

## 축하중과 이축모멘트를 받는 철근콘크리트 기둥의 모멘트-곡률에 관한 모델링 및 변수고찰

이차돈<sup>1)\*</sup> · 최기봉<sup>2)</sup> · 차준실<sup>3)</sup> · 김성진<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 중앙대학교 건축공학과 <sup>2)</sup> 경원대학교 건축공학과 <sup>3)</sup> 동양구조안전기술

(2002년 2월 25일 원고접수, 2002년 7월 29일 심사완료)

### Modeling and Parametric Studies on Moment-Curvature Relation of a Reinforced Concrete Column Subject to Axial-Load and Bi-Axial Moment

Cha-don Lee<sup>1)\*</sup>, Ki-Bong Choi<sup>2)</sup>, Jun-Sil Cha<sup>3)</sup>, and Sung-Jin Kim<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Dept. of Architectural Engineering, Chung-Ang University, Anseong, 456-756, Korea

<sup>2)</sup> Dept. of Architectural Engineering, Kyungwon University, Seongnam, 461-701, Korea

<sup>3)</sup> Dongyang Safety MND, Seoul, 135-270, Korea

(Received February 25, 2002, Accepted July 29, 2002)

#### ABSTRACT

A analytical model is developed which can simulate a complete inelastic biaxial moment-curvature relations of a reinforced concrete column. The model can simulate sudden drop in moment capacity after peak moment and due to spalling of cover concrete. Parametric studies are performed examine the effects of constituent material properties as well as topological arrangement of reinforcements on moment-curvature relations and P-M interaction curve. It has been analytically observed that ductility of a reinforced concrete column is influenced mostly by magnitude of the axial load and spacings or the volume of lateral reinforcements. Compared to ACI P-M interaction curve, overall increase about 10% in square root of sum of squares of axial force and moment, and about 20% in peak load are observed for the columns reinforced according to ACI seismic design code.

**Keywords :** biaxial, column, confinement, modeling, parametric studies

#### 1. 서 론

철근콘크리트 기둥의 경우 과도한 변형이 발생하게 되면 피복콘크리트의 탈락과 함께 강도 및 연성에 변화가 오게 되는데 이 변화의 정도는 기둥심부의 콘크리트 구속 정도에 의해 좌우된다<sup>1) 10)</sup>. 여러 연구자들의 결과에 의하면 철근콘크리트 기둥의 소성변위능력은 기둥 내 횡방향 철근의 구속 정도에 따라 좌우됨이 밝혀지고 있다. 철근콘크리트 기둥의 거동은 다음과 같은 변수에 의해 영향을 받는다 : 1) 축력의 크기 2) 수평철근의 간격 3) 수평철근의 철근비 4) 콘크리트의 강도 5) 주근의 배치 6) 수평철근의 강도 7) 피복 8) 수평철근의 형태 9) 변형률 구배 10) 변형률 속도. 기둥의 비탄성거동에 영향을 미치는 변수의 효과를 구명하기 위하여, 실험과 이론에 기초한 많은 연구가 행하여 졌다<sup>1) 15)</sup>. 구속된 콘크리트의 압축응력-변형률에 대한 모델링은 크게 실험모델과 반실험모델로 구

분될 수 있다. 실험모델의 경우 상기에서 고려한 각 변수들의 영향을 실험적으로 구명한 후 이를 응력-변형률 모델식에 도입하였다<sup>1) 3,4)</sup>. 한편, 반실험식은 철근콘크리트기둥단면에 대한 유효구속단면의 크기, 횡방향 구속철근의 구속에 따른 횡방향 축압의 크기, 이들의 조합 등을 고려한 이론식<sup>2,5,18)</sup>을 산정한 후 이들 이론식에 나타난 미정계수를 실험식과 비교하여 결정하는 방법을 택하고 있다. 이렇게 결정된 주요 변수값을 응력-변형률식에 도입하여 구속된 콘크리트의 응력-변형률을 모델링하였다. 구속된 콘크리트의 응력-변형률 거동에 영향을 미치는 변수는 매우 다양하며, 따라서 이들 변수들이 결과적으로 기둥의 모멘트-곡률에 미치는 영향도 매우 복잡하다고 볼 수 있다. 대부분의 실험은 단순 축하중이나 1축 모멘트에 대하여 집중되어 있으며 실험장치의 용량제한으로 인하여 그 시험체의 크기도 제한적이라고 볼 수 있다. 따라서 몇몇 연구자들에 의하여 콘크리트의 구속정도 여부가 기둥의 모멘트-곡률관계에 대하여 이론적으로 고찰하고자 하는 연구가 진행되어 왔다. Chen et al.<sup>16)</sup>은 Newton's Method에 근거하여 1축 하중을 받는 기둥의 소성거동에 대하여 이

\* Corresponding author

Tel : 031-670-3346 Fax : 031-675-6489

E-mail : cdlee@chungang.edu

론적으로 모델링하였다. 본 연구는 이 모델을 이용하여 축하중과 1방향 모멘트를 받는 기둥에 대한 축하중과 연성에 대하여 이론적으로 고찰하였다. 그러나 이 모델은 Yen<sup>17)</sup>이 지적하였듯이 최대강도 후 감소할 수 있는 기둥 내력을 추적할 수 없는 단점을 갖고 있다. 구속된 기둥이 모멘트-곡률 관계를 정확히 예측하기 위해서는 구속된 콘크리트에 대한 신뢰할 만한 응력-변형률 모델과 함께 모멘트-곡률 관계에서 피복콘크리트 탈락, 최대강도 후 취성적인 성향을 나타내는 강도감소영향, 그리고 이후에 발생할 수 있는 연화현상까지 추적가능한 모델을 적용시켜야 한다. 본 연구에서는 기존에 제시된 Chen et al.<sup>16)</sup>의 모델이 갖는 단점을 보완하고 앞에서 서술한 기둥의 실제적 거동을 묘사할 수 있는 이론모델을 제시하고자 하였다. 본 연구에서 개발된 모델은 이축하중이 증가함에 따라 증가하게 되는 곡률을 증가시킴으로써 기본적으로 Newton's method에서 발생할 수 있는 발산문제를 제거하였다. 기둥 단면은 사각그리드로 나뉘었으며 중립축이 부재단면축에 기울어져 있을 경우 삼각형 형태의 domain을 고려하여 내력 및 모멘트산정을 위한 적분시 가능한 오차를 줄이고자 하였다. 개발된 모델은 임의단면이나 임의 배근형태 그리고 임의 응력변형률 모델을 포함할 수 있도록 일반화시켰다.

## 2. 모델링

### 2.1 가정

다음과 같은 가정이 적용되었다.

- 1) 변형되기전에 평면이었던 기둥내 단면은 변형후에 그 평면을 유지한다.
- 2) 일정한 축하중아래에서 2축 모멘트변화를 고려하였다.
- 3) 전단변형은 무시되었다.
- 4) 콘크리트의 인장강도는 무시되었다.

### 2.2 축력 및 모멘트 산정

Fig. 1은 2축 모멘트를 받는 기둥의 변형된 기둥단면의 변형률 평면을 나타낸다. 만일 부재단면이 x축과  $\theta$ 만큼 각도를 이루는 중립축 방향을 나타내는 단위 벡터를  $\mathbf{u}$ 라고 하자 :

$$\mathbf{u}(\theta) = \cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j} \quad (1)$$

이 중립축에 대하여 측정된 곡률을 점진적으로 증가시킴으로써 이에 따른 모멘트 크기를 산정하고자 하였다. 단면내 저항모멘트와 하중가력점방향(a)에 대한 정의는 다음과 같다.

$$M_{xu} = P_u \cdot e_y \quad M_{yu} = P_u \cdot e_x \quad (2a)$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{M_{yu}}{M_{xu}} \right| \quad (2b)$$

각도  $\alpha$ 는  $0^\circ$ 와  $90^\circ$ 사이의 값을 갖는 것으로 가정하였다.  $\phi_u^k$ 를  $\mathbf{u}$ 방향으로 k번째 반복계산해서 구하여진 기둥단면내 평면의 곡률이라 하고  $\phi_x^k, \phi_y^k$ 를 각각 k번째 반복계산해서 변형률 평면의 x 및 y축에 대한 기울기라 하면 임의점  $(x, y)$ 에서의 변형률 크기는 다음과 같다.

