

주기적 물림강성 변화와 백래쉬에 의한 기어구동계의 비선형 동특성

Nonlinear Dynamic Characteristics of Gear Driving Systems with Periodic Meshing Stiffness Variation and Backlash

조 운 수* · 최 연 선†

Yun-Su Cho and Yeon-Sun Choi

(2002년 5월 5일 접수 : 2002년 11월 15일 심사완료)

Key Words : Gear(기어), Transmission Error(전달오차), Backlash(백래쉬), Chaotic Motion(혼돈운동) Harmonic Balance Method(조화균형법)

ABSTRACT

Main sources of the vibration of a gear-pair system are backlash and transmission error, the difference between required and actual rotation during gear meshing. This paper presents the nonlinear dynamic characteristics of gear motions due to the existence of backlash and periodic variation of meshing stiffness, which is assumed as a one-term harmonic component. Gear motions are classified as three types with the consideration of backlash. Each response is calculated using the harmonic balance method and confirmed by numerical integration. The responses with the increase of the rotating speed show abrupt changes in its magnitude for the variation of the preload, exciting force, and damping coefficient. The result also shows that there is a chaotic motion with some specific design parameters and operating conditions in gear driving system. Consequently the design of gear driving system with low vibration and noise requires the study on the effects of nonlinear dynamic characteristics due to stiffness variation and backlash.

1. 서 론

기어는 높은 동력 전달효율과 다양한 속도비를 갖는 기계요소로서 모터와 같은 동력 발생원으로 부터 감속을 통해 높은 구동력을 얻는데 사용되고 있다. 기어구동부에서 발생하는 진동과 소음은 주로 기어 물림과정에서 발생하는 것으로서 축과 베어링을 통해 케이스 등 기어구동계 전체로 전달된다. 특히, 기어구동계는 백래쉬(backlash)와 기어가 맞물림(gear

meshing) 과정에서 발생하는 강성 변화 때문에 복잡한 진동이 발생한다.

Tavakoli⁽¹⁾는 전달오차(transmission error)가 진동과 소음을 유발시키는 중요한 요인임을 밝히고, 전달오차를 최소화하는 노력이 필요함을 지적하였다. Kahraman⁽²⁾은 평치차에서 기어의 백래쉬를 편적선형(piecewise-linear) 모델로 나타내고, 이를 이용하여 기어의 비선형 응답을 연구하였다. Theodossiades⁽³⁾는 강성변화와 백래쉬를 동시에 고려하여 다중시간법(multiple time scale method)을 이용하여 기어의 비선형 응답을 계산한 바 있다. 또한 주상훈⁽⁶⁾은 기어 쌍에 대해 치형을 수정하고, 치합전달오차를 모델링한 바 있다.

기어구동계는 설계변수 변화에 따라 다양한 비선형 응답이 발생하며, 경우에 따라서 혼돈운동이 발생하여

† 책임저자, 정회원, 성균관대학교 기계공학부

E-mail : yschoi@yurim.skku.ac.kr

Tel : (031) 290-7440, Fax : (031) 290-5849

* 정회원, 성균관대학교 대학원 기계설계학과

기어구동계로서의 기능을 상실할 수도 있다. 이에 본 연구에서는 강성 변화와 백래쉬를 동시에 고려한 기어구동계 모델에서 예하중, 동하중, 감쇠값 등 설계변수 변화에 따른 기어구동계의 응답 변화를 살펴봄으로서 저진동, 저소음을 구현할 수 있는 기어 설계조건을 찾아보고자 하였다.

2. 기어구동계 해석모델

기어구동계는 Fig. 1과 같이 모델링할 수 있다. 기어가 강성 베어링에 의해 지지되어 있다고 가정하면, 기어축의 상하, 좌우 병진운동은 무시할 수 있고, 단지 기어축의 비틀림진동만을 고려하면 된다. 각 기어구동축의 회전각 φ 는 기어구동축의 회전각 ωt 와 물리는 기어의 강성에 의한 회전운동 θ 의 합이다.

$$\varphi(t) = \omega t + \theta(t) \quad (1)$$

여기서 ω 는 기어 혹은 피니언의 회전속도이다. 기어의 강성 변화는 물리는 기어의 수와 위치에 따른 기어의 각변위량에 의해 결정된다. 기어 구동계는 기어의 강성 변화에 의해 구동기어와 피동기어 사이의 회전각 오차, 즉 전달오차 $e(t)$ 를 갖는다. 기어의 물림강성 변화는 푸리에 급수(Fourier series) 형태로 표현하면 식 (2)와 같이 표현된다.

$$k(t) = k_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [p_s \cos(s\omega_M t) + q_s \sin(s\omega_M t)] \quad (2)$$

여기서 기본주파수 ω_M 은 기어물림주파수로서 다음과 같이 표현된다.

