KJHM Vol. 15, No. 3, 2002, 65-74

고전확률론과 중심극한정리에 대한 역사적 고찰

건국대학교 응용통계학과 **장인홍**

Abstract

In this paper we investigate an origin and development of the classical theory of probability. And we also investigate the law of large numbers and central limit theorem which are very important in the probability theory.

0. 서론

두 주사위를 몇 번 던져서 그 가운데 적어도 1회 (6, 6)이 나오면 이긴 것으로 하는 놀이에서 몇 번하면 이길 승산이 있을까? 이 문제는 프랑스의 유명한 도박사 메레(De Mere)가 그의 친구인 프랑스의 수학자 파스칼(Pascal)에게 해결을 호소한 문제이다. 독일과 영국에서 통계학이 싹틀 무렵 불란서에서는 르네상스로 인하여 발전된 지중해 연안의 여러 도시에서 상업과 항해가 번성해지면서 일확천금을 꿈꾼 무역상들은 원양항해에 나서게 되었으며 항구에 모인 선원들은 일기불순으로 출항하지 못할 때는 자연히 무료한 시간을 보내기 위해 노름이 유행하게 되고 그 결과로 주사위 또는 카드놀이와 같은 노름이 유행하면서 자연스럽게 이러한 문제가 야기되었다. 도박사들은 그들의 승률을 높이려는 노력에서 다양한 기회의 게임(game of chance)에 대해서 최적의 승률을 얻기 위해 수학자들을 찾아가서 그 방법을 문의하게 되었으며, 여기에서 "확률의 사상"이 싹트게 되었다. 또한 계몽적 합리주의는 우연적인 사상에 대하여도 수학적으로 취급하는 일에 특별한 흥미를 갖고 있었으며 이러한 사상적 시대정신이 "확률론"을 발전시킨 원동력이 되었다고도 할 수 있다. 또한 초기 확률이론은 사회과학, 연금, 보험, 기상학, 의학 등의 문제들로부터 출발하였는데 균등한 경우(equally likely)에 대한 생각이 지배적이었다. 그러나 확률론의 수리적 전개의 예는 기회의 게임에 대한 분석에서 비롯되었다고 할 수 있다.

위에서 우리는 확률론의 기원은 어디에 있는지에 대하여 살펴보았으며 이제 우리의 관심은 이러한 확률론은 어떻게 발전해 왔으며, 확률론을 이끌어온 학자들은 누구인가에 더욱 관심을 갖게될 것이다. 따라서 본 논문에서는 고전확률론을 중심으로 확률론의 발달과정과

관련된 확률론자들에 대하여 살펴보고자 한다. 또한 확률론에서 가장 많이 다루어지는 극한정리인 대수의 약법칙, 대수의 강법칙, 중심극한정리에 대하여 이들 정리들과 관련된 학자들을 중심으로 하여 살펴보고자 한다. 논문의 전개는 제 2 장에서는 고전확률론의 발달과정과 불확실성에 대한 측정 그리고 이와 관련된 확률론자들에 대하여 살펴본다. 제 3 장에서는 확률론에서 가장 중요한 중심극한정리, 대수의 법칙과 관련한 고전확률론의 발달과정을 살펴보고자 한다.

1. 고전확률론과 불확실성에 대한 측정

이 단원에서는 고전확률론의 발달과정을 학자들을 중심으로 하여 전개하고자 한다. 앞에서 살펴본 바와 같이 확률론의 기원은 기회의 게임에서 승률을 높이고자 하는 도박에 대한 인간의 억재할 수 없는 인간의 갈증으로부터 출발하였다. 주사위를 던졌을 때 어떤 눈이 나올지를 예상하는 문제에 대해서는 이미 단테(Alighieri Dante, 1265~1321)의 **신곡**(Divina Commedia)의 주석(Benvenuto d'Imoda, 1477)에서 3개의 주사위를 던지는 방법에 관한 서술을 찾아볼 수 있다.

도박의 문제를 이론적으로 연구한 첫 번째 사람은 카르다노(Garolams Cardano, 1501~1576)로 알려지며, 그 자신이 도박자였기 때문에 열심히 연구하였을 것으로 생각된다. 그는 일종의 도박사 편람 **주사의 노름에 대하여**(De Ludo Aleae)를 저술하였다.