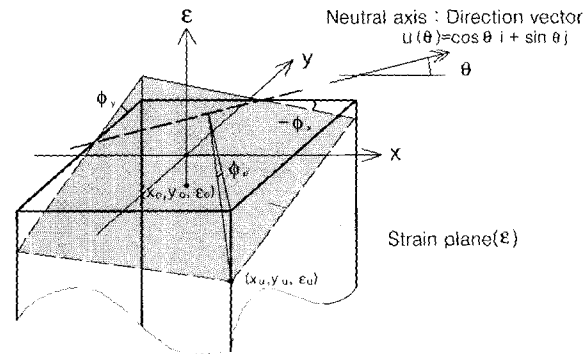
$$\epsilon = \phi_x^k(x - x_0) + \phi_y^k(y - y_0) + \epsilon_0 \quad (3a)$$

$$\text{여기서, } \phi_x^k = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \quad (3b)$$

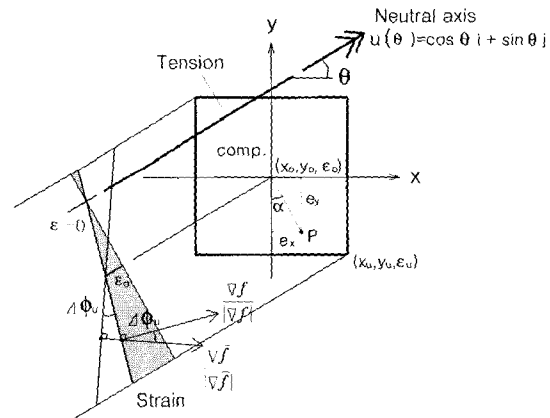
$$\phi_y^k = \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \quad (3c)$$

$$\epsilon_0 = \text{strain at } (x_0, y_0) \quad (3d)$$

본 연구에서는 인장응력에 대한 변형률을 양수값으로 사용하였다. 만일 반복계산과정에서 주어진 곡률  $\phi_u^k$ 에



(a) Deformed strain plane



(b) Normal vectors to deformed plane

Fig. 1 Notations of deformed strain plane in a column section

대한 올바른 중립축방향( $\mathbf{u}$ )이 산정되었다면 하중가력점방향( $\mathbf{a}$ )은 다음 값을 만족하여야 한다.

$$\tan \alpha = \left| \frac{M_{yu}^k}{M_{xu}^k} \right| \quad (4)$$

( $k-1$ )번째 곡률에 대하여 단면내 평면이 미소량  $\Delta\phi_u$ 만큼 회전하였다면  $k$ 번째 곡률은 식(3a)으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_x^k = \phi_x^{k-1} - \Delta\phi_u \cdot \sin \theta^{k-1} \quad (4a)$$

$$\phi_y^k = \phi_y^{k-1} + \Delta\phi_u \cdot \cos \theta^{k-1} \quad (4b)$$

( $k-1$ )번째 단면과  $k$ 번째 평면에 대하여 단위수직 벡터를 벡터곱 함으로써 중립축방향 벡터를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla f^{k-1}}{|\nabla f^{k-1}|} \times \frac{\nabla f^k}{|\nabla f^k|} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\phi_x^{k-1}}{A} & -\frac{\phi_y^{k-1}}{A} & \frac{1}{A} \\ -\frac{\phi_x^k}{B} & -\frac{\phi_y^k}{B} & \frac{1}{B} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( -\frac{\phi_y^{k-1}}{AB} + \frac{\phi_y^k}{AB} \right) + \mathbf{j} \left( -\frac{\phi_x^{k-1}}{AB} - \frac{\phi_x^k}{AB} \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left( -\frac{\phi_x^{k-1}\phi_y^k - \phi_x^k\phi_y^{k-1}}{AB} \right) \\ &= (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot \sin \Delta\phi_u \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\text{여기서, } A = \sqrt{1 + (\phi_x^{k-1})^2 + (\phi_y^{k-1})^2} \quad (5b)$$

$$B = \sqrt{1 + (\phi_x^k)^2 + (\phi_y^k)^2} \quad (5c)$$

상기 식에서 각 벡터계수를 같도록 놓으면 다음 관계식을 얻는다.

$$-\frac{\phi_y^{k-1}}{AB} + \frac{\phi_y^k}{AB} = \cos \theta \cdot \sin \Delta\phi_u \quad (6a)$$

$$\frac{\phi_x^{k-1}}{AB} - \frac{\phi_x^k}{AB} = \sin \theta \cdot \sin \Delta\phi_u \quad (6b)$$

상기 식에서  $A \approx 1.0$ 과  $B \approx 1.0$ 이므로 식(6)은 다음과 같이 단순화된다.

$$-\phi_y^{k-1} + \phi_y^k = \cos \theta \cdot \sin \Delta\phi_u \quad (7a)$$

$$\phi_x^{k-1} - \phi_x^k = \sin \theta \cdot \sin \Delta\phi_u \quad (7b)$$

상기 식으로부터 ( $k-1$ )번째 곡률로부터  $k$ 번째 곡률을 유도할 수 있다.

$$\phi_x^k = \phi_x^{k-1} - \sin \theta \cdot \sin \Delta\phi_u \quad (8a)$$

$$\phi_y^k = \phi_y^{k-1} + \cos \theta \cdot \sin \Delta\phi_u \quad (8b)$$

만일  $\Delta\phi_u$ 가 작은 값이면 상기 식에서  $\sin \Delta\phi_u$ 는  $\Delta\phi_u$ 로 근사화할 수 있으므로 식(8)은 다음과 같이 된다.

$$\phi_x^k = \phi_x^{k-1} - \Delta\phi_u \cdot \sin \theta \quad (9a)$$

$$\phi_y^k = \phi_y^{k-1} + \Delta\phi_u \cdot \cos \theta \quad (9b)$$

만일 미소량의 곡률변화  $\Delta\phi_u$ 에 대하여  $\theta$ 의 변화량이 미소하다고 가정한다면 상기 식(9)는 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_{x,p}^k &\doteq -(\phi_x^k - \Delta\phi_u) \cdot \sin \theta_p^k - \Delta\phi_u \cdot \sin \theta_p^k \\ &= -\phi_x^k \cdot \sin \theta_p^k \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{y,p}^k &\doteq (\phi_y^k - \Delta\phi_u) \cdot \cos \theta_p^k + \Delta\phi_u \cdot \cos \theta_p^k \\ &= \phi_y^k \cdot \cos \theta_p^k \end{aligned} \quad (10b)$$

여기서,  $\phi_{x,p}^k, \phi_{y,p}^k$  :  $k$ 번째 반복중  $p$ 번째 sub-cycle에서의 개략적인 곡률,  $\theta_p^k$  :  $k$ 번째 반복중  $p$ 번째 sub-cycle에서의 중립축 각도이다.  $\theta_p^k$ 는 secant method에 의하여 반복적으로 수정하였다.

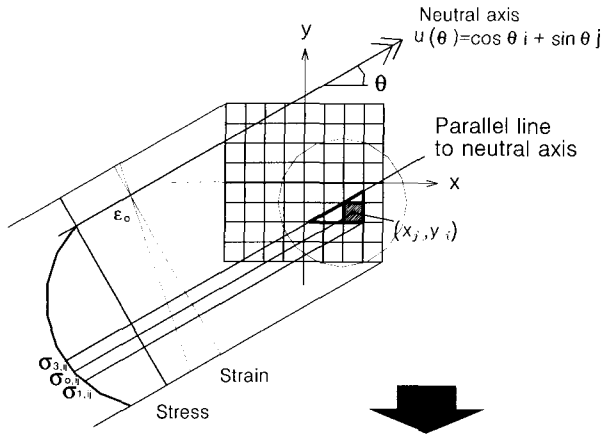
기둥의 단면은 Fig. 2에서와 같이 사각형 cell로서 나누었다. 각 cell에 작용하는 응력(Fig. 2(a))은 다음과 같이 2차식으로 변하는 것으로 가정하였다.

$$\sigma_{ij}(z) = a_{1,ij}z^2 + a_{2,ij}z + a_{3,ij} \quad (0 \leq z \leq l_{ij}) \quad (11)$$

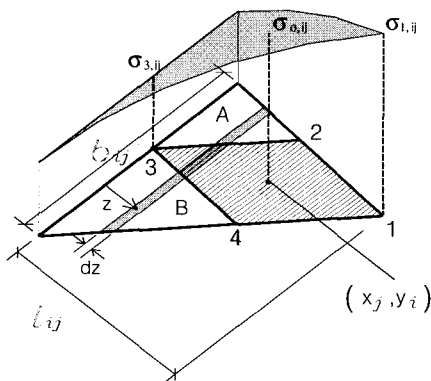
여기서,  $\sigma_{ij}(z) = (x_j, y_i)$ 점에서의 cell 중심에서의 응력 분포  $z = \text{cell의 밀변 중심좌표}(x_j, y_i)$ 부터 측정된 중립축까지의 수직좌표,  $a_{1,ij}, a_{2,ij}, a_{3,ij}$  : 2차 변화 응력계수,  $l_{ij}$  : 압축받는 면으로부터 꼭지점까지의 수직거리이다. 사각cell의 전체좌표계에서 중심좌표를  $(x_i, y_j)$ 라고 할 때 삼각cell의 임의 국부좌표  $z$ 에서의 응력은 다음과 같이 산정된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(z) &= \frac{1}{l_{ij}^2} (-4\sigma_{0,ij} + 2\sigma_{1,ij} + 2\sigma_{3,ij}) \cdot z^2 + \\ &\quad \frac{1}{l_{ij}} (4\sigma_{0,ij} - \sigma_{1,ij} - 3\sigma_{3,ij}) \cdot z + \sigma_{3,ij} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $\sigma_{0,ij}, \sigma_{1,ij}, \sigma_{3,ij}$  = 삼각형요소에서  $(x_j, y_i)$ , 밀변에 포함되지 않는 꼭지점, 밀면에서의 응력을 나타낸다.



