Historia Mathematica Vol. 15, No. 2, 2002, 49-68

대수적 사고의 기원에 관한 고찰*

서울대학교 대학원 수학교육과 **김성준**

Abstract

One of the characteristics of modern mathematics is to use algebra in every fields of mathematics. But we don't have the exact definition of algebra, and we can't clearly define algebraic thinking. In order to solve this problem, this paper investigate the history of algebra. First, we describe some of the features of proportional Babylonian thinking by analysing some problems. In chapter 4, we consider Greek's analytical method and proportional theory. And in chapter 5, we deal with Diophantus' algebraic method by giving an overview of *Arithmetica*. Finally we investigate Viète's thinking of algebra through his 'the analytical art'. By investigating these history of algebra, we reach the following conclusions.

1. The origin of algebra comes from problem solving(various equations).

2. The origin of algebraic thinking is the proportional thinking and the analytical thinking.

3. The thing that plays an important role in transition from arithmetical thinking to algebraic thinking is Babylonian 'the false value' idea and Diophantus' 'arithmos' concept.

0. 서론

현대수학의 두드러진 특징 가운데 하나는 수학의 대수화, 곧 대수적 방법에 의한 수학의 연구라고 할 수 있다. 그러나 여기서 문제가 되는 것은 대수란 무엇인가 하는 것이다[2]. 이 문제는 대수가 단순한 암기 대상도 아니며 일반화된 산술로 유추해서 해석할 수 있는 공식들의 집합도 아니기 때문에 발생한다. 오히려 대수는 수학적 사고를 위한 기초로 보아야 하며, 이러한 관점에서 '대수적 사고란 무엇인가' 하는 문제는 자연스럽게 제기된다. 대수적 사고는 대수의 다양한 특징 중 어느 한 가지 측면을 강조하면서 정의되는 것이 일반적이다.

* 이 논문은 2000-2001년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구 과제 지원에 의하여 연구되었음.

예를 들어, 대수의 추상적인 측면을 강조한다면 대수적 사고는 미지의 양을 추상화하여 조작하는 능력으로 정의되며, 이런 경우 산술적 사고는 알려진 기지의 양으로부터 시작되는 조작으로 자연스럽게 대비된다. 만약 함수를 통해 대수적 사고를 정의한다면 대수적 사고는 변수간의 관계가 드러나도록 양적 상황을 표현하거나 또는 패턴을 파악하는 능력으로 정의된다. 따라서 대수적 사고의 정의 역시 대수에서 강조되는 관점에 따라, 학자에 따라, 그리고 수학에서 요구하는 수준에 따라 다양하게 정의된다.

따라서 대수와 대수적 사고를 보다 분명하게 정의하기 위해서 '대수적 사고의 핵심적인 요소는 무엇인가' 하는 물음은 우선 답변되어야 할 과제가 된다. 이 글은 대수의 역사 분석을 통해 이러한 답변을 대신하고자 한다. 이것은 대수의 역사가 대수 개념의 복잡성과 대수 개념이 구성되는 동안에 일어났던 비약적 발전을 분명하게 보여 주며, 그 과정에서 핵심적인 역할을 한 대수적 사고의 면면을 파악하는데 기본 배경이 되기 때문이다. 대수는 수학의 발생과 함께 시작되었다고 할 수 있다. 대수의 역사적인 전통은 방정식을 만들고 푸는 과정에서 비롯되었으며, 양과 수와 사칙연산을 다루면서 그 해를 구하는 보다 복잡한 문제로 전개되었다. 이 글은 대수의 시작을 바빌로니아 대수학으로 보고 있다. 그리고 바빌로니아 대수학에서 사용된 '가정법'(the false position method)을 분석함으로써, 대수적 사고의 기원을 비례적 사고와 분석적 사고에서 찾으려고 한다. 이러한 비례와 분석에 대한 아이디어는 그리스의 기하학에서 이론화되어 체계적으로 사용되었으며, 비례론의 경우 유클리드(Euclid) 원론에서 그리고 분석법의 경우 파포스(Pappus)에게서 이러한 사고를 찾아볼 수 있다. 그리고 대수학으로서 바빌로니아의 계산 방법은 디오판토스(Diophantus)의 산학(Arithmetica)에서 추상화되어 계승된다. 마지막으로 비에트(Viète)의 '분석적 기술'(the Analytical Art)의 도입에 이르러서는 디오판토스의 미지수 개념이 보다 형식화되어 제시된다. 이 과정에서 비에트 역시 그의 분석적 기술에서 바빌로니아의 대수학에서부터 시작된 방정식과 비례에 대한 아이디어를 핵심적인 내용으로 다루고 있다.

1. 대수방정식과 대수적 사고

대수에 접근하는 방식은 다양하다. 즉 일반성, 문제해결, 모델링, 함수 등 다양한 관점에서 대수를 생각해 볼 수 있다[4]. 이 가운데 문제해결 측면은 대수를 시작하는 보편적인 관점으로, 대수의 역사가 방정식에서 시작되었다는 점과 학교 대수의 목표 역시 방정식 등의 문제풀이에 초점을 두고 있다는 점에서 대수적 사고를 고려하는데 그 중심에 놓여 있다.

이러한 맥락에서 카츠(Katz)는 방정식이 학교 대수에서 가장 중심에 놓여 있음을 강조한다([8, p. 13], 재인용). 그에 따르면, 대수는 방정식의 풀이를 다루고, 그리고 이러한 목적을 위해 필요한 기호, 곧 수와 문자를 다루는 데 필요한 기호를 조작함으로써 학교 수학에서 의미를 가지게 된다고 하였다. 카츠의 말은 현재 학교에서 지도되는 대수의 내용 측면과 정

확하게 부합한다. 학생들은 학교 수학에서 대수의 의미를 대수식과 방정식의 조작으로 보통 받아들이고 있으며, 이 과정에서 가장 어려운 것은 문자와 같은 다양한 기호 조작 규칙의 학습이다. 다시 말해, 학교 대수의 일반적인 지도 과정은 변수의 도입과 대수식의 구문론적 조작, 그리고 방정식의 풀이로 전개되며, 방정식의 학습은 학교 대수에 있어서 최종적인 단계에 놓여 있다고 할 수 있다. 그러나 대수의 역사를 살펴보면 학교 대수와는 다른 출발점에서부터 전개된다.

먼저 대수(algebra)의 어원에서 알 수 있듯이, 대수는 이항을 뜻하는 'al-jabr'와 동류항을 정리한다는 의미의 'al-muqabala'라는 뜻이며, 이는 대수가 방정식을 포함한 계산 이론을 의미하는 데서 기인했다는 사실을 보여주는 것이다. 수학의 발생과 함께 시작한 대수의 역사에서 무엇보다 중요한 것은 다양한 방정식의 해를 구하는 과정이었으며 이것은 학교 대수 과정에서 마지막에 등장하는 것과는 대조적이다. 그리고 역사적 문헌에서 보여주는 문제 해결 과정은 반드시 문자를 통해 표현되지는 않았지만 일련의 조작을 통해 이루어졌으며, 학교 대수에서 처음 등장하는 문자의 경우 역사에서는 방정식과 그 조작 이후에 등장한다. 역사에서 문자를 통한 방정식의 풀이 과정은 디오판토스의 산학을 통해서 비로소 등장한다. 그리고 이후 진행된 기호주의의 발달로 인해 일반적인 계산법칙을 표현할 수 있게 되었으며, 그 결과 산술적 사고와 같은 절차적인 관점으로부터 구조적인 관점으로의 전환을 가능하게 하였다.

