polygon

며, 다각형의 내부가 I 에 가시적이므로 P 는 선분 가시적 다각형이다. 즉, $Vis(Wt_ch)$ 에 포함된 Ws_ch 의 부분 체인 chs 를 가정할 때 chs 의 양 끝점을 vs 와 ws 라고 하고 $Vis(Ws_ch)$ 에 포함된 Wt_ch 의 부분 체인 cht 의 양 끝점을 vt 와 wt 라 할 때 vs 와 wt , vt 와 ws 는 서로 강 가시적이므로 링크 개수가 1인 경비원 경로는 반드시 존재한다[그림 4(a)].

Ws_ch 와 Wt_ch 가 서로 비가시적일 경우에는 Ws_ch 와 Wt_ch 의 가시성을 방해하는 오목 꼭지점들이 존재한다. 이러한 꼭지점들 중의 하나인 기준점 ms 는 Ws_ch 와 Wt_ch 의 사이를 왕복해야 하는 경비원 경로가 최소링크를 유지하며 경유해야 하는 위치 정보를 설정하는 꼭지점으로 다각형 내부에 최대한 2개 존재할 수 있다. 만약 다각형 내부에 $I(Vis(Ws_ch), Vis(Wt_ch))$ 가 존재한다면 기준점은 1개만 존재하며 $I(Vis(Ws_ch), Vis(Wt_ch))$ 를 경유하는 경비원 경로가 링크 2인 최소링크의 경비원 경로가 된다.[그림 4(b)]. 다각형 내부에 $I(Vis(Ws_ch), Vis(Wt_ch))$ 가 존재하지 않는다면 $Vis(Ws_ch)$ 와 $Vis(Wt_ch)$ 의 내부에 각각 기준점이 1개씩 존재한다[그림 4(c)]. 기준점 ms 를 구하기 위하여 $Vis(Ws_ch)$ 의 경계선을 구성하고 있는 2개의 체인 $ch(s, p)$ 과 $ch(p, s)$ 을 찾는다. 이때 점 p 는 s 에서 시계방향으로 $ch(s, t)$ 를 검색하여 찾을 수 있는 $Vis(Ws_ch)$ 의 마지막 순서의 꼭지점으로써, 변의 한 점이거나 볼록 꼭지점

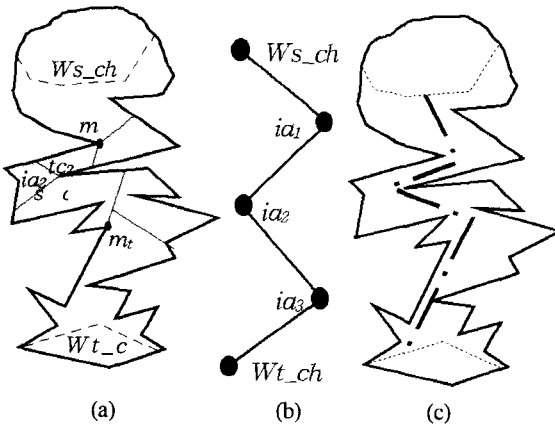
또는 오목 꼭지점 중의 하나이다. 만약 p 가 변의 한 점이거나 볼록 꼭지점이라면 $ch^*(s, p)$ 의 꼭지점들 중에서 마지막 순서의 오목 꼭지점이 존재하며 이 꼭지점은 약 가시적 다각형 P 에서 $Vis(Ws_ch)$ 를 제외한 나머지 다각형 P' 과 접하는 유일한 오목 꼭지점으로 ms 가 된다. 만약 p 가 오목 꼭지점이면 p 가 기준점이 된다. 현 sc 는 $Vis(Ws_ch)$ 의 경계를 구성하고 있는 선분들 중에서 $ch(s, t)$ 과 $ch^*(s, t)$ 를 연결하는 유일한 선분이다. 이는 ms 를 포함하고 있으며 Wt_ch 와 Ws_ch 사이를 진행하는 경비원 경로가 반드시 경유해야 한다. 상대적으로 $Vis(Wt_ch)$ 에서도 기준점 mt 와 현 tc 를 구할 수 있다. 약 가시적 다각형의 내부에서 경로를 따라 이동하며 감시하는 경비원은 $Vis(Ws_ch)$ 와 $Vis(Wt_ch)$ 는 물론이고 두 영역 사이의 모든 부분을 경로 상에서 감시할 수 있어야 한다. 그러므로 Ws_ch 와 Wt_ch 의 가시적 특성을 이용하여 다각형 P 를 점이나 선분으로부터 가시적인 영역들로 분할한다. 이때 인접한 영역들은 링크가 1이다. 분할된 가시 영역들을 그래프로 표현한 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성한 후, $G(P)$ 에서 최소링크의 경비원 경로를 구한다.