(a) Column grids and strain-stress distributions



(b) Quadratically varying stress distribution

Fig. 2 Integration scheme

각 사각 cell이 받는 축력 및 모멘트를 정확하게 산정하기 위하여 사각 cell을 포함하는 삼각 cell을 적용하였으며, 이 삼각 cell로부터 사각 cell의 응력 및 모멘트는 전체 삼각 cell에 해당되는 축력 및 모멘트를 산정한 후 사각 cell을 제외한 나머지 삼각 cell(Fig. 2의 'A' 및 'B' cell)들의 축력 및 모멘트를 감함으로써 산정하였다. 전체 삼각형 cell에 작용하는 축력 및 모멘트는 다음과 같은 식으로 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta P_{ET,ij} &= \int_0^{l_{ET,ij}} \sigma_{ij}(z) \cdot b_{ET,ij}(z) \cdot dz \\ &= \int_0^{l_{ET,ij}} (a_{1,ij}z^2 + a_{2,ij}z + a_{3,ij}) \\ &\quad \times \left( -\frac{b_{ET,ij}}{l_{ET,ij}}z + b_{ET,ij} \right) \cdot dz \quad (13a) \\ &= b_{ET,ij} \left( \frac{a_{1,ij}}{12} l_{ET,ij}^3 + \frac{a_{2,ij}}{6} l_{ET,ij}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{3,ij}}{2} l_{ET,ij} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta m_{x,ET,ij} = \sigma_{ij}(z) \cdot b_{ET,ij}(z) \cdot dz \cdot y_{ET,ij}(z) \quad (13b)$$

$$\Delta m_{y,ET,ij} = \sigma_{ij}(z) \cdot b_{ET,ij}(z) \cdot dz \cdot x_{ET,ij}(z) \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{x,ET,ij} &= \int_0^{l_{ET,ij}} \Delta m_{x,ET,ij} \\ &= \int_0^{l_{ET,ij}} \sigma_{ij}(z) \cdot b_{ET,ij}(z) \cdot dz \cdot y_{ET,ij}(z) \quad (13d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{y,ET,ij} &= \int_0^{l_{ET,ij}} \Delta m_{y,ET,ij} \\ &= \int_0^{l_{ET,ij}} \sigma_{ij}(z) \cdot b_{ET,ij}(z) \cdot dz \cdot x_{ET,ij}(z) \quad (13e) \end{aligned}$$

여기서,  $b_{ET,ij}(z) = -\frac{b_{ET,ij}}{l_{ET,ij}}z + b_{ET,ij}$

$$\begin{aligned} x_{ET,ij}(z) &= \frac{1}{2l_{ET,ij}} (2x_{b,ij} - x_{a,ij} - x_{c,ij}) \cdot z \\ &\quad + \frac{1}{2} (x_{a,ij} + x_{c,ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{ET,ij}(z) &= \frac{1}{2l_{ET,ij}} (2y_{b,ij} - y_{a,ij} - y_{c,ij}) \cdot z \\ &\quad + \frac{1}{2} (y_{a,ij} + y_{c,ij}) \end{aligned}$$

삼각형 'A' 및 'B'에 대한 축력 및 모멘트도 유사하게 산정할 수 있다. 이 식들을 이용하여 기둥전체단면의 축력 및 모멘트를 산정할 수 있다.

$$P = \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{i=1}^{n_y} \Delta P_{ij} \quad (14a)$$

$$M_x = \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{i=1}^{n_y} \Delta M_{x,ij} \quad (14b)$$

$$M_y = \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{i=1}^{n_y} \Delta M_{y,ij} \quad (14c)$$

$$\text{여기서, } \Delta P_{ij} = \Delta P_{ET,ij} - \Delta P_{A,ij} - \Delta P_{B,ij} \quad (14d)$$

$$\Delta M_{x,ij} = \Delta M_{x,ET,ij} - \Delta M_{x,A,ij} - \Delta M_{x,B,ij} \quad (14e)$$

$$\Delta M_{y,ij} = \Delta M_{y,ET,ij} - \Delta M_{y,A,ij} - \Delta M_{y,B,ij} \quad (14f)$$

### 2.3 알고리즘

본 알고리즘은 곡률을 점진적으로 증가시키면서 증가된 단계별 곡률에 대하여 기둥단면이 일정한 축하중을 유지함과 동시에 이때의 모멘트 크기를 산정한다. 본 알고리즘은 다음과 같이 정리할 수 있다.

1) 하중가력점방향( $\alpha$ )의 하한값과 상한값( $\alpha_L$ 과  $\alpha_U$ ), 곡률의 미소증가분( $\Delta\phi_u$ )을 초기에 입력한다.  $\alpha$ 를  $\alpha_L$ 로 둔다.

2) 만일  $\alpha$ 가  $\alpha_U$ 보다 크면 종료하고 그렇지 않은 경우  $k$ 와  $\phi_u^0$ 의 초기값에 0을 입력한다.

3)  $k$ 값을 1 증가시키고  $\phi_u^k = \phi_u^{k-1} + \Delta\phi_u$ 를 현재  $k$ 번째 단계의 곡률값으로 한다. 만일  $\phi_u^k$ 가  $\phi_u$ 보다 크면  $\alpha$

값을  $\Delta\alpha$ 만큼 증가시키고 앞의 2)단계를 수행한다. 그렇지 않은 경우, 증분된 곡률이 최종곡률( $\phi_u$ )에 도달할 때까지 다음과정을 반복 수행한다. 현재곡률( $\phi_u^k$ )에서의 중립축 방향각  $\theta_k$ 는 주어진 축력과 하중가력점방향(a)을 만족하도록 반복 계산을 통하여 산정된다.

3.1)  $\theta_p^k$ 를  $k$ 번째 계산단계에서의  $\theta^k$ 값에 대한  $p$ 번째 반복계산에 의한 수정치라고 하자. 초기  $p$ 는 0으로 둔다.  $k$ 번째 계산단계의 두 중립축 방향각  $\theta_0^k$ 와  $\theta_1^k$ 을 다음과 같이 가정한다.

$$\theta_0^k = \alpha + \Delta\theta, \quad \theta_1^k = \alpha - \Delta\theta$$

3.2) 곡률  $\theta_u^k$ 에서 가정된 중립축 방향각( $\theta^k$ )에 대하여 주어진 축력( $P_u$ )과 하중가력점방향( $a$ )을 만족하는 변형률 평면을 Secant method를 적용하여 아래와 같이 산정한다.

- (a)  $\theta_0^k$ 와  $\theta_1^k$ 에서 얻어진 각각의 2축 모멘트( $M_{x,0}^k, M_{y,0}^k$ )와 ( $M_{x,1}^k, M_{y,1}^k$ )를 산정한다.
- (b) 만일 반복횟수( $p$ )가 주어진 최대 반복수보다 크게 되면 발산이 일어난 경우이므로 Secant method 대신 bracketing method의 하나인 Regula-Falsi method를 적용한다. 그렇지 않을 경우, 다음과 같이 Secant method를 적용하여 중립축방향을 수정한다.
- (c)  $\theta_{p+2}^k$ 에서 산정된 2축 모멘트를 ( $M_{x,p+2}^k, M_{y,p+2}^k$ )이라 하자. 이들 값을 이용하여 수렴정도  $\left| \tan \alpha - \frac{M_{y,p+2}^k}{M_{x,p+2}^k} \right| \leq \text{tolerance}$ 를 검토한다. 만일 수렴한 경우에는 반복단계 3)에서  $k$ 값을 1 증가시킨 후 그 다음 곡률값을  $\phi_u^k$ 에 대한 계산을 실시한다. 수렴하지 않은 경우에는  $p$ 를 1만큼 증가시킨후 반복계산 (b)의 단계부터 다시 수행한다.

상기의 알고리즘을 Fig. 3에 정리하여 나타내었다.

$\phi_u^k$ 와  $\theta_p^k$ 가 주어진 경우 이때의 1축 모멘트의 크기 ( $M_{x,p}^k, M_{y,p}^k$ )들은 0점( $x_0, y_0$ )에서의 변형률( $\epsilon_{0,p}^k$ )크기에 따라 유일하게 산정된다. 즉, 주어진  $P_u^k$ 와  $\theta_p^k$ 에 대하여 축력이  $P_u$ 가 되도록 하는  $\epsilon_{0,p}^k$ 가  $M_{x,p}^k, M_{y,p}^k$ 가 산정되기 전에 우선적으로 산정되어야 한다. 이 산정과정을 아래에 정리하였다.