다음에 소개할 문제는 확률론의 역사에 있어서 매우 중요한 계기가 된 문제이다. 1654년 당시 전문 도박사였던 메레가 그의 친구인 프랑스의 수학자 파스칼(Blasie Pascal, 1623~1662)에게 해결을 호소한 문제이다[1, p. 103].

문제. 실력이 같은 두 사람이 2만원씩 내고 승부를 걸어서, 3번이긴 사람이 그 건돈을 갖기로 하였다. 그런데 갑이 2회 을이 1회 이겼을 때 사고가 발생하여 이 노름을 중지하게 되었다. 이 건돈을 어떻게 분배하면 좋은가?

풀이. 중지된 이후에 일어나는 모든 경우를 생각해보면, 갑이 이기던가, 을이 2번 계속해서 이기던가, 을이 이긴 다음에 갑이 이기던가의 3가지 경우뿐이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$(\text{갑의 기대금액})=4\text{만원}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=3\text{만원},$$

$$(\text{을의 기대금액})=4\text{만원}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=1\text{만원}$$

그러므로 위와 같이 분배하면 된다.

파스칼은 게임에서의 분배액은 그들 각자가 게임에서이길 확률에 좌우된다는 중요한 의견을 제시했다. 그런데 더욱 중요한 사실은 수학자로 대단한 명성을 지니고 있던 프랑스의 수

학자 페르마(de Fermat, 1601~1665)와 서신을 교환하여 이 문제 대한 훨씬 일반화된 해답을 이끌어 냈을 뿐만 아니라 운에 맡겨진 게임과 관계가 있는 많은 다른 문제들의 해법을 제시했다. 확률론의 효시라고 간주되는 이 유명한 서신 교환은 파스칼과 페르마가 모두 그 당시의 뛰어난 수학자로 인식되었기 때문에 유럽의 수학자들에게 확률에 대한 관심을 유발시킨 것으로도 역시 의의가 있다라고 할 수 있다. 그 한가지 예로 네덜란드의 수학자 호이겐스(Christian Huygens, 1629~1695)는 이러한 문제의 해법을 논의하기 위해 파리로 왔으며, 이 새로운 분야의 관심과 활동이 급속하게 성장하게 되었다.

스위스의 베르누이(Bernoulli) 가문은 수학분야에서 가장 유명한 가계인데 1세기 동안에 8명의 수학자를 배출하였으며, 그들은 확률론의 발전에 크게 기여하였다. 논하고자 하는 사람은 야콥 베르누이(Jacob(영어로는 James) Bernoulli, 1654~1705)인데 베르누이의 아버지는 그를 성직자가 되도록 교육하였으며 수학자가 되는 것을 끝까지 반대하였다. 베르누이는 수학의 여러 분야에 대하여 출판되지 않은 유고를 남겨 놓았는데 그 중에서 가장 가치 있는 것이 그의 사후 조카에 의해 출판된 확률론에 관한 저서 **추측술**(Ars Conjectandi)이다. 이 책은 처음으로 확률 문제만을 취급한 확률론의 문헌 가운데 가장 빛나는 것 중의 하나이며, 베르누이의 연구와 업적은 다음 단원에서 구체적으로 다룬다.

프랑스의 수학자 드무아브르(Abraham de Moivre, 1667~1754)는 1733년경 이항분포의 극한형으로서 "정규분포"가 처음으로 소개되었으며 그는 이항 모수 n이 클 때 이항확률변수와 관련된 확률들의 근사값을 구하기 위해 사용되었다.

뷔퐁(Georges Louis Leclere von Buffon, 1707~1788)은 "평면상에 같은 간격으로 평행선이 그어져 있을 때, 이 평면상에 떨어뜨린 바늘이 이들 평행선 중의 하나와 교차할 확률"을 구하는 문제를 생각하고 해결하였다. 이 문제는 뷔퐁의 "바늘문제"로 알려져 있으며, 그는 "기하학적 확률"을 창출하였다.

