

라그랑지안 기법과 입자완화동역학 기법을 이용한 콘크리트 표적 충돌해석 기법 연구

A Study on the technique of impact analysis against concrete target using Lagrangian and Smoothed Particle Hydrodynamics

하 동 호*
Ha, Dong-Ho

ABSTRACT

In this paper, the study on the behavior of the deformation of brittle material, such as concrete, ceramic, was performed by comparison of Lagrangian technique and Smoothed Particle Hydrodynamics using commercial nonlinear hydrodynamic numerical program, Autodyn_2D. The effect of SPH technique was proved by investigating the behavior of material deformation, velocity profile and pressure profile.

주요기술용어 : Lagrangian(라그랑지안), Smoothed Particle Hydrodynamics(입자완화동역학), Kernel function (핵함수), Smoothing length(완화길이), Eulerian(오일러리안)

1. 서 론

고압유체역학(Hydrodynamics)을 이용한 전산모사는 탄두/탄약 설계시 정성적인 양을 예측할 수 있는 보조수단으로 널리 이용되어 왔다. 특히, 탄두/탄약 설계 시 실험과 병행하여 설계변수 변경에 따른 성능변화를 정성적으로 비교하게 해줌으로써 실제 시험의 횟수를 줄여 개발비용의 절감에 지대한 역할을 하고 있다.

최근에는 콘크리트와 같은 취성재료로 이루어진

표적을 목표로 하는 탄두/탄약에 대한 요구가 급속히 증가하고 있으며, 이러한 요구에 부응하기 위해서는 콘크리트, 세라믹 등과 같은 취성재료(brittle material)에 대한 충돌거동 묘사에 적절한 해석기법의 연구^[1]가 선행되어야 한다.

취성재료의 충돌거동은 관통자의 충돌에 의한 전면의 파괴와 더불어 뒷면이 떨어져 나가는 박리(spallation)와 같은 현상이 나타나며, 이러한 거동은 연성재료와는 다른 양상을 나타낸다.

대개의 충돌해석의 경우는 라그랑지안(Lagrangian) 기법^{[2],[3],[4]}이나 오일러리안(Eulerian) 기법^[5]으로 수행되어지고 있다. 오일러리안 기법의 경우 하나의 그리

* 국방과학연구소

드(Grid)에 두 개 이상의 재료가 존재하는 경우 해당 그리드에서의 계산치는 항상 평균값을 가지기 때문에 계산상의 오차가 발생하게 된다. 그러므로, 보다 정확한 계산을 위해서는 아주 조밀한 그리드 분포를 가져야 하기 때문에 계산시간이 아주 많이 소요된다.

라그랑지안 기법은 침투과정이나 관통과정에서 그리드가 대변형을 일으켜 일그러짐으로 해가 수렴하지 않는 경우가 발생하게 된다. 통상, 이러한 현상을 방지하기 위해 그리드의 변형이 일정한 기준에 도달하면 그리드를 없애버리는 기법(Eroding)을 사용하게 된다. 그러나, 이러한 기법으로 인해 없어진 그리드만큼의 질량이 없어지게 되어 그 구조물은 에너지를 잃어버리는 효과를 나타내게 되므로 그만큼 해의 정확성이 떨어지게 된다. 더불어 정확하고 정밀한 해석이 요구되는 영역에서는 그리드 크기가 매우 작아져야 하기 때문에 이로인한 전체 해석모델의 그리드 수가 굉장히 증가하게 된다. 이는 계산시간과도 연관되는 문제이기 때문에 아주 신중히 다루어져야 할 문제이다.

최근 그 효율성이 증대되고 있는 입자완화동력학(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)^{[6],[7],[8]}은 기존의 수치해석 기법의 단점을 보완하기 위하여 Lucy^[9]에 의하여 제시되었으며, 여러 연구자에 의하여 활발히 연구되어지고 있는 분야이다.

SPH는 순수 라그랑지안 수치해석 프로그램으로서 그리드 대신 입자(Particle)들의 집합으로 구조물을 구성하고 있으며, 입자의 변수값은 핵함수(kernel function)에 의하여 일정영역내의 주변 입자의 변수값을 이용해서 결정된다. SPH기법은 그리드를 사용하지 않기 때문에 그리드를 없애는 옵션을 사용할 필요가 없으며, 라그랑지안 그리드와도 정보를 공유할 수 있기 때문에 대변형이 발생하는 곳은 SPH로 모델링

하고 변형이 작은 곳에는 라그랑지안으로 모델링 함으로 전체 해석모델의 크기를 최대한 줄일 수 있게 된다.

