Historia Mathematica Vol. 15, No. 2, 2002, 93-100

수학과 음악

배재대학교 전산정보수학과 **김성숙**

Abstract

Mathematics and music play very different roles in our society. However, they are closely related to each other. In the time of the ancient Greeks, they were strongly connected. This paper identifies such connection and concludes that music has mathematical characteristics.

0. 서론

음악 세계에는 음악을 구성하는 규칙들이 있다. 사람들은 자연에 내재해 있는 소리의 질서를 오랜 동안 일정하게 가공된 음의 체계로 갈고 닦아왔다. 이러한 체계는 자연의 언어인 숫자를 통해서 발전되어 왔다. 사람이 음에 대해 느끼는 아름다움은 각 음들이 갖고있는 정수비에서부터 출발한다. 여러 음들의 주파수의 비례가 정수 비례가 될 때, 사람들이 가장 편안하게 느끼는 화음으로 귀에 감지되고 특별한 아름다움을 느끼게 한다. 음악에서는 어느 옥타브에서 연주되건 같은 멜로디이다. 멜로디의 음들이 움직이는 계단적 구조가 같을 경우, 같은 조의 멜로디로 인식하게 된다. 이 것은 수학적으로 동치관계에 있기 때문이다. 숫자는 수학의 기호이며 수학은 과학과 기술의 언어이다. 역사 이래로 사람들은 과학 기술을 통해 자연계와의 공유영역을 확대해 나가며 자연의 비밀을 밝혀내어 활용해 왔다. 이 과학기술이 지닌 힘은 바로 합리와 객관의 보편성을 서술하는 논리적인 과학언어로서의 수학에 절대적 기초를 두고 있다. 이 논문에서는 수학과 음악의 관계를 살펴보고 수학이 음악에 미친 영향을 이해하는데 도움을 주고자 한다.

1. 피타고라스 음계와 현의 길이의 관계

서양음악은 고대 그리스의 수학적이고 이성적 가치관과 깊이 연관되어 있다. 피타고라스

는 수학과 음악을 연결시킨 최초의 사람이다. 피타고라스 학파 시대의 학문은 음악, 천문, 기하학, 정수론으로 이루어졌다. 이 때 학문으로서의 음악은 지금처럼 연주를 중시한 것이 아니고 수의 비율, 비례를 엄밀히 다루는 수학적 학문 분야로서 생각되어 졌다. 즉, 음악은 소리와 화음의 과학이었다. 고대 그리스의 하프(kitharas)[1]는 6줄로 만들어져 있었다. 피타고라스는[2] "가" 음[3]의 길이가 1인 현을 울려서 소리를 내고, 다음에 길이가 4/5인 현을 울려서 소리를 내면 "다" 음이 나오며, 길이가 3/4인 현을 울려서 소리를 내면 "라" 음이 나오며, 길이가 2/3인 현을 울려서 소리를 내면 "마" 음이 나오며, 길이가 3/5인 현을 울려서 소리를 내면 "바" 음이 나오며, 길이가 1/2인 현을 울려서 소리를 내면 높은 "가" 음이 나오는 것을 발견하였다. 피타고라스는 수 1, 2, 3, 4,와 5의 분수로 다섯 음을 나타낼 수 있음을 알고 매우 기뻐했다. 그는 우주에도 5개의 행성이 있으며 음과 비슷한 비례에 의하여 움직일 것이라고 생각하였다. 그는 이 발견을 통해 모든 조화, 아름다움, 자연현상을 정수의 비례에 의해 즉, 정수들의 분수인 유리수로 표현할 수 있다고 확신하였다. 그는 길이가 1인 현을 울려서 소리를 내고, 다음에 길이가 2/3인 현을 울려서 소리를 내면, 처음의 소리보다 5도 높은 소리가 나옴을 알았다. 또한 길이 1/2인 현은 원래의 소리보다 정확히 한 옥타브 높은 소리가 남을 발견하여 "다" 음의 현의 길이가 1일 때, 각 음들이 길이가 1인 현의 분수로서 나타내어 질 수 있음을 알게 되었다. 또한 피타고라스는 현의 길이가 1:2이나 2:3과 같이 정수비가 될 때, 좋은 화음이 난다는 것을 알았다. 그는 이 원리를 기초로 음계를 만들었다. 이 것이 오늘날 피타고라스 음계로 알려져 있다. 이 음계의 한 옥타브는 다섯 음으로 이루어졌으며 단조 음계였다. 피타고라스는 이 것을 위의 설명한 실험으로 증명하였는데 우리도 기타나 바이올린 줄로 쉽게 증명해 볼 수 있다. 기타의 첫 번째 줄을 개방현으로 치면 미 음이 나온다. 첫번 줄의 가운데를 누르고 치면 현의 길이가 반으로 줄어들므로 한 옥타브 높은 "미" 음이 나온다. 바이올린도 가장 가는 첫번 줄을 개방현으로 키면 "미" 음이 나오고 줄의 가운데를 누르고 키면 소리내기 힘든 한 옥타브 높은 "미" 음이 나온다. 하프는 현의 길이의 비례로 음을 정한 악기의 예이다. 우리가 현재 사용하고 있는 12음계는 한 무명의 피타고라스의 추종자가 위의 현의 비례를 다른 음에 적용하였다고 한다. 예를들면 "나" 음은 "마" 음의 현의 2/3의 길이에서 나오며 "라" 음에서 2/3을 두 번 적용하면, 즉, $2/3 \times 2/3 = 4/9$가 되고 그 음은 1/2인 "라" 음과 4/10인 "다" 음 사이에 있게 된다. 이 "나" 음을 한 옥타브 내리려면 4/9에다 2를 곱한 8/9의 길이로 하면 된다. "가" 음을 얻으려면 "나" 음 길이에 8/9의 역수인 9/8을 곱하면 된다. 이음 역시 한 옥타브 올리려면 $9/8 \times 1/2 = 9/16$을 하면 된다.