- 1)  $\phi_u^k$ 로부터  $\phi_{x,p}^k$ 와  $\phi_{y,p}^k$ 를 산정한다.  $q=0$ 으로 둔다.

2)  $q$ 를 1만큼 증가시킨다. 만일  $q$ 가 주어진 최대반복 횟수보다 크게 되면 Regula-Falsi method를 적용하여  $\epsilon_{0,pq}^k$ 를 산정한다. 그렇지 않은 경우, Secant method를 적용한다. 산정된  $\epsilon_{0,pq}^k$ 와 주어진  $\phi_u^k, \theta_p^k$ 를 이용하여 이때의 축력  $P_{pq}^k$ 를 계산한다.

3) 주어진 축하중  $P_u$ 와 계산된  $P_{pq}^k$ 와의 차이를  $\Delta P_{pq}^k$ 라 한다. 만일  $|\Delta P_{pq}^k / P_u| \leq \text{tolerance}$ 이면 단면에서의 2축 모멘트( $M_{x,p}^k, M_{y,p}^k$ )를 산정한다. 그렇지 않을 경우  $\epsilon_{0,pq+1}^k = \epsilon_{0,pq}^k + \Delta\epsilon_p^k$ 를 계산한다. 여기서,  $\Delta\epsilon_p^k = -\Delta P_{pq}^k \left/ \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon_{0,pq}^k}$  이고,  $\frac{\partial P}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon_{0,pq}^k}$  는  $\epsilon_{0,pq}^k$ 에서의 central difference technique을 적용하여 구한다. 단계 2)로부터 반복계산을 수행한다.

Fig. 4는 상기의 알고리즘을 정의하고 있다.

### 3. 실험결과와의 비교

#### 3.1 구속된 콘크리트 응력-변형률 모델

본 모델에 적용된 구속된 콘크리트의 압축력-변형률 모델식은 본 연구들에 의하여 유도된 식을 적용하였다<sup>8)</sup>. 식에 나타나는 여러 변수들의 정의는 참고문헌<sup>18)</sup>에 정리되어 있으므로 본 논문에서는 생략하였다.

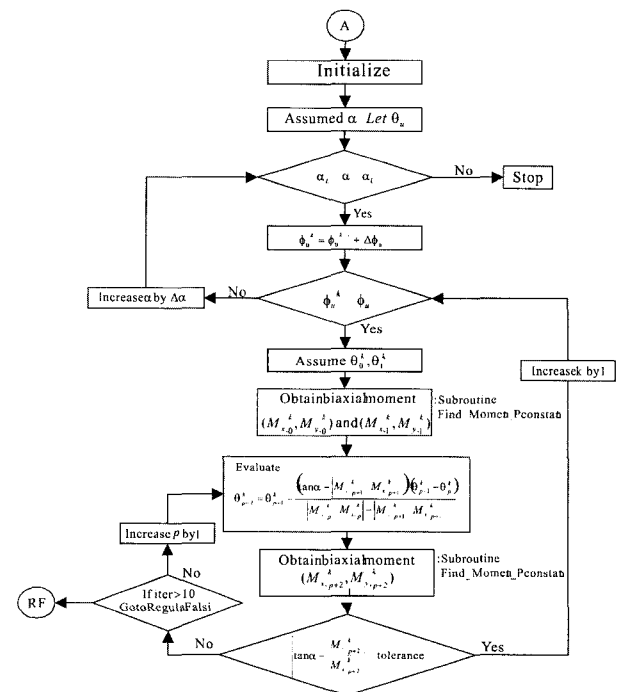


Fig. 3 Flow chart for the moment-curvature relation

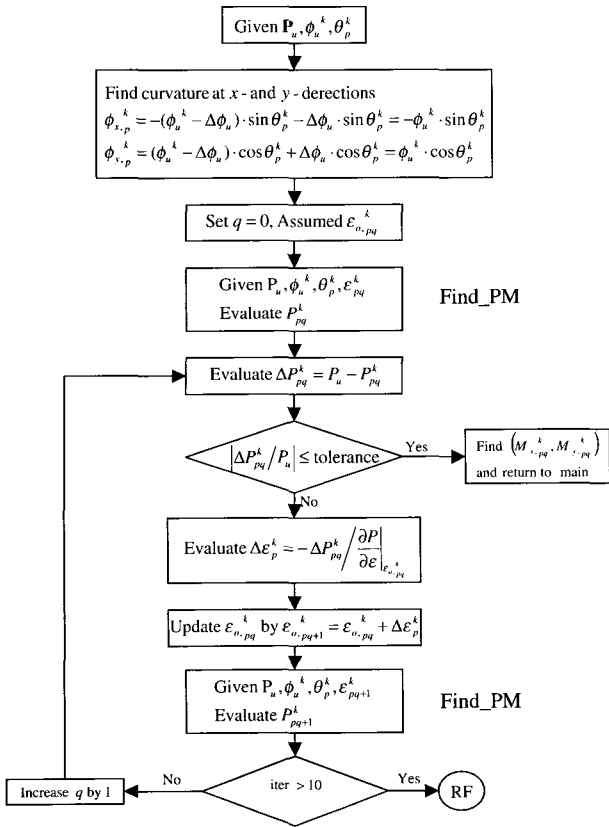


Fig. 4 Flow chart for finding strain at  $(x_0, y_0)$  (Subroutine Find\_Moment\_Pconstant)

$$f = \frac{f_{cc}'}{\epsilon_{cc}} (\epsilon - \epsilon_{cc})^2 + f_{cc}' \quad : \quad 0 \leq \epsilon < \epsilon_{cc} \quad (15a)$$

$$f = Z_{cc} \cdot \epsilon + f_{cc}' - \epsilon_{cc} \cdot Z_{cc} \quad : \quad \epsilon_{cc} \leq \epsilon < \epsilon_{30} \quad (15b)$$

$$f = 0.3f_{cc}' \quad : \quad \epsilon_{30} < \epsilon \quad (15c)$$

여기서,  $f_{cc}'$  = 구속된 콘크리트의 최대압축강도

$$= (K_s \cdot f_c')$$

$\epsilon_{cc}$  = 최대응력  $f_{cc}'$ 에서의 변형률

$\epsilon_{30}$  = 응력  $0.3f_{cc}'$ 에서의 변형률

$$K^* = K_s - 1.0$$

$$K_s = 1.0 + \frac{b \cdot h}{P_{0cc}} \cdot K_a \cdot K_p$$

$$= 1.0 + \beta \cdot \frac{b \cdot h}{P_{0cc}} \cdot \left[ 1.0 - \frac{\sum_{i=1}^{n_B} C_{B,i}^2 + \sum_{i=1}^{n_H} C_{H,i}^2}{\alpha \cdot A_{cc}} \right] \times \left( 1.0 - \frac{0.5s}{b} \cdot \tan \theta \right) \left( 1.0 - \frac{0.5s}{h} \cdot \tan \theta \right) \times \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n_{SH}} A_{sh} \cdot f_{yh} \cdot \sin \alpha_{B,i} + \sum_{i=1}^{n_{SH}} A_{sh} \cdot f_{yh} \cdot \sin \alpha_{H,i}}{d_t \cdot (b+h)} \right] \times \left( \frac{2c_0}{c_b + c_H} \right)^{\eta} \left( 1 + \frac{2s}{b+h} \right)^{-\omega}$$

### 3.2 철근의 응력-변형률 모델

철근의 인장 및 압축에 대한 응력-변형률 모델은 다음과 같다.

$$f_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad : \quad 0 \leq |\epsilon_s| < \epsilon_y \quad (16a)$$

$$f_s = f_y \quad : \quad \epsilon_y \leq |\epsilon_s| < \epsilon_{sh} \quad (16b)$$

$$f_s = f_y + E_{sh} \cdot (\epsilon_s - \epsilon_{sh}) \cdot \left[ 1 - \frac{E_{sh}(\epsilon_s - \epsilon_{sh})}{4(f_{su} - f_y)} \right] \quad : \quad \epsilon_{sh} \leq |\epsilon_s| < \epsilon_{su} \quad (16c)$$

여기서,  $f_s$  = 변형률  $\epsilon_s$ 에서의 응력

$f_y$  = 철근의 항복응력

$f_{su}$  = 철근의 극한응력

$E_s$  = 탄성계수

$E_{sh}$  = 변형률경화 시작점에서의 탄성계수 점선

$\epsilon_{sh}$  = 변형률경화의 시작점에서의 변형률

### 3.3 모델과 실험치 비교

Fig. 5는 실험결과와 모델예측값의 비교를 나타낸다. 개발된 모델은 비교적 실험치를 잘 예측하고 있음을 살펴볼 수 있다. Table 1은 시험체의 제원 및 사용된 재료의 특성을 정리하고 있다.