본 논문에서는 SPH의 개념 및 이론을 정리하였으며, 상용 전산유체역학 프로그램인 Autodyn V4.2^[10]를 이용하여 라그랑지안 기법과 SPH 기법을 이용하여 콘크리트 구조물을 모델링하고 동일 관통자로 충돌해석을 수행하여 그 결과를 서로 비교·검토하였다. 그 결과로부터 콘크리트와 같은 취성재료에 대한 SPH 기법의 적용가능성을 검토하였다.

2. 이론적 배경

SPH는 핵함수(Kernel function)근사법과 입자근사법(Particle approximation)의 방법으로 유도될 수 있다.

먼저, 핵함수 근사법은 Dirac 델타함수(Dirac delta function)의 수학적 개념에 근간을 두고 있다. 임의의 점 r_0 에 있어서 $f(r_0)$ 는 식(1)과 같이 문제의 영역에서 함수 $f(r)$ 과 Dirac 델타함수 $\delta(r_0 - r)$ 의 곱을 적분한 것이다.

$$f(r) = \int_{\Omega} f(r)\delta(r_0 - r, h)dr \quad (1)$$

식(1)에서 Dirac 함수 대신 유사한 형태의 다른 함수를 이용하면 함수 $f(r_0)$ 의 핵함수 근사(Kernel approximation) $\langle f(r_0) \rangle$ 는 식(2)와 같이 표현될 수 있다.

$$\langle f(r_0) \rangle = \int_{\Omega} f(r)W(r_0 - r, h)dr \quad (2)$$

여기서, $W(r_0 - r, h)$ 는 핵함수이고, h 는 완화길이 (smoothing length)로 핵함수의 폭을 나타낸다.

핵함수는 Dirac 델타함수와 유사한 특성을 나타내기 위하여 전체영역에 대하여 핵함수를 적분한 식(3) 및 완화길이가 무한히 작아지면 핵함수가 Dirac 함수와 같아져야 한다는 조건인 식(4)를 만족하여야 한다.

$$\int_{\Omega} W(r_0 - r, h) d\vec{r} = 1 \quad (3)$$

$$h \rightarrow 0, \quad W \rightarrow \delta \quad (4)$$

다음으로, 입자근사법은 핵함수근사법의 식(2)를 입자의 질량 m 과 밀도 ρ 로부터 결정되는 단위부피 개념을 적용하여 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$f(r) = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} f(r_j) \delta(r_0 - r_j, h) \quad (5)$$

지금까지 많은 사람들에 의하여 사용된 1차원 핵함수의 예를 표 1에 나타내었다.

[표 1] 1차원 핵함수 예

| Kernel Type | Function |
|----------------|--|
| Super-Gaussian | $(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{h}) e^{\frac{r}{h}}$ |
| B-spline | $17 - \frac{147}{4} (\frac{r}{h})^2 + \frac{18}{4} \frac{r}{h} ^3$ if, $0 \leq \frac{r}{h} \leq 1$ $\frac{1}{4} (2 - \frac{r}{h})^2 (49 - 47 \frac{r}{h})$ if, $1 \leq \frac{r}{h} \leq 2$ |

일반적으로 유체동력학의 지배방정식은 미분방정식의 형태로 되어 있으므로 미분방정식의 SPH 근사화가 필요하다. 함수 F_1 과 함수 F_2 의 좌표 x^β 방향으로의 미분으로 구성된 식(6)과 같은 함수 F 를 핵함수 근사식 식(2)에 대입하면, 식(7)과 같은 미분방정식의 핵함수 근사식이 얻어진다.

$$F = F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x^\beta} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \int F_{1j} \frac{\partial F_{2j}}{\partial x_j^\beta} W_{ij} dx_j \\ &= F_{1i} \int \frac{\partial F_{2j}}{\partial x_j^\beta} W_{ij} dx_j \\ &\quad + \int (F_{1j} - F_{1i}) \frac{\partial F_{2j}}{\partial x_j^\beta} W_{ij} dx_j \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, W_{ij} 는 두 입자 i 와 j 간의 핵함수 $W(x_i - x_j, h)$ 를 나타내며, F_{1i} 와 F_{1j} 는 각각 입자 i 와 j 입자에서의 F_1 의 값을 나타낸다.

식(7)을 입자근사법을 이용하여 입자근사식으로 변환하면 식(8)과 같이 표현된다.

$$F_i = -F_{1i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_{2j} W_{ij, \beta j} \quad (8)$$

여기서, $W_{ij, \beta j}$ 는 핵함수를 좌표계 x_j^β 에 대하여 미분한 값이다.