1) 이 하프는 손으로 만든 것으로 길이가 규격화되지 않았는데, "가, 다, 라, 마, 바, 가(라, 도, 레, 미, 파, 라)" 음으로 된 것이 가장 많았다
2) 피타고라스가 언제 태어나서 언제 세상을 떠났는지는 정확하게 모른다 다만 기원전 569년경-475년경이라 추측된다.
3) 영어로는 A라고 하며 일반적으로 다장조에서 "라" 음이라고도 한다.

2. 피타고라스 음계와 주파수의 관계

줄의 길이와 음높이가 반비례한다는 사실은 기원전 6세기경 피타고라스 시대에 알려졌으나, 진동수의 개념이나 음의 높이와 관련된 진동수의 비례라는 개념을 피타고라스가 파악하지는 못했다. 후대의 피타고라스 학파며 수학자인 아르키타스와 수학자이며 천문학자인 유독수스(Eudoxus of Cnidas, ca. 408-355 B.C.)가 이 관계에 대한 수량적인 이해에 도달했던 것으로 보인다[6].

줄의 길이가 반이 되면 음의 진동수가 2배로 커진다. 진동수는 현의 길이에 반비례한다. 음의 높이는 현의 길이에 반비례하고 진동수에 비례한다. 한 옥타브간격이 $1:2$의 주파수[4] 비례에 의해 표현된다. 수학적으로 표현하면, 두음이 같은 음정, 즉 한 옥타브 간격이라는 사실은 두음의 주파수 x와 y가 다음 관계에서 동치(equivalent)일 때이다.