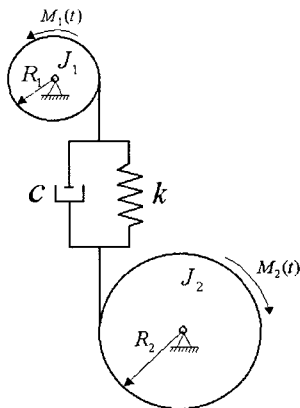


Fig. 1 Gear driving system

$$\omega_M = n_1 \omega_1 = n_2 \omega_2 \quad (3)$$

여기서 n_1 과 n_2 는 각각 기어와 피니언의 이의 갯수를 나타낸다. 전달오차를 고려한 실제 비틀림 변위량 $x(t)$ 에 대한 운동방정식은 두개의 비틀림항 $\varphi_1(t)$ 과 $\varphi_2(t)$ 를 포함한다.

$$x(t) = R_1 \varphi_1(t) - R_2 \varphi_2(t) - e(t) \quad (4)$$

여기서 R_1 과 R_2 는 구동기어와 피동기어의 기초원 반지름이다. Fig. 1의 모델로부터 운동방정식을 유도하면 식 (5)와 같다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(t)h(x) = f_T(t) + f_M(t) \quad (5)$$

여기서

$$f_T(t) = \frac{R_1 J_2 M_1(t) - R_2 J_1 M_2(t)}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2}$$

$$m = \frac{J_1 J_2}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2}, \quad f_M(t) = -m\ddot{e}(t) \quad (6)$$

이고 J_1 과 J_2 는 각각 기어와 피니언의 질량관성모멘트이다. $f_T(t)$ 는 기어구동계에 주어지는 외부 가진 비틀림하중 $M_1(t)$ 과 $M_2(t)$ 에 의해 발생하는 예하중에 해당되고, $f_M(t)$ 은 기어의 전달오차에 의한 동하중이다. $h(x)$ 는 기어의 백래쉬 영향을 고려한 항으로 식 (7)에 표현된 편적선형모델(piecewise-linear model)로 표현할 수 있다. $2b$ 는 전체 백래쉬(backlash)를 나타낸다.

$$h(x) = \begin{cases} x-b, & x \geq b \\ 0, & |x| < b \\ x+b, & x \leq -b \end{cases} \quad (7)$$

설계변수변화에 따른 응답의 변화를 보기 위해서 식 (8)의 무차원 변수들을 사용하면

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk_0}}, \quad \Omega_M = \frac{\omega_M}{\omega_0}$$

$$\dot{t} = \omega_0 t, \quad w(\dot{t}) = \frac{k(t)}{k_0}, \quad u(\dot{t}) = \frac{x(t)}{b} \quad (8)$$

운동방정식 (5)는 식 (9)와 같이 무차원 운동방정식

이 된다.

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + w(t)g(u) = f(t) \quad (9)$$

위식에서, t 는 \hat{t} 를 의미한다. 강성변화는 기본주기 $T_M = 2\pi/\Omega_M$ 를 갖는 주기함수이다. 백래쉬에 기인한 $g(u)$ 는 무차원화 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(u) = \begin{cases} u-1, & u \geq 1 \\ 0, & |u| < 1 \\ u+1, & u \leq -1 \end{cases} \quad (10)$$

$f(t)$ 항은 외부 가진항, $f_M(t)$ 와 내부 가진항, $f_T(t)$ 를 포함하는 무차원 가진항이다.

3. 주기응답

운동방정식 (9)는 정상상태 주기해를 갖는다. 그러나, 해석적으로 정상상태의 주기해를 구하는 과정은 쉽지않다. 첫째는 백래쉬의 존재이고 두 번째는 물림강성 변화이다. 본 연구에서는 물림강성의 급수형태 중, 첫번째 항만을 고려하여 그 응답을 계산하였다. 여기서 시스템의 응답을 해석적으로 구하기 위하여 응답의 형태를 Fig. 2와 같이 3가지 형태로 구분하고, 조화균형법(harmonic balance method)^(4,5)을 이용하여 계산하였다.

3.1 I형 주기운동

시스템변수의 적절한 조합과 초기조건의 적절한 선택으로 기어구동계의 진동이 항상 $u \geq 1$ 의 범위에 있는 경우이다. 즉 항상 구동기어와 피니언이 접촉하는 형태로서 I형 주기운동으로 분류한다. 여기서 물림과

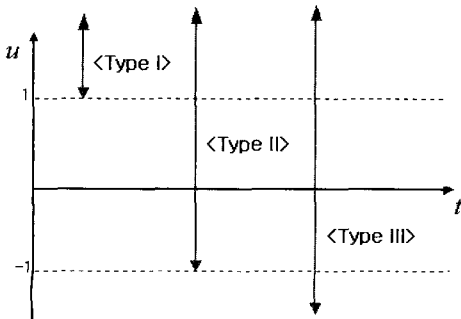


Fig. 2 Type of the motion

정의 구동기어와 피동기어가 백래쉬로 인하여 분리되는 순간은 없으므로 연속적인 형태의 응답을 갖는다. 이때 운동은 식 (11)과 같이 구해진다.