다음의 문제는 확률에 관한 "부정문제"의 한 예로, 1889년에 베르트랑(Joseph Bertrand, 1882~1900)가 제출한 것이다. 이 문제의 해는 아래의 풀이 외에도 해법에 따라 여러 가지의 해가 존재할 수 있다. 따라서 "베르트랑의 패러독스"라고도 한다

문제. 주어진 원에 하나의 현을 임의로 그을 때 그 현의 길이가 그 원에 내접하는 정삼각형의 한 변보다 클 확률은 얼마인가?[10, p. 198]

풀이. 현의 위치는 원의 중심에서의 거리에 의해 결정될 수 있다. 이 거리는 0과 원의 반경 r 사이에서 변한다. 중심에서 현까지의 거리가 $r/2$보다 작으면 현의 길이는 그 원의 내접하는 정삼각형 변의 길이보다 클 것이다. 그러므로 랜덤 현을 원의 중심에서 거리 D가 0과 r 사이에 균일하게 분포된다는 의미로 생각할 수 있고, 현의 길이가 내접하는 정삼각형의 변보다 클 확률은 다음과 같다.

$$P\left(D < \frac{r}{2}\right) = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$$

또한, 영국의 철학자 토마스 베이즈(Thomas Bayes, 1702~1761)에 의한 "원인의 확률"에 관한 연구로 베이즈 이후 베이즈 공식(Bayes′ formula)으로 알려진 정리는 다음과 같다.

정리. 표본공간 S에서 사상 $B_1, \cdots, B_n$은 서로 배반이고 $S=B_1\cup\cdots\cup B_n$이며, $P(B_i)>0$ ($i=1, \cdots, n$)이면 임의의 사상 A에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

위의 확률 $P(B_k|A)$은 사상 A(사전확률)가 이들 원인중의 하나로 일어났다는 것을 알았을 경우 이 사상이 참으로 원인 B_k로 일어났을 사후확률이다. 위의 정리로부터 출발한 베이지안 통계학(Bayesian Statistics)은 "주관확률(Subjective Probability)"를 도입함으로써 적어도 논리적으로 모순 없는 체계를 만드는 일이 가능하였다. 확률론은 베이즈의 "원인의 확률"과 라플라스(de Laplace)에 의한 "확률의 해석적 이론"에 의하여 대성하였다고 할 수 있다.

천문학과 측량학 등 응용과학의 발달이 위대한 시기에 독일의 수학자 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777~1855)는 관찰오차를 제거하는 계산방법과 계측대상의 실제값을 계산하는 방법을 전개하였다. 가우스는 오차의 이론에서 출발해서 정규곡선이 지니고 있는 실용적 가치를 밝히고, 과학적 관찰에 수반되는 오차에 대하여 정규곡선이 어떻게 잘 적합하는지를 보이고 그 평균값 확률오차 등의 기본적인 계산방법을 고찰하였다. 그래서 정규곡선을 가우스곡선이라고 부르기도 한다.

확률론은 18세기 이후 19세기 중엽까지 위에서 소개한 학자들 외에도 케틀레(Quetelet, 1794~1874), 칼 피어슨(Karl Pearson, 1857~1936) 등의 많은 학자들에 의하여 많은 발전을 이루게 되었다.

2. 중심극한정리

이 단원에서는 통계학분야에서 응용의 가치에 대하여 아무리 강조하여도 지나치지 않는 확률론에서 가장 많이 다루어지는 극한정리인 대수의 약법칙, 대수의 강법칙, 그리고 중심극한정리에 대하여 살펴보고자 한다. 대수의 약법칙과 중심극한정리는 르베그(Lebesgue, 1875~1941) 등에 의하여 성립된 측도론(measure theory)적 방법을 사용하지 않고 단지 분포함수의 점근적 행태(asymptotic behavior)만을 다룸으로써 문제 해결에 접근할 수 있다는 점에서 대수의 강법칙, 반복대수의 법칙과 비교하여 그 근본성질이 다르다고 할 수 있다. 특히

문제의 복합성과 응용성 등에 비추어 극한정리는 대수의 약법칙에 비하여 그 발달과정이 훨씬 흥미롭다. 여기서는 베르누이의 대수의 법칙에서 출발하여 드무아브르(de Moivre, 1667 ~1754)에 의하여 처음 등장하게 되는 이항분포의 정규근사에 관한 배경을 중심으로 중심극한정리의 초기 발달과정과 더 나아가 대수의 법칙에 대하여 정리하고자 한다.