이 글은 앞서 밝힌 것처럼 대수의 기원을 역사적 전개에서 가장 먼저 등장하는 방정식과 관련된 문제해결과정에서 찾아보았다. 따라서 이러한 입장에서 대수적 사고를 논의한다면, 방정식의 풀이와 관련해서 그 풀이 과정의 바탕에 놓여있는 핵심적인 아이디어를 분석할 필요가 있게 된다. 이와 관련해서 데카르트(Descartes)가 기하학(La Geometric)에서 제시한 다음의 글은 이러한 분석에 중요한 시사점을 제공한다([5, p. 15], 재인용).

> 어떤 문제를 풀고자 할 때 우리는 먼저 해를 이미 구한 것으로 가정하고 그것을 작도하는데 필요한 모든 직선-알고 있는 것뿐만 아니라 미지의 것에도-에 이름을 부여한다. 알고 있는 직선과 미지의 직선을 구별하지 않음에도 불구하고, 이 직선들 사이의 관계를 가장 자연스럽게 보여주는 방법 안에서 이 어려움을 해결해야만 하고, 결국 우리는 하나의 양을 두 가지 방법으로 표현하는 것이 가능하다는 것을 발견하게 된다. 이러한 두 가지 표현 중의 하나의 항이 다른 하나의 항과 같다고 나타냄으로써 이러한 과정은 방정식을 이루게 된다.

위의 글에서 우리는 대수적 사고의 발달에서 중요한 역할을 하는 몇 가지 요소들을 찾아볼 수 있다. 즉, 데카르트의 주장에서 대수적 사고의 발달은 분석적 사고, 측도론, 비례론, 그리고 동질적인 이론 체계를 추구하려는 노력에 의해 형성되었다는 사실을 이끌어 낼 수 있다. 특히 그는 "먼저 문제의 해를 구한 것으로 가정한다"는 부분에서 분석적 사고를 강조하고 있으며, 그리고 "직선들 사이의 관계를 가장 자연스럽게 보여주는 방법"에서 서로 다른 두 가지 형태 사이의 관계를 만든다고 할 때, 이것은 비례론 곧 비례적 사고를 그 중심

에 놓고 강조한 것으로 볼 수 있다.

이러한 맥락에서 이 글은 다음의 두 가지를 주목적으로 한다.

먼저 바빌로니아의 대수학, 그리스의 기하학, 디오판토스의 산학에 나타난 대수적 방법, 비에트의 분석법에서 다루고 있는 분석 유형들에 관하여 살펴보고, 데카르트가 대수적 사고의 핵심으로 강조한 분석적 사고와 비례적 사고가 대수방정식의 역사적 전개에서 어떤 형태로 표현되는지를 살펴볼 것이다. 그리고 대수의 역사적 전개에서 여러 차례의 비약이 있었음에도 불구하고 이러한 대수적 사고가 계속될 수 있었다는 사실로부터 이 두 가지 사고를 대수적 사고의 핵심으로 볼 수 있음을 주장하였다. 다음으로 역사에서 등장한 다양한 방정식 문제의 풀이 과정에서 미지수 개념의 발달이 어떻게 전개되는지를 살펴보고, 이러한 기호 개념의 발달이 산술적 사고로부터 대수적 사고로 전환되는 시점에서 어떤 역할을 하는지를 살펴보고자 한다.

2. 바빌로니아 대수학의 수치적 경향과 기하학적 경향

산술적 사고에서 대수적 사고로의 이행에서 그 출발점은 고대 바빌로니아 대수학에 있다. 문헌에서 드러난 바빌로니아 대수학은 크게 수치적 경향의 대수학과 기하학적 경향의 대수학으로 나뉠 수 있다. 먼저 '비실제적인'[1](non-practical) 방정식 문제를 푸는 일련의 방법을 통해 전개된 수치적 경향의 대수를 생각해보자. 바빌로니아 대수학에서 방정식 풀이 과정은 주로 '소거법'(the elimination method)과 '가정법'(the false position method)에 의해 이루어졌다. 이 중 '가정법'은 대수의 발달과 관련해서 두 가지 중요한 역할을 담당한다. 우선 대수적 사고 측면에서 '가정법'은 비례적 사고와 분석법을 토대로 하고 있으며, 이 아이디어는 이후 대수적 사고의 흐름에서 계속 이어진다. 또한 대수 기호 측면에서 '가정법'의 '임시해'(the false solution)는 엄밀한 의미에서 기호라고 볼 수는 없지만 반면 대수 역사에서 처음으로 등장하는 미지수 개념으로 생각할 수도 있다. 다음으로 기하학적 경향의 대수의 경우 '자르고 붙이는 기하학'(cut-and-paste geometry)을 통해서 대수적 사고의 모습을 찾아볼 수 있다. 자르고 붙이는 기하 문제는 주로 이차방정식의 풀이를 다루고 있는데, 이러한 과정은 그리스 기하에서 강조하는 방법론적 측면과는 다르게 전개되었지만, 그 사고 측면에서 보면 그리스 기하에서 핵심적인 역할을 하는 분석적 사고가 이미 내재되어 있음을 확인할 수 있다. 곧 기하학적 경향의 대수에서도 수치적 경향의 대수처럼 비례적 사고와 분석법은 문제해결 과정에서 핵심적인 역할을 하고 있는 것이다.

1) 여기서 비실제적인 문제란 일상 생활의 구체적인 기호적 경험을 통해 형성되었지만, 실제적인 필요와는 직접적인 관계가 없는 문제를 의미한다[9].

(1) 수치적 경향의 대수학

'실제적인' 문제와 '비실제적인' 문제는 바빌로니아 수학에서 관찰되는 가장 중요한 두 개의 수학적 흐름 곧 기하학적인 대수학과 수치적인 대수학 속에서 각각 찾아볼 수 있다. 전자의 경우 도형의 면적과 둘레 길이에 대한 계산을 다루는 문제로 표현되며, 수치적인 문제는 종종 실제적인 상황과는 상관없는 문맥적 수를 다루는 상황에서 발견된다. 이 두 가지 문제는 종종 비례적 사고를 사용하여 해결되었으며, 비례적 사고는 사실상 바빌로니아에서 수학적 사고로 개발된 가장 중요한 측면 중의 하나였다.

특히 '비실제적인' 방정식 문제의 경우 그 풀이 과정은 산술적인 것으로, 기하학적인 논의의 대상으로 볼 수는 없다. 수치적인 경향의 대수학에서 방정식 문제 풀이는 바빌로니아의 산술적 사고에서 가장 위대한 성취물로 보이는 '가정법'(the false position method)이라는 산술적 방법에 의해 다루어진다. 이 방법은 구하려는 양에 대해 적당한 '임시값'(false value)을 가정한 다음 비례적 방법으로 그 값을 '참값'(true value)으로 바꾸는 것이다. 이 과정에서 중요한 역할을 하는 것은 '비례적 조정 요소'(proportional adjusting factor)이며 이 요소를 통해 '임시값'은 '참값'으로 의미를 갖게 된다.

이러한 '가정법'을 통해 해결된 '비실제적인' 문제와 그 풀이 과정을 소개하면 다음과 같다 [9]. 이 풀이 과정은 '가정법'에서 '임시값'과 '비례적 조정 요소'가 실제로 어떻게 사용되는지를 보여주고 있으며, 이 과정에서 비례적 사고가 어떤 식으로 역할하는지를 보여주는 것이다. 또한 풀이과정의 출발점에서 '참값'을 '임시값'을 통해 가정한 것은, '임시값'을 미지수의 기원으로 생각하게 하며 따라서 이것은 분석적 사고의 출발점이 될 것이다.