핵함수를 우함수라고 가정하면 식(9)와 같이 i 입자에서의 미분으로 나타낼 수 있다.

$$F_i = F_{ij} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_{2j} W_{ij, \beta j} \quad (9)$$

유체동력학의 실질적인 SPH 근사법은 미분방정식을 부분적분하고 기본적인 SPH 근사법을 활용하는 것이 일반적이다. 또한, SPH 근사식을 연속방정식, 운동량보존식, 에너지보존식에 적용하면 다음 식(10), (11), (12)와 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt_i} &= -\rho \frac{\partial U^a}{\partial x_a} \\ &= -\rho \sum_j \frac{m_j}{\rho_i} (U_j^a - U_i^a) W_{ij, \alpha(i)} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_a}{dt_i} &= -\rho \frac{\partial \sigma^{a\beta}}{\partial x_\beta} \\ &= -\sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i^{a\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{a\beta}}{\rho_j^2} \right) W_{ij, \beta(i)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt_i} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U^a}{\partial x^a} \\ &= -\sum_j m_j \frac{\sigma^{a\beta}}{\rho_i^2} (U_j^a - U_i^a) W_{ij, \beta(i)} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, U^a 는 속도, E는 내부에너지, t는 시간, x는 위치 σ 는 전응력(total stress)를 나타낸다. 첨자 α, β 는 텐서(tensor) 표기로 공간에서의 방향을 나타낸다.

3. 수치해석 및 고찰

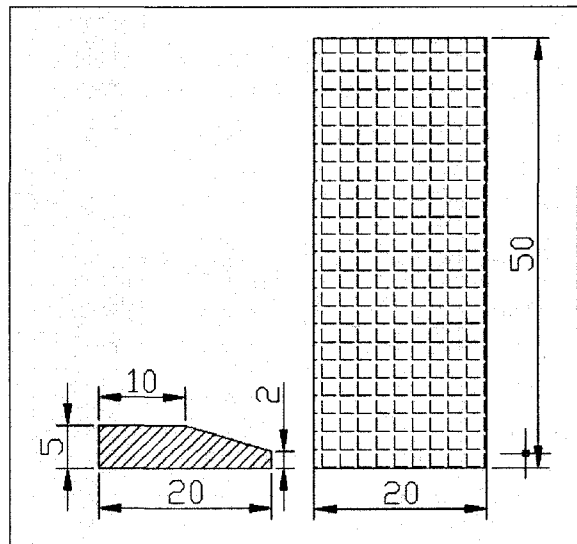
동일관통자를 사용하여 콘크리트 표적에 대하여 라그랑지안 기법과 SPH기법을 사용하여 모델링하고 충돌해석을 수행하여 그 결과를 비교함으로써 SPH기법의 효용성을 검토하였다.

3.1 해석조건

그림 1은 해석모델을 나타낸 것이다. 해석시간을 단축시키기 위하여 단순한 형상의 모델을 구상하였으며, 관통자는 4340 steel을 사용하고 표적은 콘크리트를 사용하였다. 표 2에 각 재질에 대하여 사용된 강도모델과 상태방정식을 나타내었다.

충돌하는 초기속도는 240 m/s로 하였으며, 이때의 압력분포와 관통자의 잔류속도 변화를 서로 비교하였다.

수치해석은 라그랑지안으로 모델링 한 경우에 대해서 그리드 크기비를 변화시켜 그 영향을 서로 비교하



[그림 1] 해석모델(단위:mm)

[표 2] 재료 입력 조건

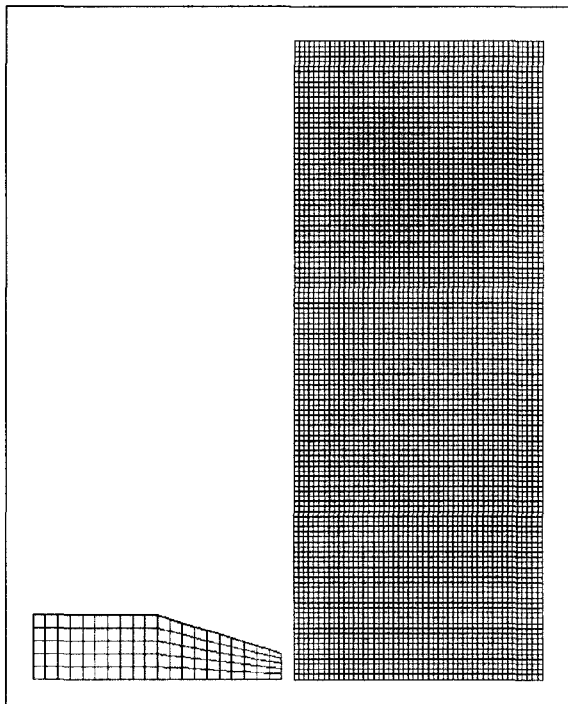
| | 재질 | EOS | Strength modeling |
|-----|------------|--------|-------------------|
| 관통자 | 4340 steel | Linear | Johnson-Cook |
| 표적 | Concrete | porous | Mohr-Couloum |