$$x \sim y \ \Leftrightarrow\ \log_2 x = \log_2 y \pmod 1$$

우리가 보통 사용하는 주파수로 예를 들면 음계의 낮은 "도"에서 두 칸 내려간 "라" 음은 진동수가 440 Hertz이다. 즉 1초에 440번 진동한다. 한 옥타브 올라간 "라"는 880 Hertz이며, 다시 한 옥타브 올라간 "라"는 1760 Hertz이다. 즉, "라" 음이 한 옥타브 올라갈 때마다 진동수가 두 배씩 커진다. $\log_2 880 = 1 + \log_2 440$, $\log_2 1760 = 2 + \log_2 440$, $\log_2 1760 = 1 + \log_2 880$이므로 $\log_2 880 = \log_2 440 = \log_2 1760 \pmod 1$가 되어 주파수 440, 880과 1760은 동치가 된다. 피타고라스학파는 화음이 잘 이루어지는 완전5도인 도와 솔 음정 차이는 2:3의 주파수비례에 의해 만들어지는 사실을 발견하였다. 피타고라스학파는 이러한 5도 음정을 만드는 주파수비례를 계속 적용시켜서 모든 음의 주파수를 만들어 내는 조율법을 만들어 냈다. 그의 아이디어는 도의 주파수에 3/2를 곱하여 "솔"을 얻고, "솔"에 3/2를 다시 곱하여 높은 "레"를 얻은 후에 2로 나누어 기본 음계에 있는 "레"를 얻는다. 다시 3/2를 곱하면 "라"를 얻는다. 즉, 한 주파수 p가 있다면 $p \times 3/2$를 하여 이 수가 2보다 크면 2로 나누는 방법으로 기본 8음계를 완성하였다. 그러나 이 방법도 문제가 있다. 그 이유는 유리수의 비례를 적용하였기 때문이다. 이 문제를 설명하기 위하여 밑이 2인 로그함수를 도입하여 음정을 나타내어 보자. 만약 "도"의 진동수를 1이라 한다면, 로그함수에서는 $\log_2 1 = 0$이 된다. 한 옥타브 높은 도는 진동수 2가 되어 $\log_2 2 = 1$이 된다. $x = \log_2 p$일 때, $f(x) = x + \log_2 3/2 \pmod 1$로 하면 기본 8음계는 [0, 1]에 있는 수로 표현되어질 수 있다. 1과 0을 동일점으로 만들면 $f(x) = x + \log_2 3/2 \pmod 1$은 x를 $f(x)$로 보내는 원의 무리수만

4) 일초 동안에 발생한 진동수를 나타내는 것으로, 그 단위는 헤르츠 (Hz)를 사용한다. 만약 1초 동안 2회 진동하면 2Hz, 1000회를 진동하면 1000Hz(1KHz)가 된다.

큼의 회전으로 생각할 수 있다. $\log_2 3/2$ 이 무리수이므로 한 시작점 x_0가 위의 대응에 의하여 절대로 x_0로 돌아올 수 없고 x_0의 상(image)이 원주를 dense하게 채운다는 것은 잘 알려져 있다[4]. 그러므로 5도 음정의 주파수 비례로 움직인다면 첫 번째 주파수로 돌아올 수 없게 되는 것이다.

3. 순정조와 순정률

순정조(just intonation)는 3개의 주요 삼화음 "도 : 미 : 솔, 파 : 라 : 도, 솔 : 시 : 레"의 진동수의 비례가 4:5:6이 되도록 조율한 8도 음계로 이루어져 있었다. 이렇게 조율하는 것을 순정률(pure temperament)이라 하는데, 이 조율법은 기본음으로 부터 순수하게 일정한 정수비에 의해서 모든 음의 주파수를 결정하게 되어 사람들이 아주 편안하고 자연스럽게 느끼게 된다. 이 것은 중세에 쓰이기 시작하였는데 이 때에 연주되는 곡은 아카펠라나 플렛이 없는 현악기위주의 곡이 대부분 이었다. 바이올린의 전신이 되는 비올(Viol) 및 여러 가지 다양한 악기들이 서양에 도입되어 기악 합주 및 화성(Chord)에 대한 음악 기법이 발전하게 되면서 순정률이 많이 쓰이기 시작하였다. 기존의 파타고라스 음계는 완전 5도 음정에 대해서는 멋진 협화음을 들려주지만 장 3도나 장 6도등의 나머지 음정에 대해서는 완전한 정수비의 음정이 나오지 않기 때문에 기본 3화음에서도 불협화음 구성을 보이게 되었다. 결국 12개 음에 대한 완전한 정수비가 완성된 15, 16세기에 들어서면서 새로운 순정률을 요구하게 되었고 아래의 표에서와 같은 7계의 음정에 대한 진동수의 비율만으로 12개의 새로운 순정률을 만들게 되었다.