문제

직사각형의 가로는 세로에서 1/4을 뺀 것과 같으며, 대각선은 40′이다. 이때 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구하여라.2)

풀이 과정

세로로 '임시값' 1°를 집어넣어라. 그 다음 1°에서 $\frac{1}{4}$(즉 15′)를 빼서 가로를 계산하면 45′가 나온다. 임시적인 두 변의 값을 제곱해서 계산하면 $(1°)^2=1°$, $(45')^2=2025''=33'45''$이 나온다. 그 제곱의 합은 1°33′45″이다. 1°33′45″의 제곱근을 취하면 1°15′이다. 이것은 대각선의 임시값이다. 대각선의 참값은 40′으로 얻어진 값보다 작다. 그 다음 임시값 1°15′의 역수를 계산하면 48′가 나오고 여기에 참값 40′을 곱한다. 그 결과는 32′가 나오는데 이것이 '비례적 조정 요소'이다. 그러면 $32'\times 1°=32'$과 $32'\times 45'=24'$을 얻게 되고, 32′과 24′은 각각 세로와 가로의 참값이다.

2) 바빌로니아 수학은 기수법으로 60진법을 사용하였다. 이 글에서는 이러한 60진법을 대신해서 도(°), 분(′), 초(″)를 사용해서 문제와 풀이 과정을 기술하였다.

현대적인 풀이 과정

문제는 대각선이 d로 주어진 직사각형의 세로 x와 가로 $y\left(=\frac{3}{4}x\right)$를 찾는 것이다. $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\frac{3}{4}x)^2}=\frac{5}{4}x$ 인 관계에서 $x=\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}\cdot d$임을 연역할 수 있다. 또한 세로의 임시값 x_0을 실제적으로 가정하고 이것에서 가로의 임시값 $y_0=x_0-\frac{1}{4}x_0=\frac{3}{4}x_0$이 나온다. 따라서 $d_0=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{3}{4}x_0\right)^2}=\frac{5}{4}x_0=\frac{5}{4}$ ($x_0=1$이므로)임을 이용하여 대각선의 임시값을 계산한다. 이 과정의 기초가 되는 비례적 논의는 $d_0=\frac{5}{4}$의 역수를 계산하고 이 역수에 주어진 대각선 $d=40$을 곱하는 것이다. 이 값 $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}\cdot 40$ 이 비례적 조정 요소이다.[3] 따라서 직사각형의 세로와 가로는 각각의 임시값에 이 값을 곱해서 구할 수 있다.

이처럼 대수적 사고의 발달에 있어서 '가정법'은 이후 대수적 사고와의 중요한 구조적 유사성을 띠고 있다. Thureau-Dangin은 바빌로니아의 '가정법'과 대수 사이의 연관성을 연구하는 과정에서 '가정법'으로 해결되는 몇 가지 문제에서 그 계산 과정과 현대 대수적 방법에 의한 계산 과정 사이에는 어떤 대응 관계가 존재한다는 사실에 주목하였다([9, p. 16], 재인용). 그는 미지수에 대한 추측에서부터 바빌로니아의 계산 과정을 실제 대수적 과정과 동일한 것으로 보았다. 앞서 제시한 문제의 풀이 과정에서 임시값으로 취한 '1'은 현대적인 의미에서 해석하면 미지수 'x'로 치환될 수 있는 것으로 그럴 경우 현대적인 풀이 과정과 매우 흡사하다는 것이다. 그는 특정한 값을 선택하여 수치적 문제 풀이 방법을 조직하는데 임시값을 사용한 것은, 바빌로니아 수학에서 비례적 사고의 개념적 성장에 있어서 중요한 역할을 한 것으로 보았다.

그러나 실제 미지수에 대한 대수적 사고는 이처럼 어떤 특정한 값을 중요하게 해석하는 것보다 '가정법'에서 사용되는 '임시값' 자체에 대한 아이디어에서 찾아보아야 할 것이다. 왜냐하면 오늘날 대수적 사고는 '가정법'의 출발점이 되는 특정한 값을 가정하는 대신, 구하려는 대상 자체로 사고하면서 그 진전이 이루어졌기 때문이다. 대상이 미지이든 아니든, 대상을 하나의 수로 받아들이기 시작한 것은 특정한 값이 아닌 '임시값' 자체에 대한 아이디어에서 출발했다고 볼 수 있다. 따라서 위에서 제시한 문제의 현대적 풀이과정 역시 대상 곧 미지의 정확한 양에 대한 추론과정으로 보아야 할 것이다. 이처럼 바빌로니아의 수치적 경향의 대수에서 '가정법'의 아이디어는 분석적 사고와 비례적 사고를 기본적으로 가정하고 있으며, '임시값'은 미지수의 원시적인 형태로 나타나고 있다.

3) 비례식으로 이 문제를 표현하면, (세로의 임시값):(대각선의 임시값)=(세로의 참값):(대각선의 참값)이 되고, 따라서 $1:\frac{5}{4}=x:40$에서 x를 구할 수 있다.

(2) 기하학적 경향의 대수학

고대 바빌로니아 대수학에는 수치적인 계산 문제 곧 산술적인 것만 존재한 것은 아니었다. 여기서 산술적이라는 것은 앞서 논의했듯이 수 연산을 조직화해서 '임시값'을 '참값'으로 바꾸어 나가는 것을 말한다. 그러나 바빌로니아 대수학에는 이러한 산술적인 측면 대신 비연역적 기하학의 기초 위에서 조직된 문제들이 존재한다. 이러한 기하학은 '자르고 붙이는 기하학'(cut-and-paste geometry)으로 불리며, 바빌로니아의 많은 문제들은 이러한 방법을 통해 해결되었다. '자르고 붙이는 기하학'은 분명 그리스의 기하학에서 강조하는 연역적인 구성과는 차이를 보인다. 또한 방정식 문제를 기하학적인 문맥 안에서 형성하고 해결했다는 면에서 앞서 살펴본 수치적 경향과도 분명한 차이를 보인다. 특히 이러한 기하학적 경향의 대수학은 이차방정식과 관련된 문제에서 자주 찾아볼 수 있다. 다음에서 제시한 문제와 그 풀이과정은 기하학적 경향에서 비롯된 바빌로니아 대수학의 또 다른 면이며, 이 과정에서 비례와 분석에 대한 아이디어는 기본적으로 가정되어 있다[9].

문제

정사각형의 넓이와 변의 합은 3/4이다. 이때 정사각형의 변의 길이를 구하여라.[4)]

풀이 과정

먼저 정사각형의 한 변에 가로의 길이가 1이 되는 직사각형을 붙인다(그림 1).

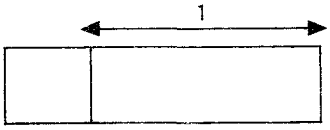

그림 1

그 직사각형을 한 변의 길이가 1/2이 되는 두 개의 직사각형으로 자른 다음 오른쪽의 직사각형을 아래쪽으로 옮긴다(그림 2).

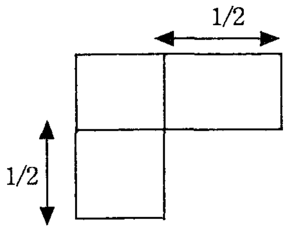

그림 2

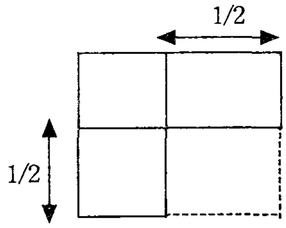

그림 3

4) 이 문제를 현대적인 방정식으로 표기하면 $x^2+x=\frac{3}{4}$ 이다.