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + (1 + k_1 \cos \Omega t)(u-1) = f_0 + f_1 \cos \Omega t \quad (11)$$

2차 조화항까지 고려하면 조화균형법을 이용하여 운동방정식의 해는 식 (12)와 같다.

$$u(t) = c_0 + c_1 \sin \Omega t + c_2 \cos \Omega t + c_3 \sin 2\Omega t + c_4 \cos 2\Omega t \quad (12)$$

여기서 c_0, c_1, \dots, c_4 의 정확한 계산 결과는 부록에 나타내었다.

3.2 II형 주기운동

정상상태 응답이 Fig. 3에 보는 바와 같이 1보다 더 큰 최대값을 가지며 1보다 작고 -1보다 큰 최소값을 갖는다고 가정할 때, II형 운동으로 분류할 수 있고, 이 경우 물림과정에서 충격이 있을 수 있다. 이때의 응답은 조화균형법을 이용하면 식 (13), (14)와 같이 구할 수 있다.

$$u_1(t_1) = c_0 + c_1 \sin \Omega t_1 + c_2 \cos \Omega t_1 + c_3 \sin 2\Omega t_1 + c_4 \cos 2\Omega t_1 \quad (13)$$

$$u_2(t_2) = Ae^{-2\zeta t_2} + B + \frac{f_0}{2\zeta} t_2 + \frac{f_1}{\Omega^2 \sqrt{\Omega^2 + 4\zeta^2}} \cos(\Omega t_2 + \phi) \quad (14)$$

3.3 III형 주기운동

식 (11)의 주기운동이 최대 변위가 1보다 크고 최

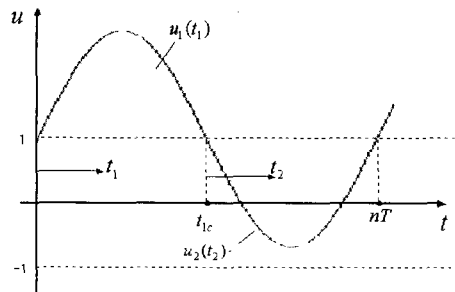


Fig. 3 Periodic steady-state motion (type II)

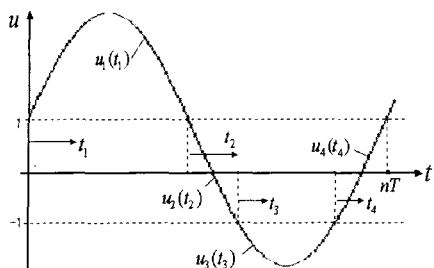


Fig. 4 Periodic steady state motion (type III)

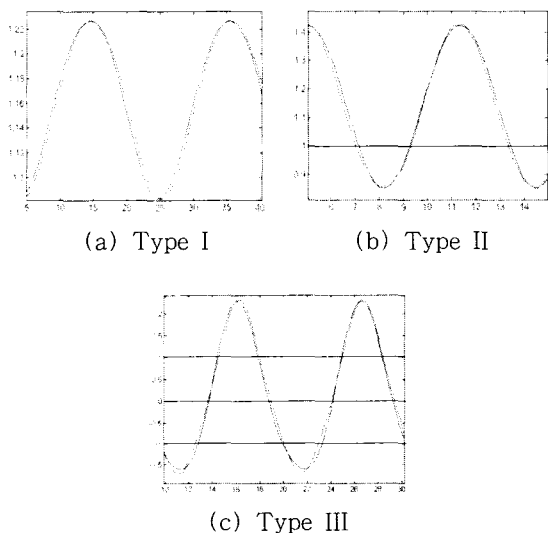


Fig. 5 Vibration types of gear driving systems

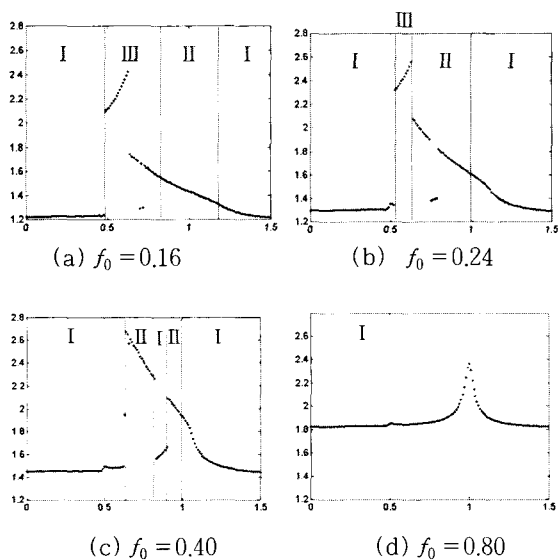


Fig. 6 Effects of preload. f_0 ($\zeta=0.048$, $f_1=0.075$)

소 변위가 -1보다 작은 값일 때, 기어 운동은 양면에서 충격이 이루어지게 된다. 즉, Fig. 4와 같은 III형 운동으로 분류할 수 있다. 이때의 운동을 조화권형법을 이용하여 구하면 식 (15)~(17)과 같다.