였고, 관통자는 라그랑지안으로 표적은 SPH로 모델링한 경우는 SPH 입자의 크기를 변화시켜 그 영향을 비교하였으며, 마지막으로 표적에 대해 라그랑지안과 SPH를 혼합한 경우에 대한 해석을 수행하여 앞에서 수행한 결과들과 서로 비교 검토함으로써 SPH기법의 유용성을 확인하였다.

3.2 해석결과 및 고찰

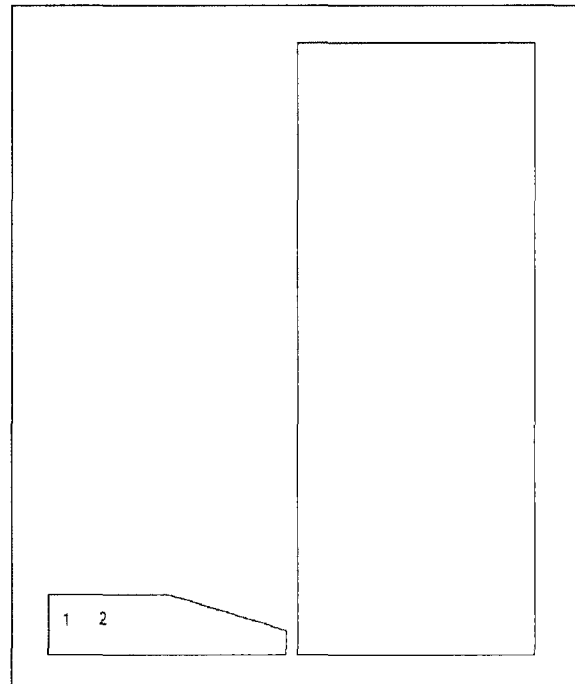
그림 2는 라그랑지안으로 관통자와 표적을 그리드 크기비가 1:0.5인 경우의 모델링한 그림이다. 그리드 크기비를 1:0.5, 1:1, 1:2인 경우에 대한 해석을 수행하였으며, 그 결과를 서로 비교하였다.

각각의 해석을 수행하여 그림 3에서와 같이 관통자의 같은 위치에서 시간에 따른 속도와 압력을 비교하여 해석결과의 차이를 고찰하였다.

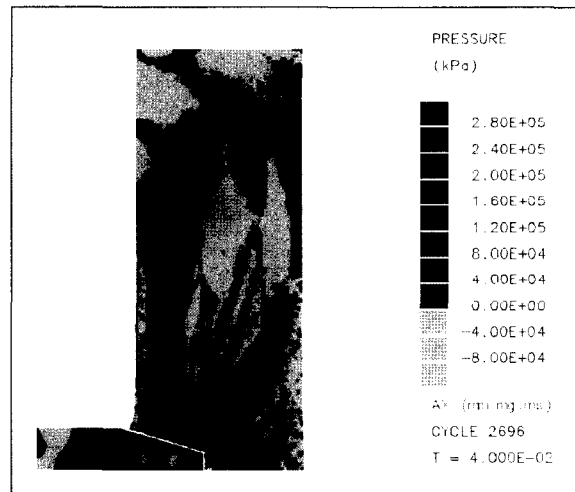


[그림 2] 라그랑지안 해석모델(관통자 : 표적 = 1:0.5)

그림 4는 충돌후 40 μ sec에서의 압력분포를 나타낸 것이다. 콘크리트 표적에 관통자의 침투에 따라 압력이 전파되어가는 경향을 알 수 있다. 이때 인장파와



[그림 3] 시간에 따른 속도 및 압력 비교 지점

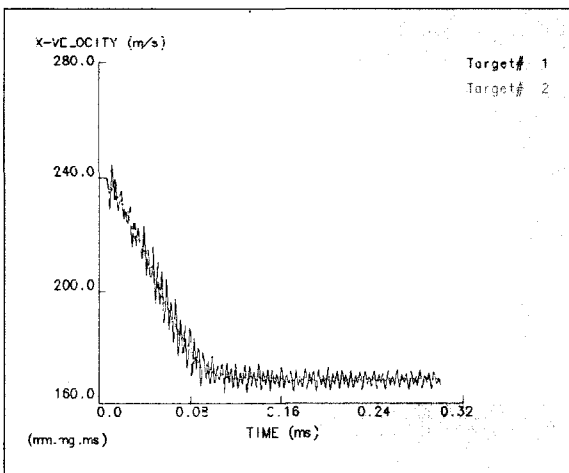


[그림 4] 충돌후 t=40 μ sec에서의 압력분포

압축파가 표적내에 존재하며, 대개의 충격에 따른 콘크리트의 파손은 인장파에 의해 이루어지므로, 인장파가 지나가는 영역에서 크랙이 발생할 수 있다는 것을 예측 할 수 있다.