2.1. 베르누이와 대수의 약법칙

스위스의 수학자 가문에서 태어난 야콥 베르누이의 확률론에 관한 저서 **추측술**(1713)에는 대수의 (약)법칙의 기초가 되는 "베르누이의 정리"가 수록되어 있다. 이 책은 그의 사망 후 8년만에 그의 조카 니콜라스 베르누이(Nicholas Bernoulli)에 의하여 출간되었다. 그의 저서는 총 4개의 장으로 구성되어 있으며, 제 1 장은 당시까지의 최고로 알려진 네덜란드의 수학자 호의겐스(Christianus Huygens)의 저서에 담겨있는 내용이 재 수록되어 있으며, 제 2 장에는 순열조합의 이론이 실려있고, 제 3 장에서는 여러 가지 게임에 대한 조합이론의 응용을 취급하였고, 특히 제 4 장에서는 확률론의 발달과정이래 처음으로 극한정리가 기술, 증명되었으며 이것이 바로 대수의 약법칙이다. 현대의 많은 학자들은 이 정리를 기점으로 확률론의 근대사가 시작된다고 주장하기도하며, Haking([5])은 이 책은 "확률에 대한 수학적 이론의 효시이며 동시에 확률개념출현의 끝으로 간주된다."라고도 표현하였다. 그러나 불행히도 대수의 법칙의 증명을 끝으로 미완성으로 끝나버렸지만 확률론의 문헌으로서는 가장 빛나는 것 중의 하나로 여겨진다. 여기에서 베르누이는 "미래에 어떤 특정한 사건이 일어날 가능성은 유사한 환경아래서 과거에 발생했거나 또는 발생하지 않았던 경우와 비슷하게 미래에도 발생할 것이다. 따라서 어떤 사건이 일어날 비율은 경험적으로 구해질 수 있다."([Bernoulli, 1713], p. 224)라고 생각하였으며, 기회를 결정하여야 하는 이러한 경험적 접근이 베르누이가 처음은 아니었다. 베르누이가 새롭게 시도한 것은 "사건들의 모르는 비율에 대하여 더 많은 증거를 축적하면 할수록 그 비율에 대한 더 확실한 지식을 얻을 수 있다."라 사실이다. 베르누이는 관찰치가 많아질수록 불확실성이 감소하는 것을 평범한 진리로 생각하였으며, 잔여 불확실성에 대한 자연적인 하한은 존재하지 않고, 관측값의 개수를 증가시킴으로써 알지 못하는 비율에 대한 도덕적 확신을 얼마든지 얻을 수 있다"고 하였다([Bernoulli. 1713], p. 225)

베르누이의 정리를 현재의 용어로 소개하면 다음과 같다.

정리(베르누이 정리). 성공의 확률이 p인 N번의 베르누이 시행에서 X를 성공의 횟수라고 할 때, 임의의 양수 ε과 임의의 큰 수 c($c=10$ 또는 100 또는 1000)에 대하여 다음을 만족시키는 N을 구할 수 있다.

$$P\left(\left|\frac{X}{N}-p\right|\le\varepsilon\right)>cP\left(\left|\frac{X}{N}-p\right|>\varepsilon\right)$$

이 식은 오늘날 베르누이의 대수의 약법칙(weak law of large numbers)으로 불리는 다음의 부등식으로 나타낼 수 있다.

$$P\left(\left|\frac{X}{N}-p\right|>\varepsilon\right)<\frac{1}{c+1}$$

베르누이의 증명은 r은 (fertile case), s는 (sterile case)이고 표본의 크기 n은 $r+s$의 배수, ε은 $1/(r+s)$인 경우로 국한되어 있으며, 오늘날의 교과서에 쓰이고 있는 체비셰프의 부등식에 의한 증명보다 훨씬 길고 복잡하다[11, p. 68]. 즉, 베르누이는 추정오차 ε이 $1/(r+s)$로 주어질 때 확률 $P(|X/N-p|\leq\varepsilon)$의 하한이 $c/(1+c)$가 되는 데 필요한 최소한의 표본의 크기 N을 구하고자 한 것이다. 베르누이는 $r=30, s=20$일 때의 예제를 이용하여 한계를 구하였는데, $c=1,000$에 대하여 $N=25,550$, $c=10,000$에 대하여 $N=31,258$, 또 $c=100,000$에 대하여는 $N=36,966$개의 표본이 필요하다고 하였다. 그가 살던 도시의 총인구는 25,550보다 작은 것으로 알려져 있고, 25,550이란 숫자는 그 때는 천문학적 이상이며 실제에 있어서는 무한대에 해당되는 숫자로 베르누이 자신뿐만 아니라 동시대의 다른 사람들에게도 실망스러운 것이었다. 그럼에도 불구하고 베르누이의 정리는 불확실성의 측정에 대한 수학적 접근의 효시로 볼 수 있기 때문에 대단한 업적으로 보아야 할 것이다.