$$u_1(t_1) = c_0 + c_1 \sin \Omega t_1 + c_2 \cos \Omega t_1 + c_3 \sin 2\Omega t_1 + c_4 \cos 2\Omega t_1 \quad (15)$$

$$u_2(t_2) = Ae^{-2\zeta t_2} + B + \frac{f_0}{2\zeta} t_2 + \frac{f_1}{\Omega^2 \sqrt{\Omega^2 + 4\zeta^2}} \cos(\Omega t_2 + \varphi) \quad (16)$$

$$u_3(t_3) = c_5 + c_6 \sin \Omega t_3 + c_7 \cos \Omega t_3 + c_8 \sin 2\Omega t_3 + c_9 \cos 2\Omega t_3 \quad (17)$$

여기서, 식 (13)~(17)의 계수들은 부록에 나타낸 바와 같다. 앞에서 해석적으로 구한 해와 Runge-Kutta법을 이용하여 계산한 수치해를 Fig. 5에서 비교하였다. 해석해와 수치해가 잘 일치함을 확인할 수 있다. 수치해는 기어의 운동방정식 (9)를 직접 수치적분함으로써 얻어진 응답이다.

4. 기어구동계의 응답특성

Fig. 6은 $\zeta=0.048$, $f_1=0.075$ 의 값을 갖고 예하중(preload)인 f_0 값이 변할 때 나타나는 시스템의 응답 곡선이다. f_0 가 작을 때 시스템의 응답은 I형, II형, III형의 운동을 모두 나타내지만 f_0 값이 증가하면서 그 운동의 형태가 I형의 운동으로 변한다는 사실을 확인할 수 있다. 즉, 예하중이 작을 때는 기어에 충격이 발생하나 예하중이 커질수록 기어와 피니언이 완전 접촉상태에서 구동됨을 알 수 있다. 또한 예하중이 작을수록 접촉, 분리에 의한 비선형성이 개입함으로써 구동속도가 증가함에 따라 급격한 응답변화가 있는 도약현상(jump phenomenon)이 발생함을 알 수 있다.

Fig. 7은 동하중 f_1 의 변화에 따른 시스템의 응답 특성을 나타낸다. 동하중의 경우는 그 값이 작을수록 I형의 운동이 강하게 나타나며, f_1 값이 커지면서 점점 II형과 III형의 운동이 나타남을 알 수 있다. 이로써 기어에 걸리는 동하중이 클수록 기어의 충격성분이 강하게 나타남을 확인할 수 있다.

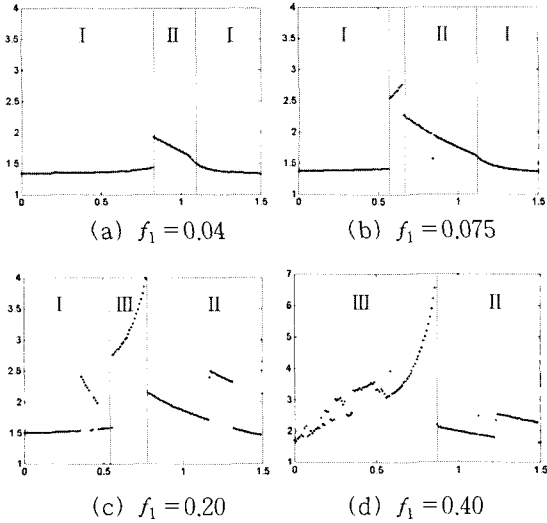


Fig. 7 Effects of exciting force, f_1
($\zeta=0.048$, $f_0=0.3$)

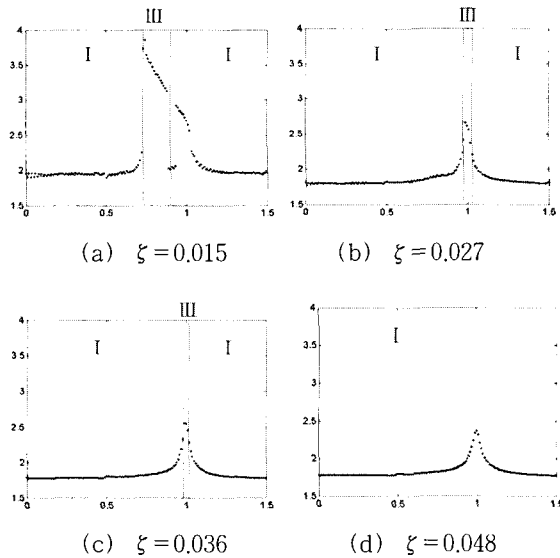


Fig. 8 Effects of damping coefficient, ζ
($f_0=0.75$, $f_1=0.075$)

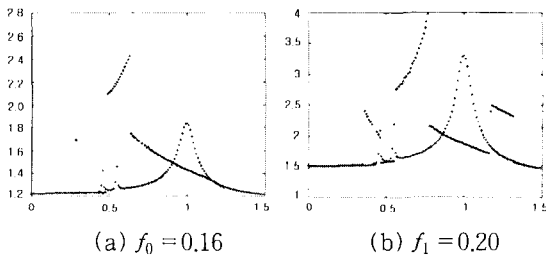
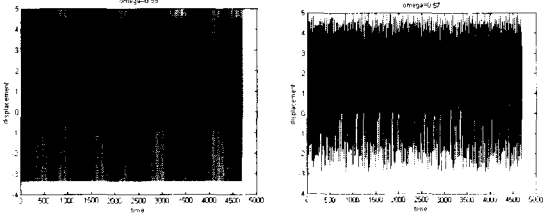