## 4. 기둥 모멘트-곡률에 미치는 변수영향

### 4.1 축력

Fig. 6은 축력이 모멘트-곡률에 미치는 영향을 나타내고 있다. 축력이 증가할수록 최대모멘트는 증가하다가 감소하나 이때의 곡률은 일정하게 감소함을 알 수 있다.  $\alpha$ 가  $0^\circ$  및  $45^\circ$  모두의 경우, 축력이 최대축하중의 60%에 이르면 기둥의 거동이 매우 취성적이 됨이 고찰되었다.

### 4.2 띠철근 간격

Fig. 7과 같이  $P=0.3P_o$ 으로서 축력이 비교적 작게 작용하는 기둥의 경우에는  $\alpha$  값에 거의 무관하게 띠철근 간격이 기둥의 강도 및 연성에 미치는 영향은 미비함을 알 수 있다. 그러나 축력이  $P=0.6P_o$ 으로서 작용할 경우에는 띠철근의 간격이 증가할수록 일축 또는 이축 모멘트에 대한 기둥의 연성이 크게 감소함을 살펴볼 수 있다 (Fig. 7).

### 4.3 띠철근 체적비

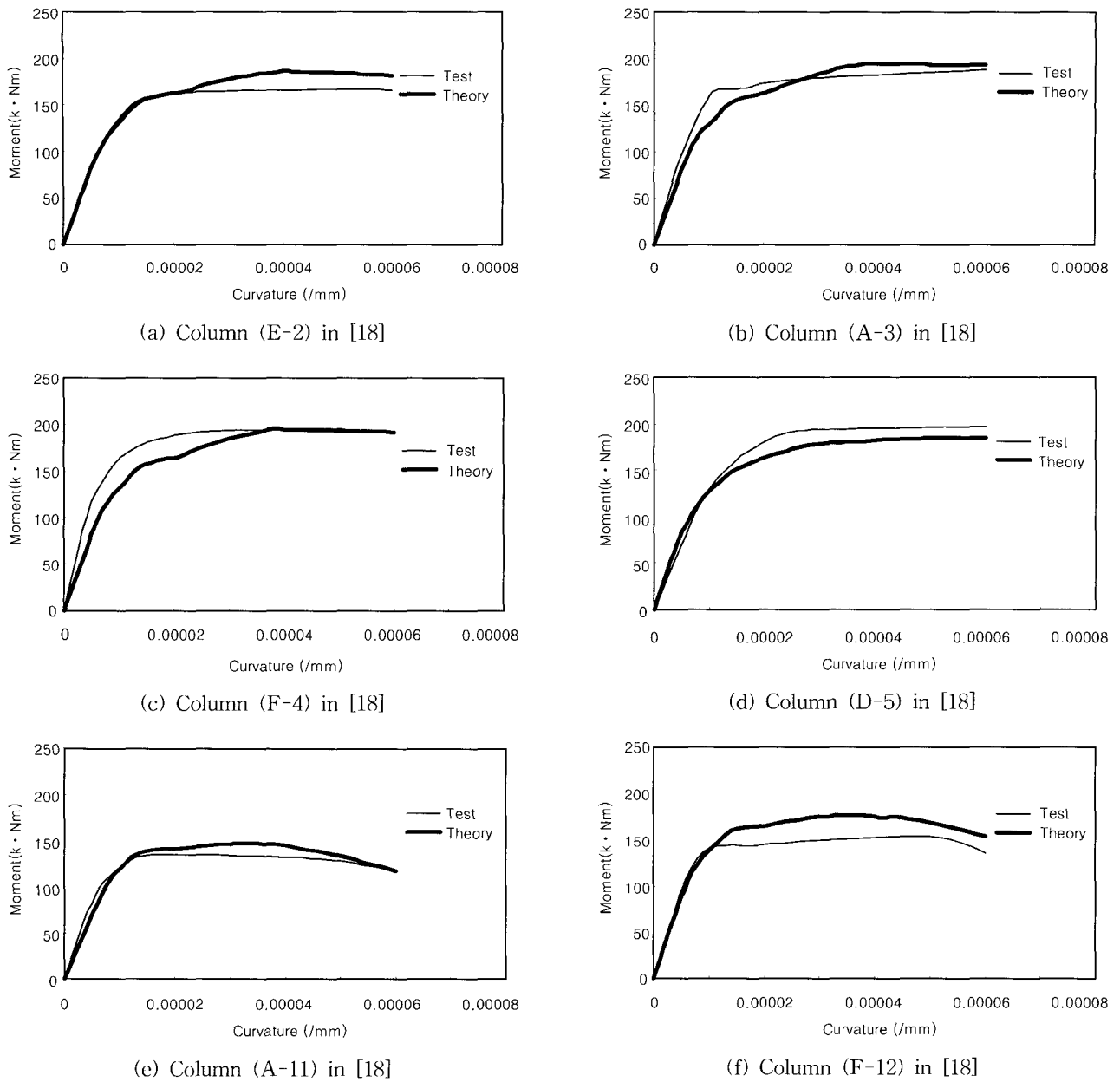


Fig. 5 Comparisons between model predictions and test results on moment-curvature relation.

Table 1 Detail of tested specimens

Specimen	Concrete strength (MPa)	Longitudinal bar		Transverse steel		$f_{yh}$ (MPa)	$P/f_{ck}A_g$	$M_{max}$	$M_{max}/M_{ACI}$	$f_s$ (MPa)
		Number and size	$\rho$ (%)	Size and spacing	$\rho_t$ (%)					
E-2	31.40	8-D19	2.44	D13@114	1.69	483	0.61	262.5	1.075	395
A-3	31.81	8-D19	2.44	D10@108	1.68	490	0.61	306.7	1.231	489
F-4	32.22	8-D19	2.44	D10@95	1.68	490	0.60	307.6	1.218	489
D-5	31.26	12-D16	2.58	D10@114	1.68	490	0.46	317.2	1.260	489
A-11	27.95	8-D19	2.44	D6@108	0.77	469	0.74	198.4	0.970	425
F-12	33.47	8-D19	2.44	D6@88	0.82	462	0.60	180.7	0.975	147

띠철근 체적비( $\rho_{sh}$ )는 띠철근 간격과 기둥폭의 곱에 대한 띠철근 단면적의 비를 나타낸다. Fig. 8은 띠철근 간격을 20 mm로 고정 한 후에 띠철근 직경을 13 mm에서 18 mm로 변화시킴으로써  $\rho_{sh}$ 가 각각 0.495, 1.15, 2.3% 변화되는 경우의 기둥 모멘트-곡률 관계의 변화를 나타내고 있다.

띠철근 체적비가 증가할수록 띠철근 간격이 감소할 경우와 유사한 경향이 나타남을 알 수 있다. 즉, 띠철근 체적비가 증가할수록 강도 및 연성이 증가하였으며 띠철근 체적비가 감소함으로 인한 취성의 증가는 기둥단면에  $P=0.6P_0$ 와 같은 큰 축력이 작용할 경우에 더욱 큰 영향을 미침을 알 수 있다.

#### 4.4 콘크리트 압축강도

콘크리트 압축강도가 증가할수록 일축 또는 이축 최대 모멘트는 축하중 크기와는 무관하게 거의 비례적으로 증가하였으나 연성은 축하중이 큰 경우 압축강도가 증가함에 따라 감소함을 나타내었다(Fig. 9).

#### 4.5 주철근 배열

Fig. 10은 전체 주철근 단면적을  $61 \text{ cm}^2$ 으로 고정하고 단면에 주철근 개수를 8, 12, 16개로 다르게 배열한 경우의 모멘트-곡률관계를 나타내고 있다. 실험결과에 의하면 주철근 수가 증가할수록 구속력이 증가하여 연성이 어느 정도 증가함이 고찰되었으나<sup>8,19)</sup> 본 연구에서는 최대모멘트와 연성에 큰 영향을 끼치지 않는 것으로 고찰되었다. 이는 본 연구에 사용된 구속된 콘크리트의 응력-변형률 모델이 실험치 부족으로 이에 대한 반응을 충분히 하지 못한 것에 기인한다고 사료된다.