2.2. 드무아브르와 라플라스의 정규근사

베르누이의 정리에 의하여 얻어지는 표본의 크기 N은 실제 추론에 응용되기엔 너무 크기 때문에 $P(|X/N-p|\leq\varepsilon)$에 대한 보다 정확한 근사값을 찾을 필요가 있었다. 베르누이(James Bernoulli)의 조카인 니콜라스 베르누이(Nickolas Bernoulli)는 표본의 크기 N이 고정되었다고 할 때의 확률의 한계를 구하려 했다는 점에서 베르누이의 방법과 차이가 있었다. 드무아브르의 접근방법도 니콜라스 베르누이의 접근방법과 유사하다. 드무아브르는 오늘날 이항분포의 정규근사로 불리는 이항전개(binomial expansion)에서 항의 근사값을 구하는 문제를 생각하였다. 그의 증명은 스털링의 공식(Stirling's formula)과 테일러 정리(Taylor's theorem)를 이용하였다. 드무아브르는 확률변수 X가 대칭인 이항분포를 따를 때 n번 실행(n은 짝수)에서 $P(X=n/2)$에 대한 대표본근사(large sample approximation)를 구하였다. 1738년 출간된 그의 저서 *The Doctrine of Chances* 내용을 현대적인 표현으로 나타내면 다음과 같이 표현될 수 있다.

정리. $P(X=\frac{n}{2}+l)$을 $l=0$으로부터 $l=s\sqrt{n}$까지의 확률의 합을 구하고자 할 때,

$P(X=\frac{n}{2}+l)\cong\frac{2}{\sqrt{nc}}\exp(\frac{-2l^2}{n})$이 되므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{l=0}^{s\sqrt{n}}P(X=\frac{n}{2}+l)\cong\frac{2}{\sqrt{nc}}\int_0^{s\sqrt{n}}\exp(\frac{-2l^2}{n})\,dl,\quad c=2\pi$$

그는 정리에서 $p=1/2$일 때만 증명을 하였으며, 특히 $s\leq 1/2$에 대하여는 이 근사는 충분히 빠르게 수렴하지만 $s=1$에 대하여는 수열이 12개 또는 13개항보다 작을 때는 충분한 근사가 될 수 없다는 것을 언급하였다. 그래서 그는 위의 방법을 이용하여 대칭인 이항분포에서 중심으로부터 일정한 범위 내에 있을 확률을 계산하여 베르누이의 이항확률에 대한 근사를 매우 정밀하게 발전시켰다. 또 하나의 지대한 공헌은 근사법에서 $\sqrt{n}$의 의미를 부각시켰다는 것이다. 드무아브르가 1733년 이항확률 $P(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}a\sqrt{n}\leq X\leq\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}a\sqrt{n})$에 대한 근사확률값과 현대적 방법에 의해 계산된 정규적분 $\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})\,dx$의 값이 다음의 표에 나타나 있다[11, p. 82].

[표] 드모아브르의 근사값과 정확한 정규확률값의 비교

a	드모아브르의 근사값	정확한 정규확률값
1	0.682688	0.682689
2	0.95428	0.95450
3	0.99874	0.99730

베르누이와 드무아브르의 결과는 동시대와 그 후의 학자들에게 많은 관심을 받지는 못하였던 것으로 알려지는데, 그 이유는 이들의 정리는 미지의값 p가 주어진 경우에 관측값에 대한 확률만을 다룬 것으로 당시 학자들의 관심의 대상되었던 주어진 관측값에서의 p에 관한 확률을 다룬 것이 아니기 때문이다[11]. 또 다른 이유는 "성공 또는 실패"라는 확률구조는 당시의 응용대상인 천문학에서의 오차이론에 의한 확률구조와 근본적으로 다르기 때문으로 여겨진다.