이제 한 변의 길이가 1/2인 작은 정사각형을 붙임으로서 큰 정사각형을 완성한다(그림 3). 전체 넓이는 3/4 더하기 1/4이다. 그 결과 1이 된다. 큰 정사각형의 한 변의 길이는 1이 되고 처음 구하고자 했던 정사각형의 변의 길이는 1 빼기 1/2을 함으로써 1/2이 됨을 알 수 있다.

기하학적 경향의 대수에서도 수치적 경향의 대수처럼 비례적 사고와 분석적 사고는 핵심적인 아이디어로 등장한다. 수치적 경향의 대수에서 '임시값'으로 1을 가정한 것처럼 기하학적 대수에서도 정사각형이 해결과정에서 먼저 주어진다. 이것은 오늘날 방정식의 풀이에서 구하려는 값을 먼저 x로 가정하는 것과 같으며, 이러한 가정은 문제가 먼저 해결된 것으로 가정하는 분석법의 전형적인 모습으로 볼 수 있다. 기하학적 경향의 대수에서 비례적 사고를 찾아볼 수 있는 문제는 다음과 같다[9].

문제

정사각형에서 그 넓이의 $\frac{2}{3}$에 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$을 더해서 넓이가 20인 정사각형을 만든다고 할 때, 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라[5].

풀이 과정

먼저 본래의 정사각형에서 $\frac{1}{3}$을 제거하고(그림 1), 폭이 1인 직사각형을 그 위로 포개어 놓으면 그림 2와 같은 도형을 얻을 수 있으며, 사영된 것의 $\frac{1}{3}$이 보존된 것이 그림 3과 같이 나타난다.

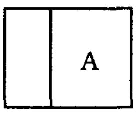

그림 1

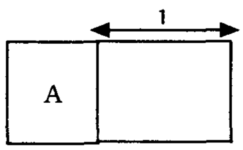

그림 2

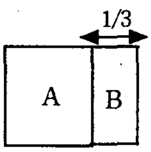

그림 3

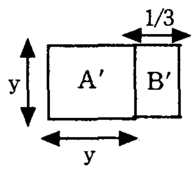

그림 4

마지막으로, 그림 3에서처럼 직사각형을 붙여서 넓이가 20인 사각형을 얻었다고 했을 때, A 넓이에서 주어진 가로와 같은 세로의 길이를 정해 그림4의 A′라는 정사각형을 만들 수 있고, 같은 비율로 1/3에 해당하는 B 부분도 잘라내어 B′로 만들 수 있다.

이 과정은 자르고 붙이는 기하학에서 비례적인 사고가 어떻게 사용되고 있는지를 보여준

---

5) 이 문제를 현대적인 방정식으로 표기하면 다음과 같다: $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x=20$.

다. 그림 4에서 정사각형 A'의 한 변의 길이 y는 앞서 보았던 문제와 같은 방법으로 구할 수 있다. 이 문제는 처음 정사각형의 길이를 구하는 문제이다. 이 과정에서 문제는 비례적 사고를 필요로 한다. 즉 그림 1에서 주어진 정사각형의 한 변의 길이를 x라고 하고, 그림 4에서 구하려고 하는 정사각형의 한 변의 길이를 y라고 하면 이 둘 사이에는 $x:y=3:2$라는 비례 관계가 존재한다.6) 이처럼 처음 주어진 정사각형의 길이는 풀이과정에서 만들어진 정사각형과의 관계를 통해 비례적인 사고가 가능할 때 그 답을 찾을 수 있도록 되어 있다.

그러나 기하학적 경향의 대수는 그 절차 면에서 수치적 대수에 비해 매우 특별한 방법으로 기지와 미지의 양들을 다루고 있다. 먼저 기하학적 경향의 대수에서 의미론은 문제 풀이 절차를 통하여 강력한 역할을 한다. 이에 비해 비례적인 사고에 근거한 수치적 경향의 대수에서는 본래의 의미론은 일단 방정식에 도달하면 상실된다. 두 번째, 수치적 경향의 대수에서 미지수는 계산에 직접 포함되어 있다. 그러나 기하학적 경향의 대수는 직접적인 계산에 미지수를 포함하지 않는다. 이러한 두 가지 측면에서 기하학적 경향의 대수는 수치적 경향의 대수와는 다른 개념화가 그 내면에 놓여 있음을 알 수 있다. 따라서 기하학적 경향의 대수학은 수치적 경향의 대수학에 비해 대수적 사고와의 관련성을 찾는 과정에서 어려움을 안고 있다. 이것은 그리스의 연역적 기하학의 논리 가운데에서 대수적인 아이디어가 부각되지 못한 것과 같은 맥락에서 이해될 수 있는 부분이다.

그러나 위에서 살펴본 두 가지 예는 수치적 경향의 대수처럼 분석적 사고와 비례적 사고가 문제 해결과정에서 결정적인 역할을 하고 있음을 보여준다. 그리고 이러한 아이디어는 그리스 기하의 분석법과 비례론을 거치면서 보다 체계적인 이론으로 정립된다.

3. 그리스 기하와 대수와의 연결

(1) 에우독소스의 비례론

에우독소스(Eudoxus)의 비례론은 유클리드 **원론**에서 체계화된 모습으로 나타난다. 유클리드 **원론** 1권에는 5개의 공리가 제시되는데 그 중 두 번째와 세 번째는 대수의 어원과 관련이 깊다. 다시 말해 '같은 것에 같은 것을 각각 더하면 그 전체는 서로 같다'라는 두 번째 공리는 방정식의 한 변에 음의 항이 있을 때 양변에 그 양의 항을 더하여 음의 항을 없애는 것, 곧 'al-jabr'의 의미로 생각할 수 있으며, 세 번째 공리 '같은 것에서 같은 것을 빼면 그 나머지는 서로 같다'는 방정식의 양변에 같은 항이 있을 때 그것을 제거하는 것, 곧

---

6) 이 문제를 현대적인 방정식으로 표기하면 $y^2+\frac{1}{3}y=\frac{40}{3}$이다. 따라서 원래 문제인 $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x=20$는 $x:y=3:2$의 비례 관계에 따라, y를 구하는 문제로 바뀌는데 이것은 곧 $\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{9}x=\frac{40}{3}$을 해결하는 것과 같게 된다.

'al-muqabala'와 관련해서 생각해 볼 수 있다. **원론**에는 비록 연산과 등식을 나타내기 위한 기호체계는 없지만 이처럼 대수적인 방법으로 공리를 사용하였으며, 기본적인 대수적 항등식을 설명하는 유클리드 **원론** 2권의 경우 역사가들에 의해 대수적 경향을 띠고 있는 것으로 평가받고 있다[5].

유클리드 **원론**에서 사용된 등식에는 '양'의 등식과 '비'의 등식이 있다. 그 중 양의 등식은 비수치적인 상황을 특징으로 한다. 곧 양을 비교하지만 그 측도를 비교하는 것은 아니다. 그렇기 때문에 기하는 기하로만 존재하였으며 대수적 사고와의 관련성은 원론에서 구체화되어 나타나지 않았다. 한편 두 번째 유형의 등식 곧 비례 사이의 등식에서는 양의 등식과 비교해 볼 때, 앞서 바빌로니아 대수학에서 본 것과 유사한 대수적 사고의 흔적을 찾아 볼 수 있다. 먼저 **원론** 5권에서 비(정의 3)와 비의 등식(정의 5)의 정의를 살펴보면 다음과 같다 ([9, pp. 19-20], 재인용).