그림 5는 관통자에서 시간에 따른 속도변화 곡선이다. 속도가 충격 직후부터 감소하기 시작하여 약 100 μ sec부근에서 일정해지는 것을 알 수 있으며, 이는 관통자가 아직 표적 관통중에 있지만 관통자 전방부의 표적은 이미 관통자의 진행에 대하여 더 이상 저항하지 못하는 상태, 즉, 재료에 파손이 발생한 상태라는 것을 판단 할 수 있다. 여기서, 종말 잔류속도는 약 165m/s로 나타난다.

그림 6은 105 μ sec시점에서의 재료상태를 나타낸 것이다. 압축강도의 1/10에 해당되는 시점을 파손(failure)이 일어난다는 기준을 부여한 경우에 대하여, 파손이 발생한 부분을 나타낸 그림이다. 관통자는 아직 표적 관통이 진행중이지만 관통자 진행방향의 앞쪽에 존재하는 표적의 상태는 물리적으로 거의 파단되었거나 크랙이 산재한 상태로 여겨진다. 검게 표시된 파손이 일어난 곳의 분포로부터 크랙이 진전되는

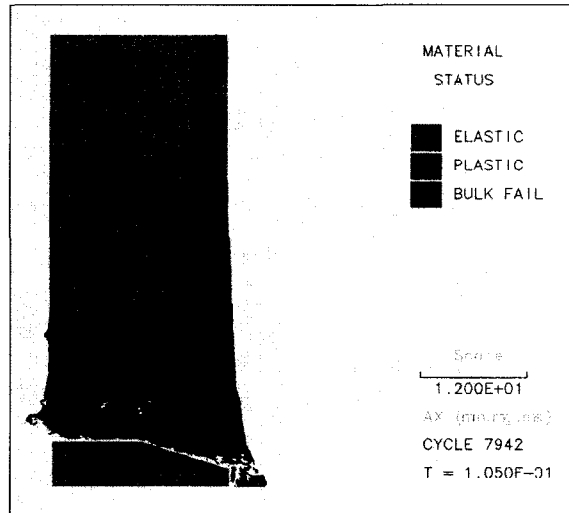


[그림 5] 시간에 따른 속도 변화 곡선

상황으로 판단 할 수 있다.

대개의 라그랑지안 기법을 이용한 해석에서는 그리드의 크기에 따라서 결과 값이 많이 달라지는 경우가 있다. 이러한 경우는 그리드 크기비에 대한 영향을 분석하여 적절한 그리드 크기비를 찾아야 한다. 표 3와 같이 관통자의 그리드 크기를 고정하고 표적의 그리드 크기를 변화시킨 경우에 대한 해석을 수행하여 시간에 대한 속도변화를 서로 비교하여 그리드 크기비의 영향을 검토하였다.

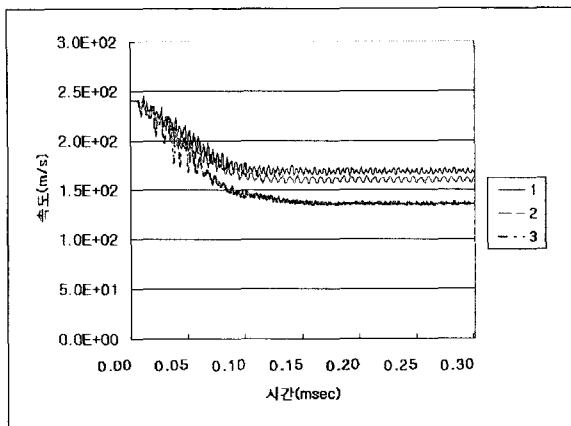
그림 7은 그리드 크기비를 변화시킨 경우, 각 그리드비에 대한 속도변화를 비교한 곡선이다. 1번은 종말



[그림 6] $t=105 \mu$ sec에서의 재료상태

[표 3] 그리드/입자 크기비

| 구분 번호 | 관통자 (그리드) | 표적 (그리드/입자) |
|----------|--------------|----------------|
| 1 | 1 | 0.5 |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