드무아브르 이후의 중심극한정리와 관련된 업적은 라플라스(1749-1827)에 의하여 연결되는데, 라플라스(Pierre simon de Laplace)는 프랑스의 노르망디의 빈가에서 태어났으나 유년 시절부터 수학에 특별한 재능을 나타내었다고 한다. 라플라스는 유명한 천문학자이기도 하였는데 1799년부터 1825년에 걸쳐서 발간한 5권의 저서 **천체역학**(Mecanique celeste)은 뉴턴(Newton) 역학의 기초 위에 태양계의 구조를 수학적으로 해명한 대저이다. 1744년경부터 확률론, 통계방면에 관한 논문을 발표하기 시작하였으나, 그 논문의 결과를 통합해서 **확률의**

분석적 이론(Theorie analytique des probabilites, 1812)을 간행하였다. 라플라스는 드무아브르가 증명을 생략한 채 남겨둔 비대칭인 이항분포의 정규근사를 테일러 정리와 스털링의 공식만 사용하면 유도될 수 있는 일반적인 p의 경우인 다음의 결과를 얻었다. 이로부터 이항분포의 정규근사를 드무아브르-라플라스 정리라고 불리게 된다.

정리(드무아브르-라플라스 극한정리)([Laplace], 1812). S_n을 각 시행에서 성공할 확률이 p인 n번의 독립시행을 행할 때 발생한 성공의 횟수라 하면, 임의의 $a<b$에 대하여 $n\to\infty$일 때, 다음이 성립한다.

$$P\left(a\le \frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b\right)\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

이 정리 이후에도 라플라스의 확률론에 대한 주요한 업적으로 이항분포뿐만 아니라 일반적인 확률변수들의 합에 대하여도 정규근사가 성립한다는 중심극한정리(central limit theorem)를 발표하여 이에 대한 증명을 시도하였으며 이 연구의 본질은 푸리에(Fourier) 변환 또는 특성함수라고 부르는 함수이다. 이 정리의 명확한 증명은 1901-1902 기간에 러시아의 수학자 리아푸노프(Liapounoff)에 의해 처음 소개된 것으로 알려진다[10]. 이 정리는 독립확률변수들의 합에 대한 근사적인 확률을 계산하는 간단한 방법을 제공할 뿐만 아니라 대부분의 모집단의 경험적인 도수들이 종모양(즉, 정규)곡선 나타낸다는 주목할 만한 사실을 설명하는 중요한 정리가 되며, 중심극한정리의 가장 간단한 형태는 다음과 같다.

정리(중심극한정리). $X_1, X_2, \cdots$은 독립이며 각각 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 동일한 분포를 따르는 확률변수열이라 하자. 그러면 $-\infty<a<\infty$에 대하여 $n\to\infty$일 때 다음이 성립한다.

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le a\right)\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

다음의 예제는 중심극한정리를 이용하여 근사확률을 쉽게 구할 수 있는 간단한 예이다.

예제. 10개의 공정한 주사위를 던진다면 주사위의 눈의 합이 30과 40사이에 있을 확률을 구하여라.

풀이. X_i, $i=1,2,\cdots 10$을 i번째 주사위의 값이라 하자. $E[X_i]=7/2$, $Var(X_i)=35/12$이므로, 중심극한정리에 의하여 주사위의 눈의 합이 30과 40사이에 있을 근사확률은 다음과 같다.

$$P\left(30 \le \sum_{i=1}^{10} X_i \le 40\right) = P\left(\frac{30-35}{\sqrt{350/12}} \le \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 35}{\sqrt{350/12}} \le \frac{40-35}{\sqrt{350/12}}\right)$$
$$\approx 2\Phi(\sqrt{6/7}) - 1 \approx 0.65$$