최소 링크의 경비원 경로를 구하는 세부적인 과정은 다음과 같다. 약 가시적 다각형 P 에서 한계 체인 Ws_ch 와 Wt_ch 가 서로 비가시적이라면 기준점 ms 와 mt 가 각각 존재하므로 적어도 2 이상의 링크

를 가진 경비원 경로가 존재한다. $Bd(Vis(Ws_ch))$ 를 구성하는 변 중에서 양 끝점이 각각 $ch(s, t)$ 와 $ch^*(s, t)$ 에 속하며 기준점 ms 를 포함하고 있는 변을 가시 현(visible chord) $sc[1]$ 이라고 한다. P 에서 $Vis(Ws_ch)$ 를 제외한 부분 다각형 $Ps[1]$ 은 Wt_ch 를 포함하고 있으며 $Ps[1]$ 에서 가시성 다각형 $Vis(sc[1])$ 를 제거한 부분 다각형을 $Ps[2]$ 이라고 하고, 부분 다각형 $Ps[2]$ 를 형성할 때 추가되는 현을 $sc[2]$ 이라고 한다. 연속된 과정으로 구성된 $Vis(sc[i-1])$ 를 $Ps[i-1]$ 에서 제거한 부분 다각형 $Ps[i]$ 에 추가된 현을 $sc[i]$ 이라고 하며, $sc[i]$ 와 Wt_ch 는 서로 약 가시성을 가진다 ($1 < i < n/4$). 그리고 $Vis(Wt_ch)$ 를 구성하는 변의 집합에서 양 끝점이 각각 $ch(s, t)$ 와 $ch^*(s, t)$ 에 속하며 기준점 mt 를 포함하고 있는 변을 현 $tc[1]$ 이라고 한다. 다각형 P 에서 $Vis(Wt_ch)$ 를 제외한 부분 다각형 $Pt[1]$ 은 Ws_ch 를 포함하고 있으며, $Pt[1]$ 에서 $tc[1]$ 의 가시성 다각형 $Vis(tc[1])$ 를 제거한 부분 다각형을 $Pt[2]$ 이라고 하고, $Pt[2]$ 를 형성할 때 새로 추가되는 현을 $tc[2]$ 이라고 한다. 같은 연속된 과정에 의해 구성된 $Vis(tc[j-1])$ 를 부분 다각형 $Pt[j-1]$ 에서 제거함으로써 형성되는 부분 다각형 $Pt[j]$ 에 추가된 현을 $tc[j]$ 이라고 하며, $tc[j]$ 와 Ws_ch 는 서로 약 가시성을 가진다 ($1 \leq j < n/4$). 이때 현 $sc[i]$ 는 Wt_ch 와 서로 가시적이므로 $sc[i]$ 는 $tc[1]$ 과 반드시 한 점에서 교차하고, 또한 $tc[j]$ 는 $sc[1]$ 과 반드시 한 점에서 교차한다. 그러므로 다각형 P 에서 현 집합 $SC = \{sc[1], \dots, sc[i]\}$ 와 TC

$= \{tc[1], \dots, tc[j]\}$ 를 구성하는 현의 개수는 같다 ($i=j$). 서로 교차하는 SC 의 현과 TC 의 현의 쌍 $(sc[1], tc[j]), (sc[2], tc[j-1]), \dots, (sc[i], tc[1])$ 들이 다각형 P 의 경계선과 교차하여 형성하는 영역을 교차영역 ia 라고 하면, Ws_ch 와 Wt_ch 가 서로 비가시적인 약 가시적 다각형 P 에서는 1개 또는 2개의 기준점을 가지므로 1개 이상의 교차영역이 존재하고, 또한 교차영역의 집합 $IA = \{ia[1], ia[2], \dots, ia[i]\}$ 를 형성할 수 있다. 교차영역의 수는 SC 또는 TC 를 이루는 현의 개수와 같으며 인덱스 차이가 1인 교차영역들은 서로 가시적이다[그림 5(a)][17].