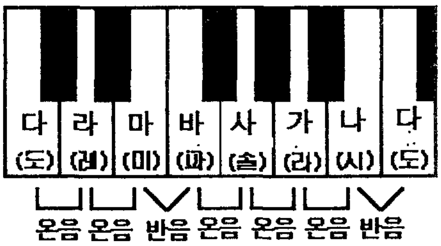
도	레	미	파	솔	라	시	도
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

위 표를 보면 "도 : 레"와 "라 : 시"는 진동수 비례로 8:9이다. 현의 길이는 진동수에 반비례하므로, 현의 길이의 비례로는 9:8이 된다. 예술의 여왕인 음악과 과학의 왕인 수학이 만난 결과가 바로 이 순정률이기 때문에 화음 구성시 가장 완벽한 화성을 들려주게 된다. 그러나 17, 18세기, 서양 음악에 온음과 반음사이의 간격이 일정함을 요구하는 합시코드, 피아노와 같은 건반악기가 합주에 사용되기 시작하고 튜닝이 고정된 관악기가 나타나기 시작하면서 순정률의 문제가 나타나기 시작하였다. 순정률은 건반악기에서 구현이 불가능하다. 조옮김할 때 변하는 주파수의 변화를 건반악기로서는 나타낼 수가 없기 때문이다. 같은 노래를 "다(도)"에서 시작해서 부르는 것과 "라(레)"에서 부르는 것은 완전히 다른 주파수를 가진 음들을 필요로 한다. 기본 베이스음이 "라(레)" 키의 경우 기본 베이스음이 "다(도)" 키

의 조율에 비해 "도"와 "레", 그리고 "미"와 "파" 사이의 온음의 진동수 비율이 서로 바뀌게 된다. 순정률에서는 기본 베이스음에서부터 일정비율로 주파수를 결정하기 때문에 기본음이 변하면 전체 음들의 주파수를 같이 바꿔 주어야 한다. 그런데 오르간, 피아노로 대표되는 건반악기는 같은 음에 같은 주파수만 사용할 수 있는 치명적인 단점을 가지고 있었기 대문에 순정률을 사용하는 것이 불가능하게 되었던 것이다. 또한 순정률은 기본 베이스음에 따라 가변적인 주파수 체계를 가지고 있기 때문에 같은 곡 안에서도 조옮김이 있을 때마다 주파수를 다시 잡아야한다. 오르간 주자였던 바흐는 이러한 문제를 평균율로 조율하여 해결할 것을 주장하였다

4. 바흐의 평균율

평균율(equal temperament)이란 한 옥타브를 12개의 반음(halftone)으로 나누어 균등 분할하는 피아노 건반상의 음체계이다. 이 경우 각 음의 간격은 동일하다. 음이 12반음이 올라가면 한 옥타브가 되어 진동수가 두 배가 되므로 한 음에서 반음 올라가면 올라간 음의 진동수는 본래 음의 진동수의 $\sqrt[12]{2}$ 배가 된다. $\sqrt[12]{2}$은 분모와 분자가 정수인 분수, 즉 유리수로 나타낼 수 없는 무리수이다. 무리수가 널리 사용되기 전에, 조율의 최소 단위를 분수로 나타내려고 했던 많은 학자들이 그 수를 찾으려고 했지만 성공할 수 없었다. 그러나 무리수를 이 비율에 적용함으로 해결된 것이다. 평균율의 음은 도, 도#, 레, 레# , 미, 파, 파#, 솔, 솔#, 라 라#, 시로 구성되어있다. 음계의 낮은 "도"에서 두 칸 내려간 "라" 음은 진동수가 440hertz이고 낮은 "도"는 기준이 되는 "라" 음과 세 개의 반음의 차이가 나므로 진동수는 $440 \times 3 \times \sqrt[12]{2}$으로 약 523이 된다. 이 진동수들은 등비수열을 이룬다.



바흐(1685-1750) 이전에도 평균율의 이론적인 바탕은 마련되어 있었으나 작곡에 처음으로 적용한 사람은 바흐였다. 오르간 주자였던 바흐는 1722년에 평균율 클라비어곡집 제 1권의 작곡을 통하여 모든 조로 음악을 만들 수 있음을 보여 평균율이 갖고 있는 장점을 보여주었다. 바하의 곡들을 보면 한마디에서도 여러 번 조옮김이 나오는데, 이런 조옮김을 통하여 바

흐는 평균율의 대중화에 결정적인 역할을 하게 되었다. 평균율은 순정률에서의 완벽한 화성 구조를 어느 정도는 희생하지만 조율이 고정된 악기들과의 합주를 가능하게 했고 또한, 조옮김이라는 전혀 새로운 작곡 기법을 가능하게 하는 절충안이 되게 하였다.