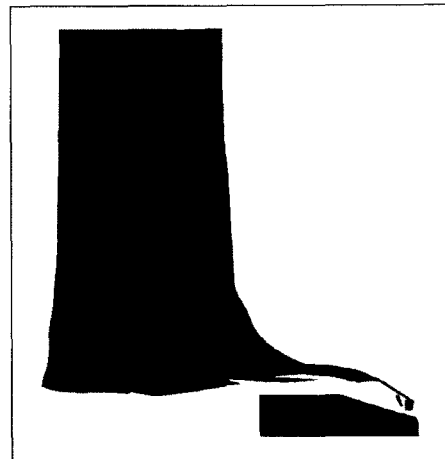


[그림 7] 시간에 따른 속도 변화 곡선

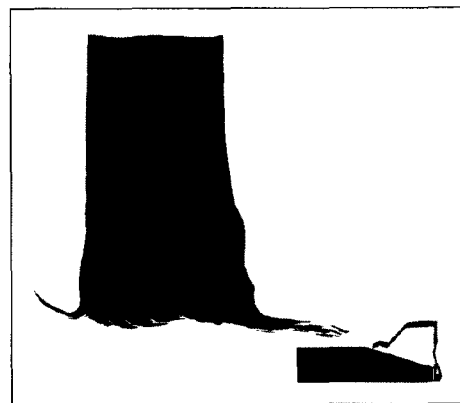
잔류속도가 168 m/s이고 2번은 160 m/s로 나타났으며, 3번은 135 m/s로 나타나 1번과 2번에 비해 상대적으로 낮은 경향을 나타내고 있다

그림 8은 충돌하여 0.3 msec 일때의 진행상황을 나타낸 것이다. 그리드 비가 다름에 따라 표적의 변형형상도 다르며, 그리드 비가 2.0인 (a)에 비해 (b)와 (c) 처럼 표적의 그리드가 작을수록 표적 변형 형상이 더욱 세밀하게 표현 될 수 있다는 것을 알 수 있고, (c)의 그리드비가 0.5인 경우는 표적 내부의 파괴현상도 묘사 할 수 있었다.

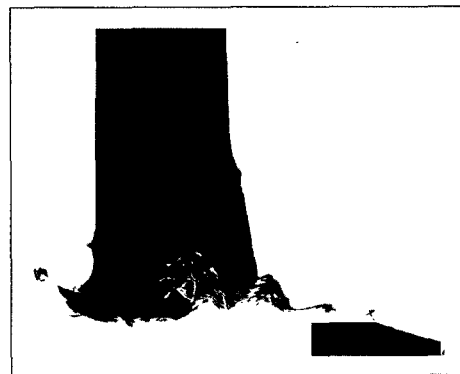
그림 9는 SPH를 사용하여 해석한 경우에 대한 결과이다. 입자크기가 관통자의 그리드 크기에 비해 0.5, 1.0, 2.0배 일때의 해석 결과에 대해 속도변화를 서로 비교하였다. 그림 7의 라그랑지안 해석기법에 의한 해석결과보다 상대적인 편차는 대폭 줄어든 것을 알 수 있다. 그러나, 입자크기가 0.5배인 경우와 1.0배인 경우의 잔류속도는 154 m/s와 156 m/s인데 비해 3번의 잔류속도는 164 m/s로 나타나 1번과 2번에 비해 상대적으로 큰 잔류속도를 나타내었다. 입자완화동역학에서는 입자 하나의 밀도가 전체질량/입자수로 계산되므로, 입자크기가 크면 입자의 밀도가 커지게 되므로



(a) 그리드비 2.0



(b) 그리드비 1.0



(c) 그리드비 0.5

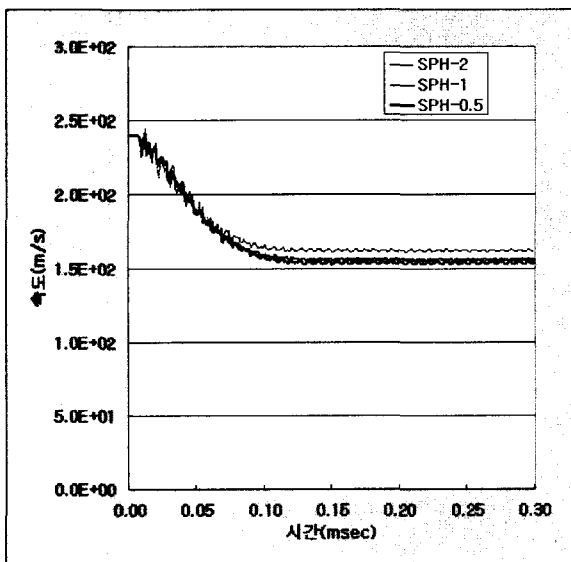
[그림 8] 충돌 후의 모습(t = 0.3 msec)