Fig. 9 Comparison between analytical and numerical solutions

Fig. 8은 감쇠계수 ζ 가 시스템의 응답에 미치는 영향을 보여준다. 시스템의 감쇠값이 커지면 응답의 진폭은 점점 작아진다는 사실을 확인할 수 있다. 또한 감쇠계수가 작을 때 II형과 III형의 운동이 나타났던 것이 감쇠계수가 커지면서 시스템은 I형의 운동만을 나타낸다는 사실도 확인할 수 있다. 즉 기어구동계에서 사용되는 그리스 등 윤활유의 성질에 따라 진동특성이 달라짐을 확인할 수 있으며, 점도가 높은 윤활유를 쓸수록 기어와 피니언은 완전접촉이 될 수 있음을 알 수 있다.

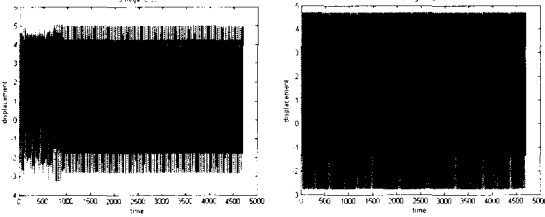
조화균형법을 이용하여 구한 I형의 해, 식 (12)와 동일한 변수를 이용하여 계산한 Fig. 6(a)와 Fig. 7(c)의 수치해석결과를 Fig. 9에 비교하여 도시하였다. 수치해석해는 근본적으로 안정해(stable solution)로서 물리적으로 존재하는 해이다. 수치해석 결과에서 회전속도 증가에 따라 급격한 불연속응답은 진폭의 크기가 연속적인 안정해가 더 이상 존재하지 못하고, 다른 형태의 안정해, 즉, 물리적으로 새로운 해가 나타남을 의미한다. 따라서 조화균형법으로 계산한 해가 비록 연속적인 해이나 수치해석 결과와 일치하는 경우는 안정해가 되고 수치해석 결과와 무관한 해는 평형해(equilibrium solution)는 되나 불안정해(unstable solution)가 되는 것이다. 이는 조화균형법의 실제 존재 가능성, 즉, 안정성 여부를 의심케 하는 것으로서 조화균형법에 의한 해는 일부 영역에서만 의미가 있을 뿐, 여타 영역에서는 무의미한 결과가 됨을 알 수 있다. 즉 조화균형법으로 계산된 해는 영역에 따라 불안정해(unstable solution)가 됨을 보여주는 것이다. 이러한 불안정해는 또 다른 안정해로 가면서 $\Omega=0.5$ 부근에서 도약현상(jump phenomenon)이 나타남을 볼 수 있다.

Fig. 10은 $f_0=0.75$, $f_1=0.075$, $\zeta=0.024$ 인 기어구동계에서 가진주파수 Ω 가 변할 때의 시간응답이고, Fig. 11은 그때의 위상선도(phase diagram)를 나타낸다. 이 결과를 통하여 $\Omega=0.57$ 부근에서 혼돈운동(chaotic motion)이 나타날 수 있음을 알 수 있으며, Fig. 12의 분기선도(bifurcation map)를 통해서도 $\Omega=0.57$ 부근에서 혼돈응답이 발생한다는 것을 확인할 수 있다. 이를 확인하고자 Fig. 13과 같이 포앵카레도표(Poincare map)을 그렸을 때 $\Omega=0.57$ 에서 혼돈운동에 의한 이상끌개(strange attractor)가 나타남을 알 수 있다. 즉, 기어구동계에서는 설계변수 및 특정