약 가시적 다각형 P 에서 Ws_ch 와 Wt_ch 를 제외한 교차 영역들을 i 개의 노드로 표현하고 교차 영역들을 제외한 나머지 부분 다각형들을 노드를 연결하는 변으로 표현하면, 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성할 수 있다. 이때 Ws_ch 를 근 노드로, Wt_ch 를 단말 노드로 사용하는 $G(P)$ 는 연속된 순서의 교차 영역들을 내부 노드로 가지는 트리의 성질을 가지므로 근 노드에서 단말 노드까지의 경로는 최소 개수의 변으로 연결된다[그림 5(b)]. 이때의 경로는 P 의 내부에서 구성된 최소 링크의 경로가 된다[그림 5(c)]. Ws_ch 와 Wt_ch 가 서로 비가시적인 경우, 최소링크를 가진 경비원 경로를 $O(n)$ 시간에 구할 수 있는 알고리즘을 제시한다.



[그림 5] 약 가시성 다각형과 최소링크의 경비원 경로의 관계
 [Fig. 5] Relation of polygon and watchman route with minimum link

알고리즘 "경비원 경로 찾기"

입력 : 약 가시적 다각형의 Ws_ch 과 Wt_ch

출력 : 최소링크를 가진 경비원 경로

단계 1 : Ws_ch 과 Wt_ch 에서 구성한 SC 와 TC 를 이용하여 교차영역의 집합 IA 를 구성

단계 2 : 교차영역과 함께 분할된 부분 다각형들을 가시성 그래프 $G(P)$ 로 변환한다.

단계 3 : 경비원 경로 $\leftarrow G(P)$ 의 근 노드에서 단말 노드까지의 경로.

정리 1 알고리즘 "경비원 경로 찾기"는 주어진 약 가시적 다각형에서 최소 링크의 경비원 경로를 $O(n)$ 시간에 구성할 수 있다.

증명 단계 1에서 Ws_ch 과 Wt_ch 의 가시성 다각형과 가시 현들의 가시성 다각형을 구성하기 위하여 $O(n)$ 의 시간이 필요하다. 전 처리 과정으로 다각형 P 의 내부를 삼각 화하여 변의 가시성 다각형이나 체인의 가시성 다각형을 구하는 시간을 $O(n)$ 에서 $O(1)$ 로 줄일 수 있다. 이때 t 는 변 또는 체인 가시성 다각형에 의해 교차되는 삼각형의 개수이다. 그리고 $\sum(t) = O(n)$ 이므로 하나의 가시 현에서 다음 순서의 가시 현을 반복적으로 구성하는 과정은 $O(n)$ 시간 내에 수행할 수 있다[13]. 단계 2에서 P 의 내부에서 연속적인 순서로 존재하는 교차영역들을 노드로 변환하고 교차 영역들을 제외한 나머지 부분 다각형들은 노드들을 연결하는 변으로 변환시킴으로써 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성할 수 있으므로 $G(P)$ 는 $O(n)$ 시간에 구성할 수 있다. 그리고 단계 3에서 $G(P)$ 를 구성하고 있는 노드의 수는 다각형을 이루는 꼭지점의 개수인 n 에 비해 훨씬 적으므로 $O(n)$ 시간에 최소링크의 경비원 경로를 구할 수 있다. 그러므로 알고리즘 "경비원 경로 찾기"는 $O(n)$ 시간에 약 가시적 다각형의 Ws_ch 와 Wt_ch 가 주어졌을 때 경로 상에서 다각형 내부를 모두 감시할 수 있는 최소 링크의 경비원 경로를 구성할 수 있다. 또한 Ws_ch 와 Wt_ch , $Vis(Ws_ch)$ 와 $Vis(Wt_ch)$, 그리고 교차영역들에 대한 자료 저장을 위하여 $O(n)$ 공간이 필요하다.