5. 엘리스의 센트

엘리스(A. J. Ellis)가 로그함수를 사용하여 싸이클릭 센트(Cyclic Cents)라는 단위를 고안함으로서 음정의 단위를 진동수의 정수 비에서 일정한 간격의 대수적인 수로 바꾸어 새로운 단위를 만든 것이 엘리스의 센트 단위이다. 8/9와 9/20의 두 음정이 합하면 두 음정의 비례를 곱하여(8/9×9/10) 4/5라는 장3도의 음정을 찾을 수 있다. $a\times b=c$의 형식을 로그함수의 성질 $\log(a\times b)=\log a+\log b$를 사용하여 A+B=C의 형식으로 바꾸어 새로운 단위를 만든 것이다. $\log(a\times b)=\log a+\log b$이므로 우리가 모든 음정 비례를 log로 바꾸면, 이들 단위를 곱하고 나누는 것 대신 더하고 뺄 수 있게 된다. 음정의 최대 단위인 옥타브, 즉 2의 log 값인 log2=0.3010을 1200으로 놓고 센트의 단위를 정하였다. 한 옥타브를 1200센트로 하고 반음은 100센트 온음은 200센트 등으로 분수가 나오지 않아 아주 편리하다. 평균율은 반음을 100, 온음을 200센트로 했기 때문에 현악기와 건반악기 또는 관악기와의 협주시 조옮김이 발생하더라도 아무런 문제가 발생하지 않는다[6].

6. 힐베르트와 쇤베르크

유클리드의 공리와 공준은 현실 속에서 곧바로 실증될 수 있는 자명한 명제이며 객관적인 실체였다. 힐베르트가 의도한 것은 자연 속에서 수학을 찾는 것이 아니라 사람의 사고의 세계에서 인위적으로 수학을 구성하는 일이었다. 즉, 사람의 머리로 스스로 짜내는 구성적인 수학이었다. 수학이 자연을 모델로 삼는 것이 아니라 역으로 자연의 모델을 수학이 앞질러 제공한 것이었다. 그러므로 힐베르트의 관심은 무엇을 하는가? 가 아니라 어떻게 하는가? 에 관심이 쏠리게 되었으며 그 대상은 요소로부터 관계로 바뀌어 졌다. 칸토르의 집합론과 프랑스 부르바키학파의 구조에 대한 인식과 더불어 힐베르트의 이러한 새로운 수학적 접근은 현대음악의 상황과 매우 유사한 시각을 이루고 있다. 절대음악의 찬란한 꽃을 피웠던 장, 단조의 조성체계가 낭만시대를 거치면서 서서히 변화와 소용돌이 속에 무너져 내렸다. 프랑스의 드뷔시(1862-1918)에 의한 온음계적 불확정 조성의 확대와 독일의 바그너(1814-1883)에 의한 반음계적 진행의 추궁의 결과로 새로운 내적 질서의 에너지는 그 어느 때보다 팽창해 있었다. 그것의 도화선은 힐베르트가 그의 저서 기하학 기초론에서 새로운 수학의 형식을 제공했던 1899년으로부터 약 20년 뒤인 1920년대에 독일의 작곡가 쇤베르크(1874-1951)

에 의해서 거세게 불이 당겨졌다. 현대수학과 마찬가지로 음악은 자연을 모델로 삼는 것이 아니라 자연의 어떤 모델을 음악이 앞질러 제공하는 것이다. 이제 음악창작의 속성을 더욱 수학적인 토대를 가지고 접근하도록 유도한다. 그야말로 진정한 새로움의 음악창작에 있어서 악곡의 형식과 구조를 결정짓는 재료의 배열은 종전의 작곡형태와는 전혀 다른 엄청난 지적에너지를 요구하게 되었다[7].