(a) $\Omega = 0.55$

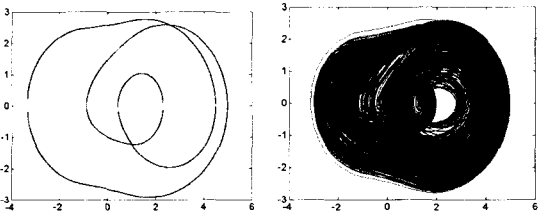
(b) $\Omega = 0.57$



(c) $\Omega = 0.59$

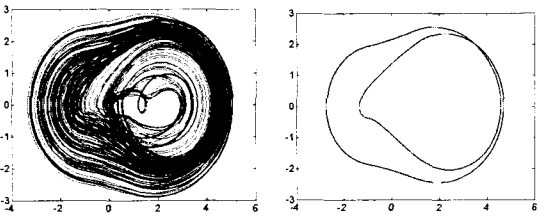
(d) $\Omega = 0.61$

Fig. 10 Time responses



(a) $\Omega = 0.55$

(b) $\Omega = 0.57$



(c) $\Omega = 0.59$

(d) $\Omega = 0.61$

Fig. 11 Phase diagrams

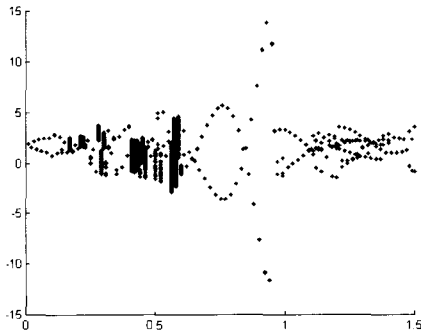
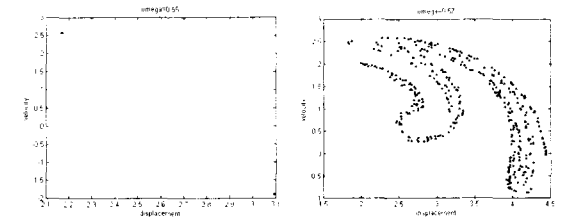


Fig. 12 Bifurcation map

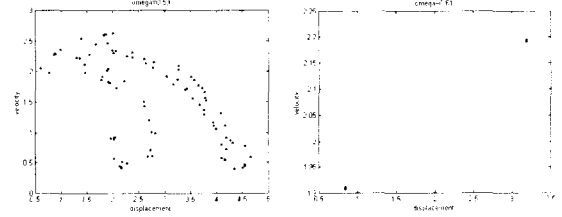
회전속도에 따라 복잡한 진동이 발생할 수 있으며 혼돈운동 까지도 발생할 수 있음을 확인하였다.

이상의 각각의 수치해석 결과로부터 Fig. 14와 같은 종합적인 선도를 그릴 수 있다. 즉, 감쇠계수와 예하중 및 동하중 변화에 따라 특정 운전속도에서 발생하는 응답형태를 알 수 있다. 또한 기어구동계 설계시 이러한 도표를 이용할 수 있다면 원하는 형태의 운동을 만들기 위해서는 어떠한 설계변수와 운전조건이 주어져야 하는가를 찾아낼 수 있을 것이다.



(a) $\Omega = 0.55$

(b) $\Omega = 0.57$



(c) $\Omega = 0.59$

(d) $\Omega = 0.61$

Fig. 13 Poincaré maps

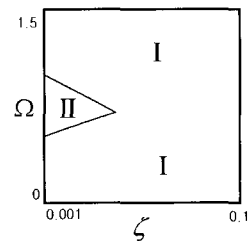
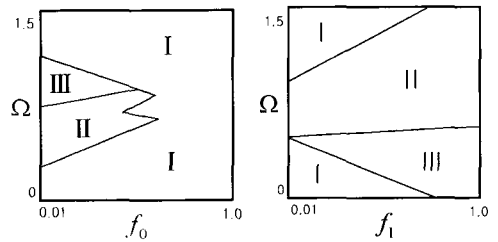


Fig. 14 Effects of the system parameters

5. 결 론

기어구동계를 백래쉬와 강성변화를 고려하여 모델링하고, 이때의 응답특성을 살펴보았다. 먼저 백래쉬에 의한 응답형태를 3가지로 분류하고 물림강성변화에서 1차 조화항만을 고려하여 조화균형법을 이용하여 해를 계산하고, 이를 수치적분 결과와 비교함으로써 3가지 응답형태의 존재의 타당성을 입증하였고, 또한 조화균형법의 해중 일부만이 안정해가 됨을 알았다. 또한, 예하중, 동하중, 감쇠계수 변화에 따른 기어구동계의 응답을 계산한 결과, 예하중과 감쇠계수가 클수록, 동하중이 작을수록 I형 응답이 발생하며, 반대인 경우 비선형 효과가 커짐에 따라 II, III형 응답과 더불어 도약현상, 경우에 따라서는 혼돈응답이 발생할 수 있음을 알았다. 이러한 결과는 각 파라미터 변화에 따른 응답형을 보여주는 도표로 요약되었다. 결국 저진동, 저소음 기어구동계를 설계하기 위해서는 적절한 하중조건과 설계변수가 선택되어야 하고, 또한 백래쉬와 물림강성 변화에 기인한 비선형 응답에 대한 충분한 고려가 있어야 함을 보여주는 것이기도 하다.

후 기

본 연구는 과학기술처가 지원하는 특정연구개발 사업(기계설비요소기술개발)으로 지원되어 수행하였습니다.

참 고 문 헌

- (1) Tavakoli, M. S. and Houser, D. R., 1986, "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears," ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol. 108, pp. 86~94.
- (2) Kahraman, A. and Singh, R., 1990, "Non-linear Dynamics of a Spur Gear Pair," Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, No. 1, pp. 49~75.
- (3) Theodossiades, S. and Natsiavas, S., 2000, "Non-linear Dynamics of Gear-Pair Systems with

Periodic Stiffness and Backlash," Journal of Sound and Vibration, Vol. 229, No. 2, pp. 287~310.