4. 결론

경비원 경로 문제는 경로의 길이를 최소화시키는 문제에 대한 연구가 주로 이루어져 왔다. 본 논문에서는 n 개의 꼭지점을 가진 약 가시적 다각형의 내부를 경로 상에서 모두 감시할 수 있는 최소링크의 경비원 경로를 $O(n^2)$ 시간에 구하는 알고리즘을 제시하였다. 2개의 가시 체인으로 구성된 약 가시적 다각형의 내부에서 경비원의 출발 위치를 포함하는 한계 체인 Ws_ch 와 Wt_ch 를 $O(en)$ 시간 내에 구성하고, 한계 체인들의 가시성 다각형을 이용하여 가시 현 sc 과 tc 을 결정한다. 이때 e 는 한계 체인을 구성할 때 $ch(s, t)$ 또는 $ch^*(s, t)$ 와의 교차를 검색해야 하는 방향성 선분의 개수로서 최대 $n/4$ 개 이하의 개수를 가진다. 그리고 가시 현의 집합 SC 와 TC 를 구하여 2개의 가시 현이 교차하여 생성되는 교차영역의 집합 IA 를 이용하여 약 가시성 다각형을 부분 다각형들로 분할함으로써 Ws_ch 를 근 노드, Wt_ch 를 단말 노드로 하며 교차영역들을 내부 노드로 가지는 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성하였다. $G(P)$ 의 근 노드에서 단말 노드까지의 경로를 선형 시간에 구함으로써 최소링크의 경비원 경로를 구성하였다. 주어진 공간을 일정한 속도로 이동하면서 공간의 내부를 모두 감시하는 자동경비 시스템을 가정하면 최단 경로를 목적으로 진행 방향의 전환이 많아질 수 있으며 이는 제어의 복잡성이나 시간적인 측면에서 볼 때 더 많은 비용을 요구하므로 최단 경비원 경로보다 최소링크를 가진 경비원 경로가 더 실용적이라 할 수 있다. 그리고 송·수신 측이 서로 가시적일 경우에만 전송이 가능한 마이크로파 네트워크에서 리피터의 위치 등을 설정하는 문제 등에 활용될 수 있는 특징들을 가지고 있다. 향후 연구과제로는 약 가시적 다각형에서 최소링크를 가진 최단 경비원 경로와 최단 경비원 경로를 구하는 문제나 단순 다각형에서 최소링크의 경비원 경로를 구하는 문제 등을 고려할 수 있다.

※ 참고문헌

- [1] A. Aggarwal, *The art gallery theorem : its variations, applications, and algorithmic aspects*, Ph.D. thesis, Johns Hopkins Univ., 1984.
- [2] Y. J. Chiang and R. Tammasia, "Optimum shortest path and minimum link path queries between two convex polygons inside a simple polygonal obstacle," *Info. Proc. Lett.*, vol. 28, pp. 39-44, 1994.
- [3] W. P. Chin and S. Ntafos, "Optimum watchman route," *Info. Proc. Lett.*, vol. 28, pp. 39-44, 1988.
- [4] W. P. Chin and S. Ntafos, "Shortest watchman routes in simple polygons," *Discrete Comput. Geometry*, Vol. 6, pp. 9-31, 1991.
- [5] V. Chvátal. "A combinatorial theorem in plane geometry," *J. Combin. Theory ser. B*, Vol. 18, pp. 39-41, 1975.
- [6] L. J. Guibas and J. Hershberger, "Optimal shortest path queries in a simple polygon," *Proc. 3rd ACM Symposium on Computational Geometry*, Waterloo, pp. 50-63, 1987.
- [7] P. J. Heffernan, "An optimal algorithm for the two guard problem," *Proc. 9th ACM Symp. on Computational Geometry*, pp. 348-358, 1993.
- [8] C. Icking and R. Klein, "The two guards problem," *Proc. 7th ACM Symp. on Computational Geometry*, pp. 166-175, 1991.
- [9] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman, "Traditional galleries require fewer watchman," *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, Vol. 4, pp. 194-206, 1983.
- [10] S. H. Lee and K. Y. Chwa, "Some chain visibility problems in a simple polygon," *Algorithmica*, Vol. 5, pp. 485-507, 1990.
- [11] B. J. Nilsson, *Guarding Art Galleries - Methods for Mobile Guards*, Ph. D. thesis, Lund Univ., 1995.
- [12] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, NewYork, 1987.
- [13] S. Suri, "On some link distance problems in a simple polygon," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 6, pp. 108-113, 1990.
- [14] X. Tan, "Edge guards in straight walkable polygons," *IICGA*, Vol. 9, No. 1, pp. 63-79, 1999.
- [15] L. G. Aleksandrov, H. N. Djidjev and J. R. Sack, "An $O(n \log n)$ algorithm for finding a shortest central link segment," *IICGA*, Vol. 10, No. 2, pp. 157-188, 2000.
- [16] 류상률, 서대화, 김승호, "단조 다각형에서 최단 경비원 경로를 구하는 알고리즘," *정보과학회 논문지 제23권 제3호*, pp. 244-258, 1996.
- [17] 류상률, 김승호, "단조 다각형에서 최소링크를 가진 경비원 경로를 구하는 최적 알고리즘," *정보과학회 논문지 제24권 제2호*, pp. 122-130, 1997.

류 상 물



1988년 경북대학교 전자공학과
졸업 (공학사)

1990년 경북대학교 대학원
컴퓨터 공학과 졸업
(공학석사)

1997년 경북대학교 대학원
컴퓨터 공학과 졸업
(공학박사)

1998년 ~ 현재 청운대학교
컴퓨터과학과 조교수

관심분야 :

알고리즘 및 계산이론,
멀티미디어