#### 4.6 횡방향 철근 강도

횡방향 철근의 강도가 300, 400, 500 MPa로 변하는 경

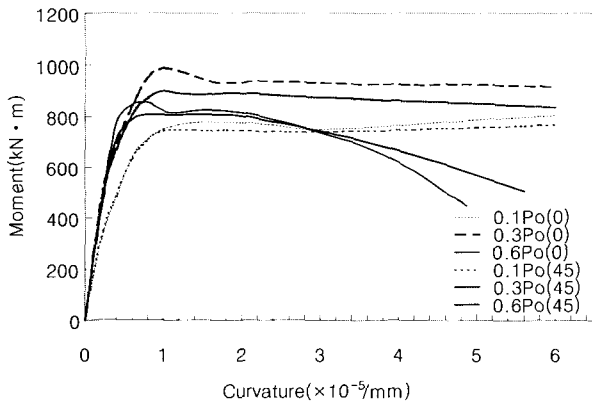
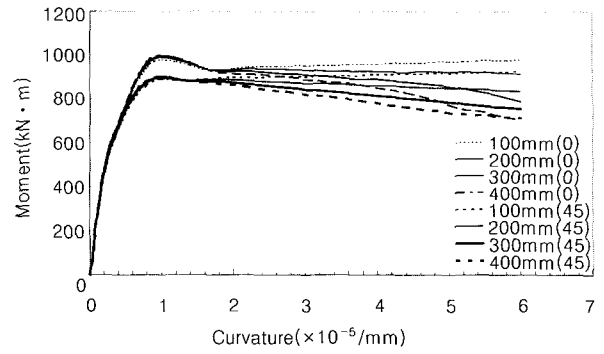
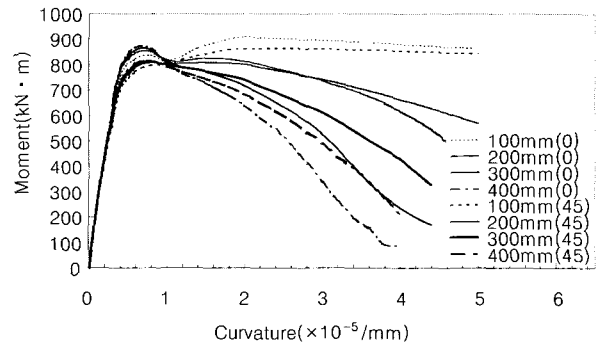


Fig. 6 Effect of level of axial load on moment-curvature relations

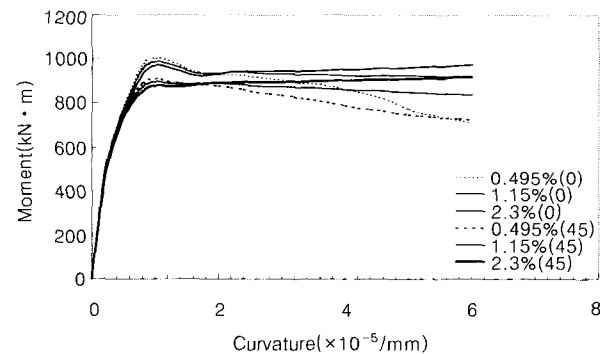


(a) Moment-curvature relations ( $P=0.3P_0$ )

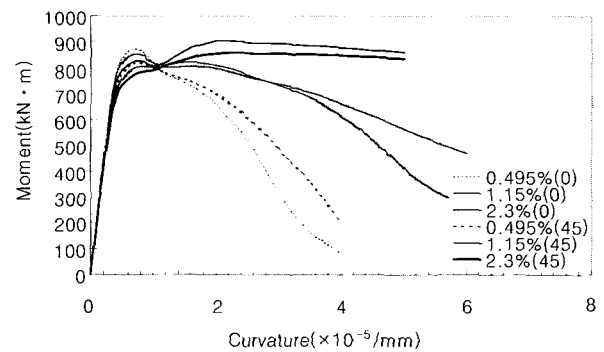


(b) Moment-curvature relations ( $P=0.6P_0$ )

Fig. 7 Effect of tie spacing on moment-curvature relation



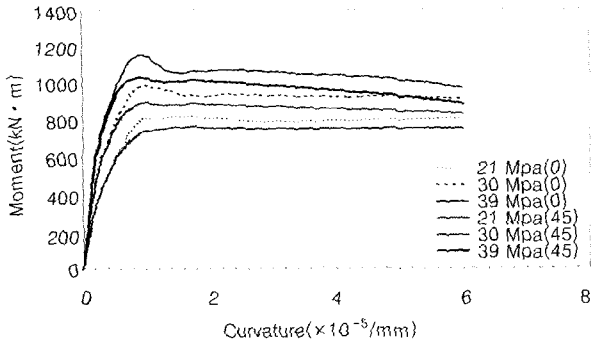
(a) Moment-curvature relations ( $P=0.3P_0$ )



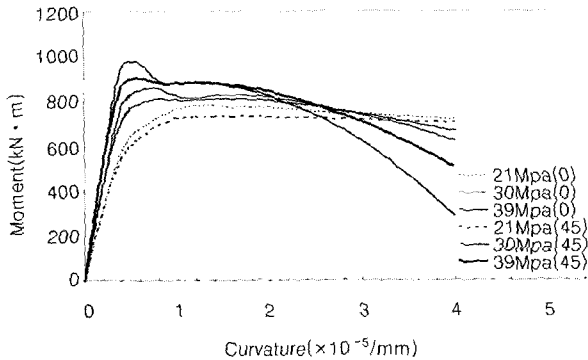
(b) Moment-curvature relations ( $P=0.6P_0$ )

Fig. 8 Effect of volumetric ratio of lateral steel on moment curvature relations



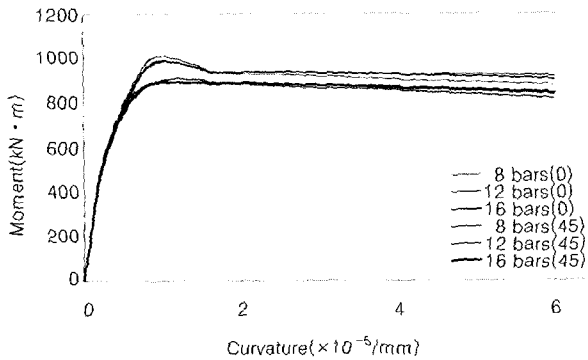


(a) Moment-curvature relations ( $P=0.3P_0$ )

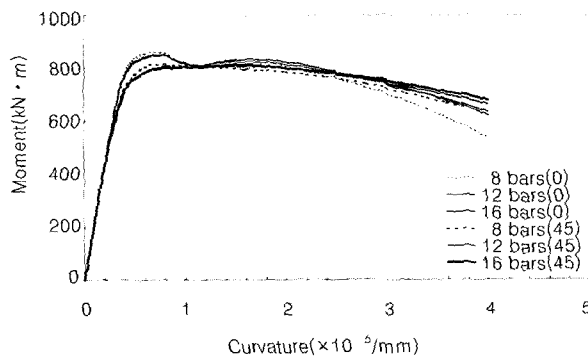


(b) Moment-curvature relations ( $P=0.6P_0$ )

Fig. 9 Effect of concrete strength on moment-curvature relations



(a) Moment-curvature relations ( $P=0.3P_0$ )



(b) Moment-curvature relations ( $P=0.6P_0$ )

Fig. 10 Effect of distribution of longitudinal steels on moment-curvature relations

우, 기둥의 휨-모멘트 곡선은 거의 영향을 받지 않는 것으로 고찰되었다.

#### 4.7 피복두께

축력이 큰 경우에 모멘트가 추가적으로 가하여질 경우에는 최대모멘트에 이르기 전에 압축측 피복 콘크리트가 연화현상을 받거나 탈락하게 된다. 따라서 피복두께가 큰 경우에는 Fig. 11에 나타난 것과 같이 피복두께가 작은 경우보다 최대모멘트 크기가 감소하게 된다. 그러나 연성에는 큰 영향을 미치지 않는 것으로 고찰되었다.

### 5. P-M 상관도에 미치는 변수영향

#### 5.1 극한변형률

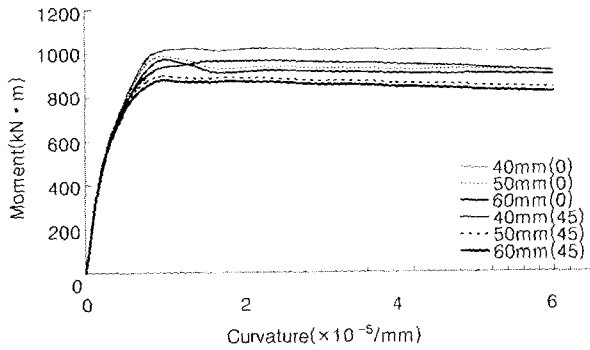
Fig. 12는 극한압축변형률의 크기가 P-M 상관도에 미치는 영향을 검토하기 위하여 본 연구에서 적용한 표준 기둥 단면도이다. 일반적으로 구속된 콘크리트의 경우, 압축변형률이 0.003보다 큰 값에서도 어느정도 저항할 수 있으므로 극한 변형률에 대하여 연구자들간에 이 값에 대한 논란이 있어왔다<sup>20)</sup>. Fig. 13은 극한변형률을 0.003, 0.0035, 0.004, 0.005로 한 경우의 P-M 상관도들과 ACI가 제시한 등가응력블록을 사용한 P-M 상관도를 비교하고 있다. 극한 변형률이 0.003일때의 P-M 상관도가 ACI의 P-M 상관도에 가장 근접하였다. 다른 극한 변형률을 갖는 P-M 상관도는 대부분 최대축하중 부근과 균형하중(balanced load) 부근에서만 약간의 차이가 남을 알 수 있다. 최대축하중에 안전율 0.8을 적용하여 그 값을 감소시킬 경우, 이 차이는 거의 무시할 수 있다고 사료된다. 또한 균형하중 이하의 축하중에서의 차이는 미비하므로 극한변형률에 따른 P-M 상관도의 차이는 거의 무시할 수 있다고 판단된다.