> 정의 3. 비는 동일한 두 종류의 두 양 사이의 크기에 대한 일종의 관계이다.
>
> 정의 5. 첫 번째 양과 세 번째 양에서 등배량을 구하고 두 번째 양과 네 번째 양에서 등배량을 구하여 전자의 등배량이, 대응하는 순서대로 각각 구한 후자의 등배량을 똑같이 초과하든지 똑같이 같든지 똑같이 부족할 때 첫 번째 양은 두 번째 양에 대하여 그리고 세 번째 양은 네 번째 양에 대하여 같은 비 가운데 있다고 말한다.

정의 3에서 진술된 비의 정의는 관계 측면에서 논의한 것이다. 따라서 비례를 정의하기 위해서는 관련된 양뿐만 아니라 그 양 사이의 관계도 설명해야 하기 때문에 비의 등식은 양의 등식과 비교했을 때 추상성이 한 단계 상승했다고 볼 수 있으며, 등식의 의미 대신에 비례의 기준에 중요성을 부여함으로써 비례론은 존재론적 정의에 기초하지 않는 첫 번째 공리론으로 의미를 가지게 된다. 그러나 비례론 자체를 대수라고 할 수는 없을 것이다. 왜냐하면 기하를 통해 그 양을 나타내는 원시적인 표현 형태는 있었으나, 비 자체에 대한 연산 조직은 매우 약하게 나타나기 때문이다. 다시 말해 비 자체에서 이루어지는 덧셈이나 곱셈은 없었다. 그 결과 그리스의 비례론에서는 비의 산술적 측면이 강조되지 않았는데, 이것은 오늘날 대수적 사고로의 진행을 더디게 만든 한 요인으로 볼 수 있다.

한편 우리는 비례론에서 바빌로니아 대수학에서 다루었던 대수적인 문제를 찾아 볼 수 있다. 네 번째 비례항을 찾는 문제 즉 같은 종류인 a, b와 다른 종류일 수도 있는 c를 알 때 d를 찾는 문제이다. 비례론의 맥락에서 보면 이것은 단순한 문제가 아니다. 다시 말해 a, b, c, d가 반드시 같은 종류의 양이 아니기 때문에 그리고 곱인 ad와 bc가 반드시 정의되는 것이 아니기 때문에 ad=bc라는 등식을 쉽게 이용할 수 없다. 따라서 비례론은 구체적인 양과의 관련성 대신 추상성이 등장하고, 관계를 강조한다는 측면에서 보면 대수적 사고가 바빌로니아 대수학에 비해 보다 진전된 형태로 볼 수 있을 것이다. 이러한 비례론은 디오판토스의 문제 풀이 과정을 거치면서 바빌로니아 대수학에서 살펴보았던 가정법의 형식과 함께 일반화되어 등장하게 된다.

(2) 파포스의 분석법

분석법의 경우 파포스에게서 그 기원을 생각해볼 수 있다. 오늘날 대수 방정식은 분석법을 그 출발점으로 한다. 대수는 알고 있는 자료로부터 증명해야 하는 결론들을 이끌어 내는 체계적인 학문이다. 예를 들어, 오늘날 $x^2-3x+2=0$을 풀 때에 우리는 이 방정식을 만족하는 x 값이 있다는 것을 전제로 하여 계산하고 있다. 이와 같은 전제는 분석법에서 바탕이 되는 것이다[7)][3].

이처럼 학교 대수에서 방정식은 분석적인 과정을 포함하고 있다. 이런 방정식을 찾는 것은 파포스의 논의에서 말하는 분석의 한 유형에 해당한다. 그러나 파포스의 분석법은 단순히 방정식의 풀이 방법으로만 의미를 가지는 것이 아니다. 이는 분석법이 산술과는 다른 대수적 사고 양식을 제공하기 때문이다. 산술적인 추론은 아는 것에서부터 시작한다. 분석은 미지의 것을 아는 것처럼 가정한다는 면에서 어느 정도 대수적인 특징을 갖고 있으며, 이러한 면에서 보면 바빌로니아의 대수학은 앞서 논의했듯이 산술이면서도 동시에 대수적 사고의 양식을 포함하고 있었다고 볼 수 있다. 그리스 기하에 있어서의 분석법은 중요한 접근법이었으나, 바빌로니아 대수학에서 보여준 산술적인 접근법과는 다른 방법을 통해 나타난다. 이것은 분석이 대상 사이의 관계를 포함해야 하고, 가정에서 주어진 미지량을 나타내기 위해 어떤 특정한 방법을 요구하기 때문이다. 따라서 표현 형식을 요구하는 것은 분석에서 중심 문제로 등장하게 된다. 그리스 기하 문제에서는 그림이 이러한 역할을 할 수 있겠지만, 그러나 수치 문제에서는 미지수에 해당하는 문자가 등장해야만 분석이 가능해진다. 이러한 측면에서 기하학적 분석의 논의는 디오판토스의 대수로 넘어가면서 'arithmos' 개념으로 자연스럽게 이어진다.

4. 디오판토스의 산학

디오판토스의 대수학의 뿌리는 기하학적인 바빌로니아의 전통과 수치적인 바빌로니아-이집트의 전통에서부터 찾아볼 수 있다. 또한 바빌로니아 수학에서 논의했던 수치적 경향의 대수와 기하학적 경향의 대수는 디오판토스의 산학을 거치면서 비로소 통합되었다. 고대 바빌로니아 대수학의 문제풀이에서 사용된 '가정법'과 그 과정에서 중심이 되었던 비례적 사고와 분석적 사고는 그리스 기하학을 거치면서 보다 이론적인 비례론으로 그리고 분석법을 통

7) 분석은 종합과 함께 결합될 때 완전한 해석이 가능해진다. 예를 들어 이 방정식은 $(x-2)(x+1)=0$과 같고 따라서 그 식은 $x-2=0$ 또는 $x+1=0$을 만족해야 하므로 x는 2 또는 -1이어야만 한다는 결론이 나온다. 그러나 문제는 해가 있다는 전제가 미리 증명된 것이 아니라는데 있고 따라서 위의 추론 과정을 거슬러 올라가 수를 대입해 보지 않고는 두 수 가운데 한쪽 혹은 양쪽이 방정식을 만족한다고 확신할 수 없다. 곧, 분석 뒤에는 종합의 과정이 이루어져야 한다.

해 전개되었다. 그렇다면 디오판토스에게 있어서 비례적 사고와 분석적 사고는 어떻게 전개되는가? 우리는 그 관련성을 그의 저서인 **산학**에서 제시한 방정식 문제와 그 풀이과정에서 동원된 해결 방법을 통해 찾아볼 수 있을 것이다.

(1) 디오판토스의 문제 풀이 방법

기호주의의 발달에서 디오판토스는 중요한 역할을 한다. 그는 대수적 표기의 역사적인 발달 단계에서 중간 지점에 놓여 있다. 따라서 그의 역할은 고대 바빌로니아 대수와 중세 이후 전개될 본격적인 기호적 대수를 연결하는 데 있다. 이 절에서는 먼저 디오판토스의 **산학**이 대수의 역사에서 차지하는 위치 및 특징, 한계점 등에 대하여 살펴보고, 다음으로 각 권에서 제시하고 있는 다양한 풀이 방법 중 바빌로니아의 비례적 사고 및 분석적 사고와 관련된 문제를 생각해 볼 것이다.