밀도가 어느 적정 크기 이상이 되면 실제 현상을 표현하기 어렵게 된다. 또한, 한 입자에 상관되는 물리량을 계산하기 위해 주위 입자들의 범위를 결정하기 위하여 Autodyn에서는 반경 $2h$ (h : 입자완화길이)이 내에 존재하는 입자들과 핵함수에 의해 정보를 서로 교환하고 있다. 그러므로, 2배 크기의 입자가 사용된 경우는 0.5배 혹은 1배 크기의 입자를 사용한 경우보다 상관되는 입자들의 수는 같지만 하나의 입자 밀도 증가에 따라 주위 상관되는 입자들의 전체 질량이 증가하기 때문에 어느 한도 이상에서는 물리량이 급격히 달라지는 양상을 나타낸다. 이로부터, 입자 크기를 적절히 조절하여 실제 물리 현상과 유사한 양상을 나타내는 입자 크기를 결정하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다. 그림 9에서 나타난 속도차는 이러한 입자 크기에 따른 주위 상관 입자의 질량차에 의해 나타난 것으로 판단된다.

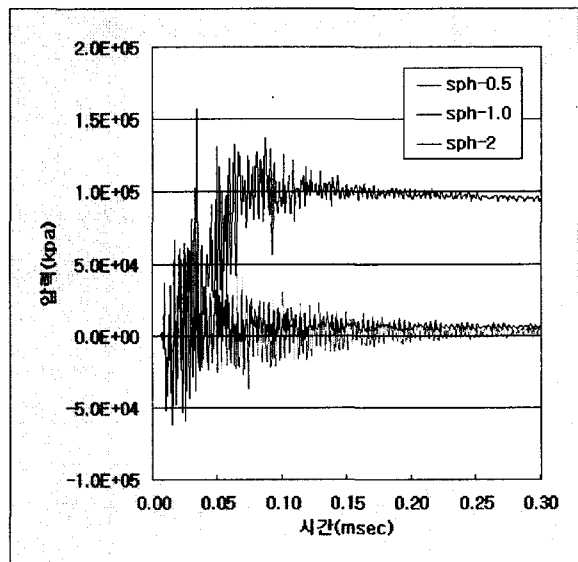
그림 10은 SPH로 해석한 결과에 대해 시간에 따른 압력변화곡선을 나타낸 것이다. 0.5배와 1.0배의 해석

결과는 압력변화 경향이 거의 비슷한 양상을 나타내지만, 2.0배의 SPH 입자크기를 사용한 경우는 아주 다른 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그림 9의 속도변화 요인과 같이 한 입자에 대한 주위 입자의 계산범위가 0.5 혹은 1배의 입자 크기를 사용한 경우에 비해 2배의 입자 크기비를 사용한 경우, 관통자에 대응되는 입자의 수가 달라지며 또한, 하나의 입자 밀도는 전체질량을 입자수로 나눈 값을 사용하기 때문에 대응하는 질량이 달라지게 되어 압력차이가 그림 10과 같이 나타나는 것으로 판단된다. 입자 각각의 밀도가 0.5배 혹은 1배 입자 크기에 비해 2배 입자의 경우 관통자에 대응하는 질량의 급격한 증가에 의해 압력이 크게 나타나는 것으로 판단된다.

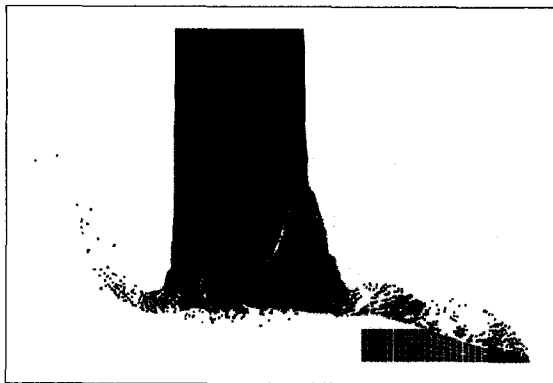
그림 11은 0.3msec에서의 변형 형상을 나타낸 것이다. (a)와 (b)는 입자 크기비가 0.5와 1.0인 경우로 (c)의 2.0인 경우에 비해 표적의 변형 형상이 더욱 자세히 나타난다는 것을 알 수 있으며, 세 경우 모두 크랙이 발생되고 있는 양상을 잘 나타내고 있다. 이