- (4) Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., 1995, Applied Nonlinear Dynamics, John Wiley & Sons, Inc.
- (5) Peter Hagedorn, 1982, Non-linear Oscillations, Oxford.
- (6) 주상훈, 노오현, 정동현, 배명호, 박노길, 1998, "치형수정된 기어쌍의 치합전달오차 모델링," 한국소음진동공학회논문집, 제 8 권, 제 5 호, pp. 841~848.

부 록

조화균형법에 의한 엄밀해

• $u \geq 1$ 일 때

$$c_1 = -2k_1 \frac{C}{D}(k_1 + f_1) + \frac{E}{F}(k_0 + f_0)$$

$$c_2 = 8k_0 \zeta \Omega \frac{G}{H}(k_1 + f_1) - 8k_1 \zeta \Omega \frac{I}{J}(k_0 + f_0)$$

$$c_3 = 4k_0 \frac{K}{L}(k_1 + f_1) - 4k_1 \frac{M}{N}(k_0 + f_0)$$

$$c_4 = -48\zeta \Omega k_1 k_0 \frac{O}{P}(k_1 + f_1) + 48\zeta \Omega k_1^2 \frac{Q}{R}(k_0 + f_0)$$

• $u \leq -1$ 일 때

$$c_5 = -2k_1 \frac{C}{D}(k_1 - f_1) + \frac{E}{F}(k_0 - f_0)$$

$$c_6 = 8k_0 \zeta \Omega \frac{G}{H}(k_1 - f_1) - 8k_1 \zeta \Omega \frac{I}{J}(k_0 - f_0)$$

$$c_7 = 4k_0 \frac{K}{L}(k_1 - f_1) - 4k_1 \frac{M}{N}(k_0 - f_0)$$

$$c_8 = -48\zeta \Omega k_1 k_0 \frac{O}{P}(k_1 - f_1) + 48\zeta \Omega k_1^2 \frac{Q}{R}(k_0 - f_0)$$

여기서,

$$C = 224k_0 \zeta^2 \Omega^2 - 224\zeta^2 \Omega^4 - 4k_0^3 + 36k_0^2 \Omega^2 + k_1^2 k_0 - 96k_0 \Omega^4 - 4k_1^2 \Omega^2 + 64\Omega^6$$

$$D = -3k_1^4 k_0 + 8k_1^4 \Omega^2 + 448k_1^2 \zeta^2 \Omega^4 - 368k_1^2 k_0 \zeta^2 \Omega^2 - 112k_1^2 k_0^2 \Omega^2 - 128k_1^2 \Omega^6 + 16k_1^2 k_0^3 + 224k_1^2 k_0 \Omega^4 - 128k_0 \zeta^2 \Omega^6 - 528k_0^3 \Omega^4 + 832k_0^3 \zeta^2 \Omega^2 - 1280\zeta^2 \Omega^4 + 160k_1^4 \Omega^2 + 3584\zeta^4 \Omega^4 k_0 - 256\Omega^8 k_0 + 640k_0^2 \Omega^6 - 16k_0^5$$

$$E = 3584\Omega^4\zeta^4 + 832\zeta^2\Omega^2k_0^2 - 1280\zeta^2\Omega^4k_0 + 80k_1^2\zeta^2\Omega^2 - 128\zeta^2\Omega^6 - 16k_0^4 + 160k_0^3\Omega^2 + 8k_1^2k_0^2 - 528k_0^3\Omega^4 - 40k_1^2k_0\Omega^2 + 640\Omega^6k_0 - k_1^4 + 32k_1^2\Omega^4 - 256\Omega^8$$

$$F = -3k_1^4k_0 + 8k_1^4\Omega^2 + 448k_1^2\zeta^2\Omega^4 - 368k_1^2k_0\zeta^2\Omega^2 - 112k_1^2k_0^2\Omega^2 - 128k_1^2\Omega^6 + 16k_1^2k_0^3 + 224k_1^2k_0\Omega^4 - 128k_0\zeta^2\Omega^6 - 528k_0^3\Omega^4 + 832k_0^3\zeta^2\Omega^2 - 1280k_0^2\zeta^2\Omega^4 + 160k_0^4\Omega^2 + 3584\zeta^4\Omega^4k_0 - 256\Omega^8k_0 + 640k_0^2\Omega^6 - 16k_0^5$$

$$G = 224\zeta^2\Omega^2 - 4k_0^2 + 32k_0\Omega^2 + 7k_1^2 - 64\Omega^4$$

$$H = -3k_1^4k_0 + 8k_1^4\Omega^2 + 448k_1^2\zeta^2\Omega^4 - 368k_1^2k_0\zeta^2\Omega^2 - 112k_1^2k_0^2\Omega^2 - 128k_1^2\Omega^6 + 16k_1^2k_0^3 + 224k_1^2k_0\Omega^4 - 128k_0\zeta^2\Omega^6 - 528k_0^3\Omega^4 + 832k_0^3\zeta^2\Omega^2 - 1280k_0^2\zeta^2\Omega^4 + 160k_0^4\Omega^2 + 3584\zeta^4\Omega^4k_0 - 256\Omega^8k_0 + 640k_0^2\Omega^6 - 16k_0^5$$