#### 5.2 구속정도

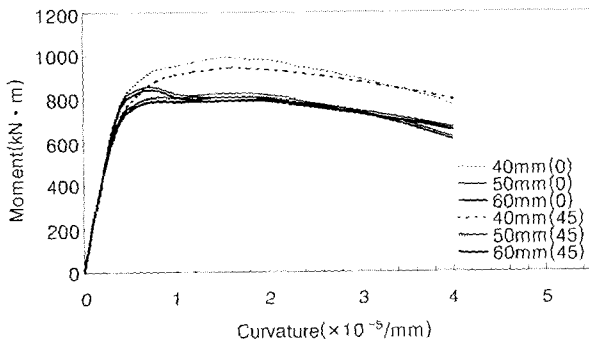
극한 변형률을 0.003으로 고정한 경우 구속정도에 따른 P-M 상관도 변화를 고찰하였다. Fig. 14에 의하면 이축하중방향( $\alpha$ )이  $0^\circ$  일 경우에는 구속정도의 대소에 따른 P-M 상관도나 ACI P-M 상관도가 유사하나  $\alpha$ 가  $45^\circ$ 인 경우에는 ACI P-M 상관도와 비교하여 축하중 및 모멘트 내력이 균형하중보다 큰 축하중 영역에서 약 10% 정도 증가함을 알 수 있다.

본 연구에서는 구속정도가 P-M 상관도에 미치는 영향을 더 자세히 고찰하기 위하여 ACI에서 제시한 내진 설계방식에 따라 Fig. 15와 같은 단면을 설정하였다. 극한 변형률은 0.003으로 고정하였다. Fig. 16(a) 및 16(b)는 이 단면의  $\alpha$ 가  $0^\circ$  및  $45^\circ$  이고 띠철근 간격이  $s=150$  mm,

200 mm인 경우에 대하여 ACI P-M 상관도와와의 비교도를 나타내고 있다. 정량적으로 P-M 상관도에 나타난 구속효과를 나타내기 위하여 모델을 이용한  $\sqrt{P^2+M^2}$  값을 ACI 등가블록을 이용한 값으로 나누어 Fig. 16(c)에 나타내었다. 전반적으로 ACI의 P-M 곡선에 비하여 구속효과를 고려한 경우에  $\sqrt{P^2+M^2}$  값이 약 10% 증가함을 알 수 있다. 특히 최대하중( $M=0$ )은 약 20% 증가함을 알 수 있다.



(a) Moment-curvature relations ( $P=0.3P_0$ )



(b) Moment-curvature relations ( $P=0.6P_0$ )

Fig. 11 Effect of concrete cover thickness on moment-curvature relations

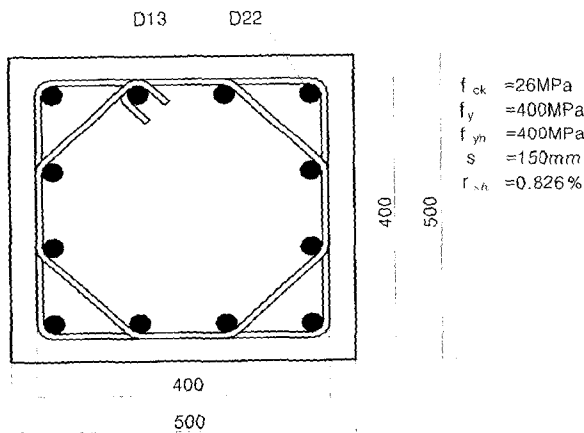


Fig. 12 Standard column section used for investigation on the effect of ultimate strain

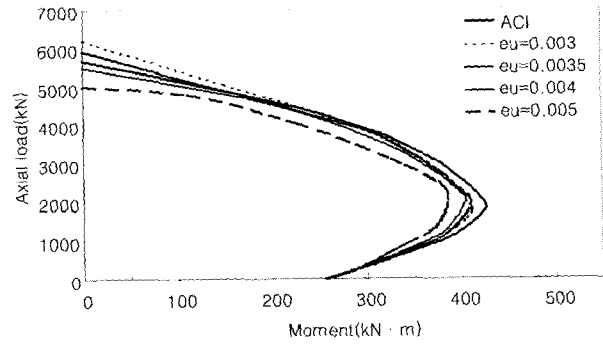
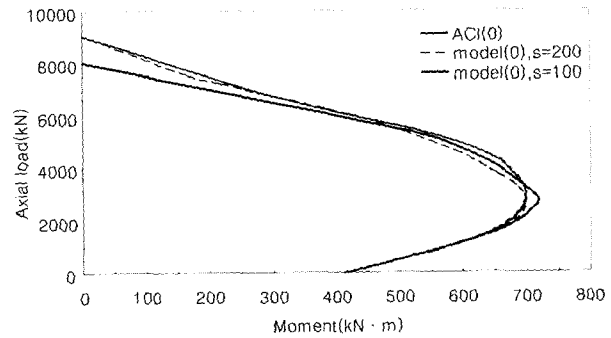
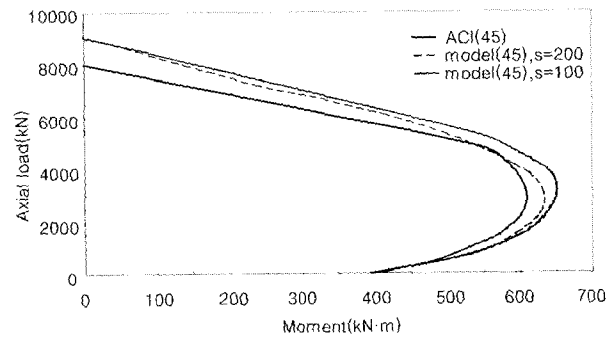


Fig. 13 Effect of magnitude of ultimate strain



(a) Bi-axial load direction equal to  $0^\circ$



(b) Bi-axial load direction equal to  $45^\circ$

Fig. 14 Increase of maximum moment in comparison with the ACI P-M

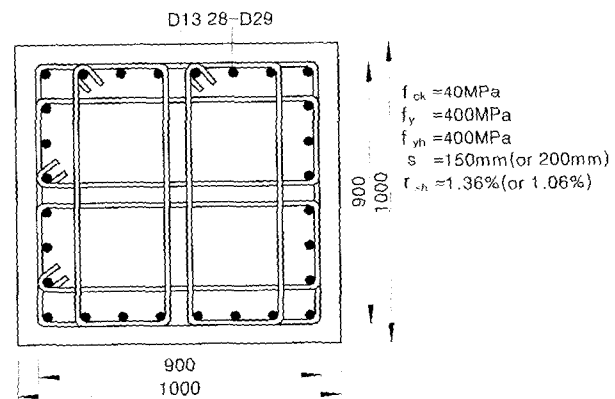
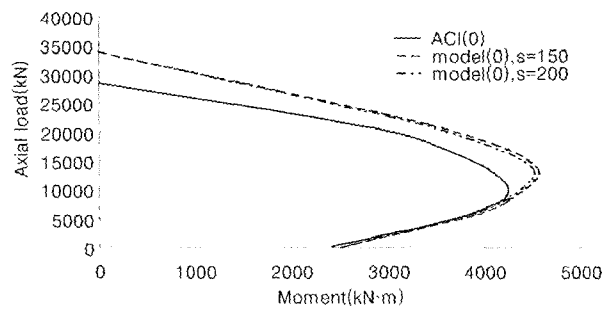
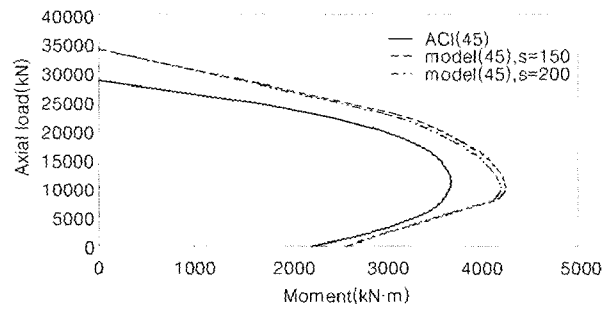


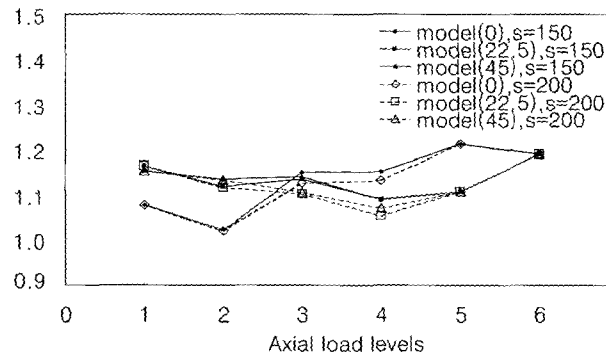
Fig. 15 Column sections for the confinement effect



(a) P-M interaction curve at  $\alpha = 0^\circ$



(b) P-M interaction curve at  $\alpha = 45^\circ$



(c) The relative values for the confinement effect for the section A

Fig. 16 Increase of maximum moment in comparison with the ACI P-M

Note : 1.  $P=0$  2.  $P=P_b$  3.  $P=P_b + \Delta P$   
 4.  $P=P_b + 2 \cdot \Delta P$  5.  $P=P_{max}$  6.  $P=P_u$   
 $\Delta P = (P_{max} - P_b)/3$

## 6. 결 론

본 연구의 결과는 다음과 같다.