7. 음악 작품에서 황금비

황금비의 정확한 정의는 $\phi/1=(1+\phi)/\phi$가 되는 수 ϕ이다. 황금비로 불리는 이유는 비율로 정의되기 때문이다. ϕ를 구하기 위하여 $\phi^2=1+\phi$를 근의 공식을 사용하여 풀면 $\phi=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$가 나오며 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618033989\cdots$가 된다. 작곡가 바르토크는 20세기 최고의 관현악 작품의 하나로 꼽히는 그의 "현악기, 타악기, 첼리스트를 위한 음악"에서 황금비를 교묘하게 사용하고 있다. 이 곡 첫 악장은 89 마디로 구성되어 있는데 마치 산을 올라갔다가 내려오듯이 처음에는 피아니시모부터 시작해 점점 강해져 55번째 마디에서 포르테시모로 클라이맥스를 이루고 다시 피아니시모로 줄어드는 구조이다. 89마디중 55번째 마디는 황금비를 이루는 부분이다. 55마디 앞부분은 34와 21마디 두 부분으로 나뉘고, 34마디는 다시 21과 13마디로 나뉜다. 뒷부분의 34마디도 13과 21마디로 나뉘어 황금비를 그대로 적용됐다. 유명한 헨델의 "할렐루야"도 94마디로 구성되어 있는 데, 황금비인 57, 58번째 마디에서 포르테시모로 클라이맥스를 이루고 다시 피아니시모로 줄어드는 구조이다. 위대한 작곡가들은 자신이 좋아하는 수를 작품에 반영하거나 미적 균형을 유지하기 위해 치밀한 황금비와 같은 수학적 지식을 동원하고 있음을 알 수 있다[5].

8. 결론

음계의 발달은 수학의 발달과 밀접한 관계가 있고 음악이론, 특히 화성학이나 대위법이론을 보면 수학적 사고가 많이 나온다. 수학과 음악이 밀접한 관계를 갖고 있다는 것을 처음 밝힌 사람은 수학자 피타고라스다. 피타고라스 학파에게는 수가 종교적인 의미가 있었다. '모든 것의 근원은 수이다.'라는 피타고라스 학파의 신조는 음악에 지대한 영향을 미쳤다. 악기가 내는 소리의 진동수의 비율과 그 비율이 음높이의 차이에 의하여 순서대로 나타날 때 음계와 선율의 아름다움이 나타나며, 이런 수의 질서가 천체의 운행이나 인생의 질서를 유지한다고 보았다. 피타고라스 학교의 수학의 교과과정은 4과목으로 이루어졌는데 산술, 음악, 기하학, 천문학이었다. 이 때의 음악이란 연주가 아니라 "소리와 화음의 과학"을 수학에 기초하여 공부하는 것이었다. 피타고라스 학파는 비율에 근거한 미학의 개념을 발전시켰다.

피타고라스는 수 1, 2, 3, 4, 5의 분수로 음을 나타낼 수 있음을 알고 매우 기뻐했다. 그는 이 발견을 통해 모든 조화, 아름다움, 자연현상을 정수의 비례, 즉, 정수들의 분수인 유리수로 표현 할 수 있다고 확신하였다. 그러나 그가 발견한 피타고라스의 정리에 의해 한 변이 1인 이등변 삼각형의 빗변의 길이인 $\sqrt{2}$를 정수로 표현하려고 노력하지만 실패하게 되고 곧, 무리수를 인정하게 되지만 이를 비밀로 하여 사용은 금지한다. 그러나 모든 것이 정수의 비례 따른다는 피타고라스 학파의 철학에 위배되었기에 피타고라스 학파는 혼란에 빠지게 되었다. 그 후 중세를 지나며 종교적인 이유로 무리수의 사용이 널리 퍼지지 못한다. 무리수가 널리 사용되고야 평균율의 이론이 나오기 시작한다. 수학과 음악이 아무 관계가 없는 학문 같지만, 사실 수학의 발전에 따라 음악도 발전해 왔음을 알 수 있다. 현대에는 건반형 신서사이저들이 나와 인토네이션(intonation)을 변경할 수 있게 되어 평균율의 단점을 보안해주고 있다. 현대수학처럼 음악도 자연을 모델로 삼는 것이 아니라 자연의 어떤 모델을 음악이 앞질러 제공하므로 현대는 음악창작을 위하여 더욱 수학적인 토대가 필요하다고 생각된다.

참고 문헌

1. 서우석, **서양 음악의 이해 강의록** (http://usoc.snu.ac.kr/lecture/lecture.htm)
2. *Concise History of Music*, Gerald Abraham, London, 1979.
3. Michael Beer, "How do mathematics and music relate to each other."
4. Rachel W. Hall, Kresimir Josic, "The mathematics of musical instruments."
5. http://dugil.netian.com/storymain.htm
6. http://usoc.snu.ac.kr/lecture/lecture.htm
7. http://www.kamin.co.kr/menu3_index.htm
8. http://www.ouimoi.com/mt/muphena2.htm