산학은 고도의 수학적 기량과 독창성을 특징으로 하는 저작으로 초기 알렉산드리아 시대의 위대한 고전과 견줄 수 있을 것이다. 그러나 디오판토스의 **산학**은 Nichomacus, Thèon나 Boetius의 저작과 매우 다르며 어떤 전통적인 그리스 수학과 공통점을 발견하기 어렵다[3]. 이것은 그의 대수학이 그리스 문학이나 초기 그리스 수학을 표현하던 일상의 정보전달 수단인 문자 언어로써 성립된 것이 아니라, 오늘날과 같이 오직 기호화된 명제와 그 연산에 바탕을 두고 있기 때문이다. 이런 점에서 **산학**은 본질적으로 새로운 분야의 수학이었고, 연구 방법 또한 논증 위주의 기하학적 방법과는 다른 양상을 보인다. 그 방법은 오히려 바빌로니아의 대수학과 유사한 특징을 보여준다. 그러나 디오판토스를 단순히 바빌로니아 대수의 연장선상에서만 보는 것은 잘못이다. 왜냐하면, 그가 다룬 수 개념은 고대에 비해 보다 추상적인 것으로 다루어졌으며, 그는 정형과 부정형 방정식에서 정확한 유리수 근을 구하는 문제를 다루었으며, 특히 부정문제의 풀이에 중점을 둔 반면, 바빌로니아 대수학은 계산 위주의 수학으로서 3차까지의 다항방정식의 근사해와 무리수 근의 근사값을 계산하고 있다는 점에서 많은 차이를 보이기 때문이다.

디오판토스의 **산학**은 방정식의 풀이를 다룬 13권의 책으로 구성되어 있다. 1권은 수를 종(species)이나 범주로 구분하는 내용을 담고 있다. 각 범주는 유사한 형태나 모양을 공유하는 수를 포함한다. 바빌로니아의 비실제적인 문제 대신, **산학**의 문제는 1권에서 설명한 종으로 형성되어 있다. 디오판토스는 각 권마다 독특한 풀이방법들을 제시하고 있는데, 대표적인 방법으로 소거법(the elimination method)을 들 수 있다. 이 방법은 고대 바빌로니아 대수에서도 발견되는 것으로, Al-Khwarizmi에까지 이어지며 오늘날 학교 수학에서도 사용되는 보편적인 방법이다. 또한 **산학**은 1권의 경우 the sum and difference method를, 2권에서는 the method of double equality를, 3권은 the method of wrong hypothesis를 이용하여 문제를 해결하고 있으며, 8권에서는 the method of the wrong assumption을 이용하고 있다 [12].

이 가운데 바빌로니아 대수학에서 논의한 대수적 사고의 기원 즉, 비례적 사고와 분석적

사고는 특히 the method of wrong hypothesis, the method of the wrong assumption을 이용한 문제에서 찾아볼 수 있을 것이다. 다음은 the method of wrong hypothesis를 이용한 문제와 풀이과정이며, 이 과정에서 사용된 문자 s는 산학에서 사용하고 있는 미지수 곧 'arithmos'를 의미하는 것이다[12].

문제

세 수에서 임의의 두 수의 곱에 주어진 수를 더한 결과가 제곱이 된다고 할 때, 세 수를 구하여라.

풀이 과정

주어진 수를 12라고 하자. 처음 수와 두 번째 수의 곱에 12를 더하면 제곱수 곧, 25가 된다고 하자. 따라서 처음 수와 두 번째 수의 곱은 13이 된다. 이제 처음 수를 13s, 두 번째 수를 s^{-1}로 보자.

다시 다른 제곱수 16에서 12를 뺀 결과가 두 번째 수와 세 번째 수의 곱이라고 하면 두 번째 수는 s^{-1}, 세 번째 수는 4s가 된다.

처음과 세 번째 수의 곱에 12를 더한 수 곧, $52s^2+12$는 제곱수가 되어야 한다. 52가 제곱수라면 이 조건을 만족하는 것은 한결 쉬워질 것이다. 이제 52를 13곱하기 4로 보자. 만약 둘 다 제곱수라면, 그 곱은 제곱수이다. 따라서 이제 12만큼 더한 수가 제곱수가 되도록 두 제곱수를 생각해보자. 이것은 쉽다: 예를 들어, 한 쪽을 4라고 하면 다른 한 쪽은 1/4이고, 각각에 12를 더한 것은 제곱수가 된다.

이제 처음으로 돌아가서, 처음 수를 4s, 두 번째 수를 s, 세 번째 수를 (1/4)s라고 두자. 처음과 세 번째를 곱한 뒤 12를 더하면 제곱수가 되어야 한다. 이 수는 s^2+12이고 이것이 제곱이 되어야 한다. 제곱수를 $s+3$으로 잡으면, s^2+6s+9와 같아져야 하므로, $s=1/2$이 된다. 따라서 세 수는 2, 2, 1/8이 된다.

이 문제는 바빌로니아의 '가정법'에서처럼 문제가 풀렸다는 가정에서부터 시작한다. 이러한 가정은 분석적 사고가 디오판토스의 문제 풀이에 자연스럽게 포함되어 있음을 보여준다. 문제 풀이과정에서 '가정법'의 '임시값'에 해당하는 것은 처음 수 13s로 표현된다. 이것은 단순히 산술적 계산의 범주를 넘어 새로운 문자 대수의 시작을 알리는 계기가 된다. 문제 풀이과정은 단순히 서로 다른 양을 비교하는 수준을 넘어 잘못된 가정을 수정하기 위해 미지수로 표현된 수들 사이의 관계를 다루고 있다. 이것은 바빌로니아 대수의 '가정법'에서 다루어졌던 비례적 사고의 또 다른 형태로 볼 수 있다. 이처럼 디오판토스의 산학에서 제시된 대수적 방법 중 많은 부분들은 고대 가정법과 연결시키지 않으면 이해하기 힘들게 된다. 다시 말해 The method of wrong hypothesis 와 미지수 개념에 해당하는 'arithmos' 에서 사용된 핵심적인 아이디어는 바빌로니아의 수치적 경향의 대수와의 연관성을 보다 확고하게 보여주고 있다. 그렇다면 기하학적 경향의 대수학은 어떤 형태로 나타나는가? 디오판토스의 산학 1권의 문제 27~30번은 기하학적 경향의 대수학에서 기술되어 왔던 고전적인 문제들이다. 비록 그 풀이과정은 수치적인 형태로 기술되어 있지만, 문제들은 오래된 기하학적 형태

의 흔적들을 가지고 있으며, 고대의 자르고 붙이는 기술들이 수치적으로 재개념화 된 것으로 보여진다([9, pp. 32-33], 재인용).

바빌로니아와 디오판토스의 문제 해결과정에서 나타나는 또 다른 구조적 일치는 다음 두 문제에서 살펴볼 수 있다. 그 과정은 분수에 기초한 추론과 관련되어있다. 여기서 미지수에 대한 대수적 개념과 산술적, 비례적 사고와 '임시값' 사이의 구조적인 일치는 풀이과정 전체에서 나타난다[9].

바빌로니아 문제

첫 번째 고리의1/7과 두 번째 고리의 1/11은 무게가 1 이다. 첫 번째 것은 1/7이 줄면, 두 번째 것이 1/11 줄은 것과 무게가 같다. 첫 번째와 두 번째 고리의 무게를 구하여라[8].