2.3 푸아송과 대수의 법칙

푸아송(Simeon Denis Poisson, 1781~1840)은 Pithiviers에서 태어나서 17세에 파리에 나와 Polithechnic School에 입학하고 2년도 지나기 전에 두 편의 논문을 발표하는 천재성을 발휘하였다. 그는 1840년 사망할 때까지 300편 이상의 논문을 남겼다. 푸아송은 전기・자기에 관한 연구와 라플라스를 계승한 천체역학에 관한 연구에도 저명할 뿐만 아니라 논문 외에도 많은 저서가 있다. 그의 저서 "Researches on the Probability of criminal and civil verdicts"는 대수의 관측값들의 평균의 행태를 강조한 것으로 라플라스 이후 확률론에서 대저 이다. 베르누이의 정리에서 문제삼았던 확률은 하나의 불변인 값이었으나, 푸아송은 문제를 다수의 확률의 경우로 확장해서 생각하였다. 그의 저서에는 두 가지 극한정리를 포함하고 있는데 그 첫 번째 이론은 『다음의 푸아송분포(Poisson distribution)라는 확률분포이다.

$$P(X=k) = \frac{\omega^k}{k!} e^{-\omega}, \quad k=0,1,\cdots$$

그리고 이항분포에서 성공의 확률 p가 매우 작을 때 이항분포의 극한으로, 즉 $\omega = np$일 때, $\lim_{n \to \infty} P(X=k) = \frac{\omega^k}{k!} e^{-\omega}$ 라는 사실』을 유도하였다. 또, 두 번째 이론은 『어떤 사상이 n회의 독립시행 중 제1회, 제2회, 제3회,… 에서 일어날 확률을 각각, p_1, p_2, p_3, …라 하면, 그 사상이 일어날 빈도 r/n은, 임의의 양수 ε에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{r}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

그리고 시행횟수 n을 증대시키면, 그 상대빈도 r/n은 확률 p_1, p_2, p_3, … p_n의 평균값과 거의 같은 결과를 얻게된다』는 것을 밝히는 것이다[11, p. 183]. 두 번째 극한정리는 베르누이의 정리에서 원소적 확률의 문제를 평균적 확률의 문제로 발전시킨 것이며 그는 이것을 "대수의 법칙(law of large numbers)"이라 불렀다. 푸아송은 대수의 법칙에 대한 연구를 더해나가면서 논란의 여지가 되는 많은 비평들에 부딪히게 되어 이 책이 다시 출판되지는 않았던 것으로 알려진다.

3. 맺는 말

지금까지 확률론의 발달과정을 간략하게 정리하였다. 확률론의 성공은 당시 지나치게 기대되었던 것 같다. 계몽사상의 전성기인 당시에는 기계론의 영향도 있고 해서 확률론이 인간사회의 합리화에 크게 도움이 될 것이라는 환상을 갖게 하였던 것 같다. 드무아브르, 라플라스, 푸아송 등의 연구에 의하여 확률의 고전적 정의를 명확히 하고 확률론의 체계를 세우고 확률론의 중요한 극한정리인 "중심극한정리"를 유도하는 등의 고전확률론이 일단 완성되었다고 할 수 있다. 본 논문에서도 고전확률론의 태동과 발달과정을 정리하였으며 확률론에서 가장 중요한 대수의 법칙과 중심극한정리의 발달과정을 살펴보았다. 특히, 대수의 법칙과 중심극한정리는 통계학에서 관찰값에 대한 오차를 계산하는데 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있다.

참고 문헌

1. 정한영, **통계학사 개론,** 한림대학교 출판부, 1995.
2. 허명회, **통계학사 콜로키움,** 자유아카데미, 1991.
3. Dale, A.I., *A History of Inverse Probability; From Thomas Bayes to Karl Pearson,* Springer-Verlag, 1999.
4. David, H.A. and Edwards A.W.F., *Annotated Readings in the History of Statistics,* Springer-Verlag, 2001.
5. Hacking, Ian., *The Emergence of Probability,* Cambridge University Press, 1975.
6. Kendal, S.M., *Studies in the History of Statistics and Probability, Vol. II,* Charles Griffin & Co Ltd London & High Wycombe, 1977.
7. Le Cam, L., "The Central Limit Theorem around 1935," *Statistical Science,* 1-1, 1989. 78-91.
8. Maistrov, L.E., *Probability Theory,* Academic Press, 1974.
9. Pearson, S.E. and Kendal, S.M. *Studies in the History of Statistics and Probability, Vol. I,* Charles Griffin & Co Ltd London & High Wycombe, 1970.
10. Ross, S., *A First Course in Probability,* 6th ed., Prentice Hall, 2002.
11. Stigler, S.M., *The History of Statistics-The Measurement of Uncertainty before 1990,* Harvard University Press, 1986