- 1) 개발된 모델은 임의 재료로 구성된 임의 기둥단면이 축력과 함께 일축 및 이축 모멘트를 받는 경우 비선형 모멘트-곡률관계를 추적할 수 있다. 개발된 모델은 실험치를 잘 예측하였다.
- 2) 기둥의 전반적인 모멘트-곡률 관계에 대하여 개발된 모델을 이용한 변수영향 고찰로부터 다음과 같은 결론이

도출되었다.

- (1) 축력이 증가할수록 기둥의 연성은 감소하는데 이 경향은 축력이  $P=0.3P_u$  이상이 되면 그 감소량이 더욱 증가한다.
  - (2) 띠철근 간격이 감소하거나 띠철근 체적비가 증가할 경우 기둥의 강도 전 및 강도 후의 거동이 유사하게 개선되는데 특히 축력이 큰 경우에 그 효과는 상대적으로 더 개선된다.
  - (3) 축력이 작은 경우, 콘크리트 강도가 증가하면 전체적인 기둥의 모멘트-곡률 관계가 거의 비례적으로 향상되나 축력이 클 경우에는 연성이 크게 감소하게 된다.
  - (4) 주철근 배열이나 띠철근 강도는 기둥의 모멘트-곡률에 거의 영향을 미치지 않음이 고찰되었다. 그러나 주철근 배열에 관하여는 추후 실험을 통하여 그 영향을 재평가 할 필요가 있다.
  - (5) 피복두께는 최대모멘트 및 이때의 곡률에 영향을 미친다. 피복두께가 클수록 최대모멘트 및 이때의 곡률은 피복두께가 작을 때의 값들보다 감소한다.
- 3) P-M 상관도에 미치는 변수영향 고찰로부터 다음과 같은 결론이 도출되었다.

- (1) 서로 다른 극한 압축변형률(0.003, 0.0035, 0.004, 0.005)를 적용하여 산정된 P-M 상관도는 거의 유사한 형태 및 값을 가지므로 이 영향은 미비하다. 따라서 극한변형률 0.003을 적용한 ACI의 등가 응력블록에 의한 P-M 상관도는 적절하다고 판단된다.
- (2) 비교적 많은 띠철근으로 배근된 기둥의 경우, ACI P-M 상관도에 비하여  $\sqrt{P^2 + M^2}$  값이 전체적으로 10% 정도, 그리고 최대축하중은 약 20% 정도 향상됨이 고찰되었다.

## 감사의 글

본 연구는 한양대학교 초대형 구조시스템 연구센터 STRESS에 의하여 지원되었으며 이에 대하여 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Soliman, M. T. M. and Yu, C. W., "The Flexural Stress-Strain Relationship for Concrete Confined in Rectangular Transverse Reinforcement," *Magazine of Concrete Research* (London), Vol. 19, No. 61, Dec., 1967, pp.223~238.
2. Sheikh, S. A. and Uzumeri, S. M. M., "Analytical Model For Concrete Confined in Tied

- Columns," *ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 108, No. ST12, December, 1982, pp.2703~2722.
3. Park, M. R., Priestley, M. J. N., and Gill, W. D., "Ductility of Square-Confined Concrete Columns," *ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 108, No. ST4, April, 1982.
  4. Fafitis A. and Shah, S. P., "Predictions of Ultimate Behavior of Confined Column Subjected to Large Deformations." *ACI Structural Journal* Vol. 82, No 4, 423-433.
  5. Saatcioglu, M., "Strength and Ductility of Confined Concrete," *ASCE, Journal of the Structural Engineering*, Vol. 118, No.6, June 1992.
  6. Mander, J. B., Priestley, M. J. N., and Park, R. "The Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete," *ASCE, Journal of the Structural Engineering*, Vol 114, No. 8, August, 1988.
  7. Razvi, S. and Saatcioglu, M., "Confinement Model for High-strength Concrete," *ASCE, Journal of structural Engineering*, Vol 125, No. 3, March, 1999.
  8. Sheikh S. A. and S. M. Uzumeri, M. ASCE, "Strength and Ductility of Tied Concrete Column," *ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 106, No. ST5, May, 1980, pp. 1079~1104.
  9. Mohamed, A. H., Abdel-Halim Associate Member, ASCE and Taher M. Abu-Lebdeh, "Analytical Study for Concrete Confined in Tied Columns," *ASCE, Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, No. 11, November 1989.
  10. Moehle, J. P., A. M., "ASCE and Terry Cavanagh, Confinement Effectiveness of Cross Ties in RC," *ASCE, Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, No. 10, October, 1985.
  11. 주진욱, 정현수, "중심 압축력을 받는 고강도 철근 콘크리트 기둥의 내력 및 연성에 관한 실험적 연구," 중앙대학교 대학원 건축공학과, 1998.
  12. 이영인, 정현수, "띠철근 배근 형상에 따른 고강도 철근콘크리트 기둥의 내력과 연성에 관한 실험적 연구," 중앙대학교 대학원 건축공학과, 1998.
  13. 정봉호, 김덕재, 정현수, "중심축하중을 받는 철근콘크리트 기둥의 띠철근 구속효과에 관한 연구," 중앙대학교 대학원 건축공학과, 1999.
  14. Mander, J. B., Priestley, M. J. N., and Park, R., Observed Stress-Strain Behavior of Confined Concrete, *ASCE, Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, No. 8, August, 1988.
  15. Cusson, D. and Paultre, P., "High-Strength Concrete Columns Confined by Rectangular Ties," *ASCE, Journal of Structural Engineering*, Vol. 120, No. 3, March, 1994.
  16. El-Metwally, S. E. and Chen, W. F., "Load-Deformation Relations for Reinforced Concrete Sections", *ACI Structural Journal* Vol .86, No. 2, Mar.-Apr. 1989.
  17. Yen, J. Y. R., "Direct Analysis of Slender Columns with P-Delta Effects," *ASCE, Journal of Structural Engineering*, Vol. 119, No. 3, March, 1993.
  18. Lee, C. D., Choi, K. B., and Cha, J. S., "Constitutive Modeling of Confined Concrete under Concentric Loading," *KCI Concrete Journal*, Vol. 13, No. 1 January 2001.
  19. Sheikh, S. A. and Yeh, C. C., "Tied Concrete Columns Under Axial Load and Flexure," *ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 116, No. 10, October, 1990.
  20. Kent, D. C. and Park, R., "Flexural Member with Confined Concrete," *ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 97, No. ST7, July, 1971.
  21. Johnson, L. W. and Riess, R. D., "Numerical Analysis."

## 요 약

철근콘크리트 기둥의 비선형 이축모멘트-곡률 관계를 추적할 수 있는 이론모델을 개발하였다. 개발된 모델은 피복콘크리트 박리나 또는 최대하중 후 나타날 수 있는 기둥의 모멘트 저항능력의 취성적인 감소도 묘사할 수 있다. 개발된 모델을 이축 기둥의 구성재료 특성과 철근의 기하학적 배치가 PM 상관도와 모멘트-곡률에 미치는 영향에 대하여 변수영향을 고찰하여 철근콘크리트 기둥의 연성은 축하중의 크기, 횡방향 철근의 간격 또는 체적에 가장 큰 영향을 받음이 이론적으로 고찰된 ACI PM-상관도와 비교하여 ACI 내진설계 기준에 따라 횡방향 철근이 배근된 기둥의 경우, 축하중과 모멘트에 대한 (square root of sum of squares)값이 약 10% 증가하였으며 최대 축하중은 약 20% 정도 증가하였다.

핵심내용 : 모델링, 이축, 기둥, 구속, 변수고찰