풀이 과정

두 분수 양의 비는 10:6이다.[9] 그러므로 가정법을 사용하여 저자는 첫 번째 고리의 1/7을 10, 두 번째의 1/11을 6이라 가정한다. 그 다음 그는 가정된 값을 더하여 16을 얻는다. 그러나 1을 얻어야 한다. 규범적인 바빌로니아의 비례적인 과정은 이 문제에서, 16의 역수에 대응되는 '비례 조정 요소'를 구하는 질문에 도달하게 된다. 저자는 16의 역수가 3′45′′임을 발견한다. <두 번째 고리의 1/11>을 찾기 위해 그는 임시 값(i.e. 6)에 '비례 조정 요소' 3′45′′를 곱하여 22′30′′를 얻는다. 그 다음 <첫 번째 고리의 1/7>을 찾기 위해 그는 3'45"에 10을 곱하여 37'30"를 얻는다. 그는 22'30"에 11을 곱하여 두 번째 고리의 무게 4°7'30"를 얻는다. 그는 37'30"에 7을 곱하여 첫 번째 고리의 무게 4°22'30"을 얻는다.

디오판토스 문제(산학 1권 문제 6)

두 수의 합이 100이고, 첫 번째의 수의 1/4이 다른 수의 1/6보다 20만큼 큰 두 수를 구하여라.

풀이 과정

디오판토스는 미지수로 두 번째 부분의 1/6을 잡는다. 즉, 두 번째 수는 arithmos 1단위에 6을 곱한 것이다. 따라서 첫 번째 수의 1/4은 arithmos 1단위 더하기 20이 된다. 즉, 첫 번째 수는 arithmos 4 단위 더하기 80이 될 것이다. 우리는 두 수를 합해서 100이 되게 하고 싶다. 이들 두 수를 합하면 arithmos 10단위 더하기 80이 된다. 따라서 arithmos 10 단위는 20과 같고 arithmos 1단위는 2가 된다. 따라서 구하는 수는 88과 12가 된다.

---

8) 현대적인 표기로 문제를 나타내면 $\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}y=1$; $x-\frac{1}{7}x=y-\frac{1}{11}y$ 이다.

9) Thureau-Dangin이 제시한 풀이에서 '첫 번째 고리는 그것의 1/7이 줄었다'는 '첫 번째 고리의 1/7의 6배'로 변형된다는 것을 암시하며, 같은 이유로 '두 번째 고리가 그것의 1/11이 줄었다'는 '두 번째 고리의 1/11의 10배'로 변형된다. 따라서 두 양에 대한 임시값의 비는 $\frac{x}{7} : \frac{y}{10} = 10:6$으로 표현된다([9, p. 22], 재인용).

이처럼 대수적 사고의 출발점이었던 바빌로니아의 '가정법'은 디오판토스의 산학에서 방정식을 형식화하여 해결하는 방법에서 또한 찾아볼 수 있다. 그러나 이 과정에서 디오판토스는 대수적 사고에서 핵심적인 역할을 하는 미지수 즉 'arithmos'를 사용함으로써 바빌로니아 대수학과 구분되는 특징을 보여주고 있다.

(2) 디오판토스의 미지수 개념 'arithmos'

산술적 사고에서 대수적 사고로의 도약은 미지수 자체의 기호 언어를 이용해서 문제를 해결하려는 의지에서 비롯된다. 이 과정에서 바빌로니아의 '임시값'은 산술적 구속에서 벗어나 비로소 문자 곧 디오판토스의 'arithmos'로 재탄생하게 되었다. 이는 미지수의 개념이 구체화됨으로써 보다 본격적인 의미에서 대수적 사고가 가능하게 되었음을 의미한다.

디오판토스의 'arithmos' 개념은 다음과 같은 배경에서 생겨났다.

합리적인 조직화를 추구하는 그리스 사고의 철학적 원리 내에서 바빌로니아의 수치적 경향의 대수학은 적당한 연결고리를 찾지 못했다. 이처럼 그리스 기하의 연역적 전개로 인하여 단절되었던 바빌로니아 대수학의 전통은 디오판토스에 와서야 그 연결이 이루어졌다. 디오판토스는 바빌로니아의 수치적 문장제를 자신의 '산학'에서 그리스의 추상적인 용어를 이용해 변형함으로써, 이 비과학적 원리를 과학적인 것으로 상승시켰다. 이 과정은 대수학 영역에 불확정적인 수의 도입과 관련하여 'arithmos' 즉 미지수 개념을 새롭게 도입함으로써 이루어진다. 디오판토스의 'arithmos'는 많은 문제의 풀이에서 단위의 부정 배수로 역할한다. 고대 후기에 'arithmos'를 통해 이루어진 이러한 수학적 성취는 이후 대수학을 그리스의 고전적 원리 대신 오히려 그 원리와 고대 대수학을 효과적으로 결합시키게 하는 결과를 가져왔다. 그리고 이렇게 함으로써 대수학 분야에서 다양한 방법으로 사고하는 것이 가능하게 되었다.

그리고 디오판토스의 문제들은 'arithmos'로 인하여 형식적 구조에 따라 동일한 패턴으로 구분되었으며, 어떤 수 범주에서 수행되는 조작에 따라 구분되고 기술되었다. 이를 위해 디오판토스는 산학 1권에서 문제를 푸는데 필요한 발견술을 다음과 같이 기술하였다. 이러한 논의는 고대 바빌로니아 대수에서는 찾아볼 수 없었던 것으로 'arithmos'의 도입으로 인해 가능하게 되었으며, 또한 이것은 수 문제를 푸는 방법에 대한 최초의 것으로 볼 수 있다([9, p. 20], 재인용).

> … 하나의 문제에서 특정한 항이 동일한 종의 항과 같은 등식이 되면, 한 항이 한 항과 같아질 때까지 양변에서 끼리끼리 빼는 것이 필요하다. 우연히 한 변이나 두 변 모두 음인 항이 있다면 양변의 항이 양수가 될 때까지 양변에 음의 항을 더할 필요가 있을 것이며, 그 다음 다시 각 변에 한 개의 항만이 남을 때까지 끼리끼리 뺄 필요가 있다.

그러나 실제 문제에서 'arithmos'가 사용되었다고 해서 대수에서의 기호주의가 완전하게 성취된 것은 아니었다. 왜냐하면, 디오판토스는 문제 해결 과정에서 'arithmos'를 이용해서 문제의 일반적인 해법을 제시한 것이 아니라, 이 'arithmos' 개념을 몇몇 특정한 양과 관련하여 사용하기 때문이다. 예를 들어, 주어진 차를 갖는 두 개의 제곱수를 구하는 문제에서, 그는 그 차가 60과 같게 고른다. 그 다음 그는 구하는 수 중 하나의 제곱근이 미지수의 역할을 하는 'arithmos'와 같도록 선택한다. 구하려는 나머지 한 수는 'arithmos'에 3을 더한 것으로 고른다. 문제 해결 과정에서 선택한 60과 3은 디오판토스가 임의로 취한 값들이다. 따라서 그 해는 일반적인 문제의 모든 해를 나타내는 것은 아니다. 이러한 점 때문에 디오판토스의 풀이는 종종 불완전한 것으로 간주된다. 그러나 디오판토스 풀이가 불완전하다고 생각하는 것은 오늘날 'arithmos' 개념을 넘어서는 문자 개념이 있기 때문이다. 사실 앞의 문제에서 조건에 맞는 원소의 모든 쌍을 명확하게 언어나 기호적 방법으로 표현하는 것은 'arithmos'를 이용했던 디오판토스의 문제가 아니라 비에트 이후의 현대적인 관점에서 해결해야 할 문제라고 할 수 있을 것이다.