$$I = 224\zeta^2\Omega^2 - 4k_0^2 + 32k_0\Omega^2 + 7k_1^2 - 64\Omega^4$$

$$J = -3k_1^4k_0 + 8k_1^4\Omega^2 + 448k_1^2\zeta^2\Omega^4 - 368k_1^2k_0\zeta^2\Omega^2 - 112k_1^2k_0^2\Omega^2 - 128k_1^2\Omega^6 + 16k_1^2k_0^3 + 224k_1^2k_0\Omega^4 - 128k_0\zeta^2\Omega^6 - 528k_0^3\Omega^4 + 832k_0^3\zeta^2\Omega^2 - 1280k_0^2\zeta^2\Omega^4 + 160k_0^4\Omega^2 + 3584\zeta^4\Omega^4k_0 - 256\Omega^8k_0 + 640k_0^2\Omega^6 - 16k_0^5$$

$$K = 224k_0\zeta^2\Omega^2 - 224\zeta^2\Omega^4 - 4k_0^3 + 36k_0^2\Omega^2 + k_1^2k_0 - 96k_0\Omega^4 - 4k_1^2\Omega^2 + 64\Omega^6$$

$$L = -3k_1^4k_0 + 8k_1^4\Omega^2 + 448k_1^2\zeta^2\Omega^4 - 368k_1^2k_0\zeta^2\Omega^2 - 112k_1^2k_0^2\Omega^2 - 128k_1^2\Omega^6 + 16k_1^2k_0^3 + 224k_1^2k_0\Omega^4 - 128k_0\zeta^2\Omega^6 - 528k_0^3\Omega^4 + 832k_0^3\zeta^2\Omega^2 - 1280k_0^2\zeta^2\Omega^4 + 160k_0^4\Omega^2 + 3584\zeta^4\Omega^4k_0 - 256\Omega^8k_0 + 640k_0^2\Omega^6 - 16k_0^5$$

$$M = 224k_0\zeta^2\Omega^2 - 224\zeta^2\Omega^4 - 4k_0^3 + 36k_0^2\Omega^2 + k_1^2k_0 - 96k_0\Omega^4 - 4k_1^2\Omega^2 + 64\Omega^6$$

$$N = -3k_1^4k_0 + 8k_1^4\Omega^2 + 448k_1^2\zeta^2\Omega^4 - 368k_1^2k_0\zeta^2\Omega^2 - 112k_1^2k_0^2\Omega^2 - 128k_1^2\Omega^6 + 16k_1^2k_0^3 + 224k_1^2k_0\Omega^4 - 128k_0\zeta^2\Omega^6 - 528k_0^3\Omega^4 + 832k_0^3\zeta^2\Omega^2 - 1280k_0^2\zeta^2\Omega^4 + 160k_0^4\Omega^2 + 3584\zeta^4\Omega^4k_0 - 256\Omega^8k_0 + 640k_0^2\Omega^6 - 16k_0^5$$

$$O = 2k_0 - \Omega^2$$

$$P = -3k_1^4k_0 + 8k_1^4\Omega^2 + 448k_1^2\zeta^2\Omega^4 - 368k_1^2k_0\zeta^2\Omega^2 - 112k_1^2k_0^2\Omega^2 - 128k_1^2\Omega^6 + 16k_1^2k_0^3 + 224k_1^2k_0\Omega^4 - 128k_0\zeta^2\Omega^6 - 528k_0^3\Omega^4 + 832k_0^3\zeta^2\Omega^2 - 1280k_0^2\zeta^2\Omega^4 + 160k_0^4\Omega^2 + 3584\zeta^4\Omega^4k_0 - 256\Omega^8k_0 + 640k_0^2\Omega^6 - 16k_0^5$$

$$Q = 2k_0 - \Omega^2$$

$$R = -3k_1^4k_0 + 8k_1^4\Omega^2 + 448k_1^2\zeta^2\Omega^4 - 368k_1^2k_0\zeta^2\Omega^2 - 112k_1^2k_0^2\Omega^2 - 128k_1^2\Omega^6 + 16k_1^2k_0^3 + 224k_1^2k_0\Omega^4 - 128k_0\zeta^2\Omega^6 - 528k_0^3\Omega^4 + 832k_0^3\zeta^2\Omega^2 - 1280k_0^2\zeta^2\Omega^4 + 160k_0^4\Omega^2 + 3584\zeta^4\Omega^4k_0 - 256\Omega^8k_0 + 640k_0^2\Omega^6 - 16k_0^5$$

• $|u| < 1$ 일 때

$$A = \frac{f_0}{4\zeta^2} - \frac{f_1\Omega}{2\zeta\Omega^2\sqrt{\Omega^2 + 4\zeta^2}} \sin \phi$$

$$B = \frac{-f_1}{\Omega^2\sqrt{\Omega^2 + 4\zeta^2}} \cos \phi - \frac{f_0}{4\zeta^2} + \frac{f_1\Omega}{2\zeta\Omega^2\sqrt{\Omega^2 + 4\zeta^2}} \sin \phi$$