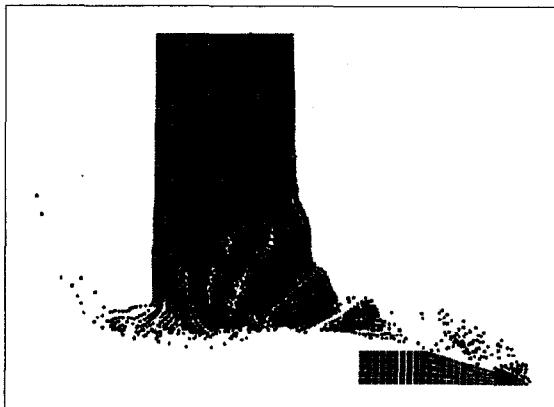
[그림 9] 시간에 따른 속도 변화 곡선



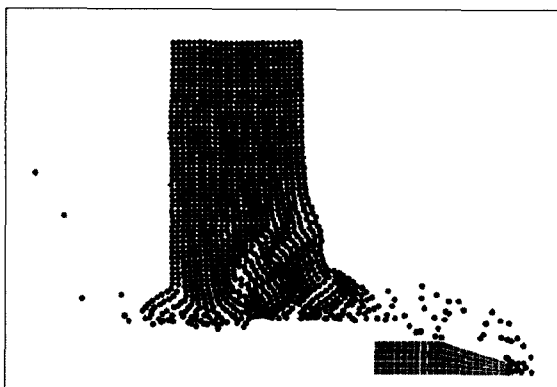
[그림 10] 시간에 따른 압력 변화 곡선



(a) 입자 크기비 0.5



(b) 입자 크기비 1.0



(c) 입자 크기비 2.0

[그림 11] SPH 입자 크기비에 따른 충돌현상
($t=0.3\text{msec}$)

는 라그랑지안 기법에서는 나타나지 않은 양상이다. 이러한 현상을 적절히 이용한다면 콘크리트나 세라믹과 같은 취성재료의 파괴거동 표현이 용이하리라 판단된다.

4. 결 론

본 논문에서는 최근 취성재료의 파괴거동에 효과적인 것으로 알려진 입자완화동역학(SPH)을 이용한 해석기법에 대하여 라그랑지안 기법을 이용한 해석결과와 비교함으로써 SPH기법의 적용 가능성을 검토하였다.

동일한 모델, 동일한 해석 조건에서 전산유체역학 프로그램인 Autodyn 2D를 이용하여 라그랑지안 해석과 SPH 해석을 수행하였고, 변형형상과 속도 및 압력을 서로 비교한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 라그랑지안 기법의 경우 그리드 크기에 의해 표적의 변형형상이 많이 달라진다는 것을 알 수 있었으며, 특히, 취성재료의 크랙이나 파손 영역의 표현이 곤란하다는 것을 알 수 있었다.

2. SPH기법을 사용하여 해석한 결과 입자 크기에 대한 영향이 큰 것으로 나타났지만, 관통자의 관통후 표적 변형 형상으로부터 취성재료의 크랙 발생이나, 파손영역의 표현 등에는 적합하다는 것을 알 수 있었고, 관통자의 속도나 압력변화 경향을 비교함으로써 적정 입자크기를 결정 할 수 있다는 것을 확인하였다. 또한, 이러한 결과를 이용하여 취성재료의 파괴거동 묘사에는 SPH를 이용하는 것이 라그랑지안 기법을 사용하는 것 보다 효과적이라는 것을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Zukas, J. A., "High Velocity Impact Dynamics", John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [2] K. J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [3] Robert, D. Cook, David, S. Malkus and Michael E. Plesha, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [4] Ls-dyna Users Manual, 2001.
- [5] Dytran Users Manual, 2001.
- [6] Libersky, L. D. and A. G. Petschek, "Smooth Particle Hydrodynamics with Strength of Materials", Advanced in the Free-Lagrange Method, Preprinted to the Preceedings of the Next Free-Lagrange Conference, Moran Wy, 3-7 June 1990. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] Monaghan, J. J., "An Introduction to SPH", Computer Physics Communications, 48:89, 1988.
- [8] Swegle, J. W., S. W. Attaway, M.W. Heinstein, F. J. Mello and D. L. Hicks, : "An Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics", Sandia National Laboratory Technical report, #SAND93-2513, 1994.
- [9] Lucy, L.B. "A Numerical Approach to the testing of Fission Hypothesis", Astronomy Journal, 82, 1013-1024, 1977.
- [10] Autodyn User's Manual, 2001.