5. 비에트의 '분석적 기술'

수학의 한 분야로 대수를 형식화하고 산술과 기하의 영역에서 대수를 추출하고 자체적인 지위를 부여할 수 있게 된 것은 비에트에 이르러서 가능해졌다. 대수를 연구하는 과정에서 비에트는 미지량을 포함한 문제를 바빌로니아 대수에서 사용되었던 '분석법' 절차에 따라 해결된다는 점에 주목했다. 비에트는 이처럼 분석적 사고 형식이 대수학의 중심에 놓여 있다는 사실을 강조하기 위해 'algebra'를 대신하여 이러한 수학을 '분석적 기술'(the analytic art)라고 부르기까지 하였다. 따라서 그의 대수 연구에 관한 출발점은 분석적 기술에 관한 언급으로 시작된다. 그가 제시한 분석적 기술은 다음과 같이 세 유형으로 구분되며, 이 과정에서 그는 방정식과 비례론을 분석적 기술의 핵심으로 보고 있다.

비에트가 구분한 분석은 먼저 그리스인들에 의하여 이루어진 zetetics(이론적 분석)와 poristics(문제에 의한 분석)의 두 가지 유형이 있으며, 그는 여기에 세 번째 유형인 exegetics를 추가한다. Zetetics는 찾고 있는 양과 주어진 양 사이의 방정식이나 비례를 찾는 것을 말하며, poristics는 역으로 방정식이나 비례로부터 세워진 정리의 진실성을 연구하는 것이다. 그리고 exegetics는 세워진 방정식이나 비례에서 찾고 있는 양 자체를 만드는 것이다[1].

그 각각을 자세히 살펴보면 첫 번째 유형인 zetetics는 문자를 다루는 규칙들의 집합으로 구성되어있다. 그리고 zetetics에서 그 대상으로 사용된 기호는 단순한 등식의 생성을 목적으로 하는 것이 아니라 어떤 의미에서 보면 비례에 적용하기 위한 것이었다. 이러한 분석적이고 기호적인 과정은 산술 또는 기하에 의존하지 않고도 산술과 기하에 유용하게 작용시키

기 위해서 존재한다. Zetetics의 결과를 산술적 혹은 기하학적 용어로 번역하는 것은 분석의 세 번째 유형인 exegetics에 해당한다. 또한 exegetics는 기하학적 해석학(geometrical exegetics)과 수치적 해석학(numerical exegetics)으로 구분된다. 대수가 학문으로서 그 체계를 갖출 수 있는 것은 이 세 번째 유형에서 비롯된다. 두 번째 유형인 poristics는 zetetics의 결과를 번역하는 exegetics의 과정을 보장하려는 의도에서 비롯된 것으로, 이 과정은 분석적인 시각에서 일련의 함의가 종합적인 증명이 이루어지는 전환을 보장하는 것이다[6].

이러한 분석적 기술에 따라 비에트는 대수를 형식화하였다. 그의 대수에는 다음의 두 가지 특징이 있다. 먼저 각 유형마다 비례가 중심적 역할을 하고 있다. 비례는 바빌로니아 대수에서부터 그리스 기하와 디오판토스를 거치면서 대수적 사고의 핵심으로 그 모습을 유지해왔다. 그러나 비에트에게 있어 비례를 통해 표현되는 방정식은 제한적이었다. 비에트는 비례를 강조했기 때문에 그 결과 모든 방정식은 동차의 형태로 다루어졌다. 즉 모든 단항이 같은 차수를 가져야 했다. 이러한 면에서 그의 대수는 수치적인 것과 큰 차이점을 발견하지 못한다. 그것은 단지 양의 산술에 근거한 대수이다. 그러나 두 번째 특징은 비에트의 대수를 현대적인 의미에서 해석할 수 있게 한다. 두 번째로 비에트는 문자에 관한 이론적인 계산법을 구성하기 위해 비례론의 추상화를 시도한다. 그의 관심은 비에 있어서 문자와 연산이 무엇을 의미하는지에 관한 물음에서부터 문자가 어떻게 연산되는지에 대한 물음으로, 즉 의미론에서부터 시작하여 연산 자체로 옮겨졌다[5]. 이것은 산술적 사고에 머물러 있던 비례론을 대수적 사고로 해석할 수 있게 한 결정적인 계기가 되었다. 그에게 있어서 분석법과 비례론은 대수적 사고를 해석하는 가장 중요한 도구였던 셈이다.

다음으로 비에트를 통해 이루어진 'arithmos'개념의 변형을 살펴보자. 비에트는 그리스 사고의 특징적인 방법론을 취하면서 동시에 매우 다른 수준에서 디오판토스의 연구를 재조직하고 있다[10]. 그에게 있어서 새로운 학문 분야로서 대수를 구성하게 한 것은 수의 개념에서 일반적인 기호 개념으로의 도약에 의해 이루어진다. 이것은 고대의 인식에서는 도달할 수 없었던 이해의 새로운 방법이었으며, 디오판토스의 'arithmos' 개념을 새롭게 확장, 변형함으로써 의미를 갖게 된 것이다. 이 과정에서 비에트는 양이라는 용어를 가장 일반적인 의미에서 사용함으로써 문자 기호의 형식화를 만들어냈다. 비에트는 수치적 계산은 수를 조작하고 기호 계산은 알파벳 문자 같은 형식이나 형태를 조작하는 것으로 구분하였다. 여기에서 핵심은 기호로서, 기호는 그 자체가 기호적인 구성물, 즉 단지 그 잠재적인 객관성이 실제적인 객관성으로 이해되는 구성물로 파악된다는데 있다. 그리고 이러한 형식은 zetetics에서 기호적인 형식론과 함께 언어 구조 내에서 나타난다[1].

고대 바빌로니아 대수학에서부터 이어져 오던 기하학적 경향의 대수학과 수치적 경향의 대수학은 그리스 시대 파포스의 기하학적 분석과 디오판토스의 산술적 방법에 이어 비에트에 이르러 통합된다. 이 과정에서 비례론과 분석법은 계속해서 대수학의 중심에 놓여 있었

10) J.Klein(1968)은 Viète의 'Introduction to the Analytical Art'를 번역하여 부록으로 보여주고 있는데, 이 글에서 Viète는 디오판토스의 '산학' 문제들을 자신의 'Zetetics'에서 재해석하고 있음을 표로 정리하여 제시하고 있다.

다. 비에트는 대수를 하나의 형식화된 수학으로 분석하기 위해 이러한 두 가지 측면을 정확하게 파악하였으며, 그리고 그 도구로 사용되었던 미지수 개념 곧, '임시값'과 'arithmos' 개념을 보다 확장하고 변형함으로써, 그는 디오판토스의 대수적 사고를 넘어 기호적인 대수로 이행할 수 있는 역사적인 계기를 마련하였다.

6. 결론

대수는 현대 수학의 중심에 있으며, 이러한 경향은 학교 수학에서도 나타난다. 여기서 문제는 대수를 명확하게 정의하는 것이 어려운 과제에 속하며, 대수는 그 정의에 따라 내용의 차이를 보인다는 것이다. 그리고 대수적 사고 역시 대수에서 강조하는 내용에 따라 복잡하고 다양한 수학적 사고의 측면을 보여주고 있다.

대수가 처음으로 역사에서 등장할 때 그 중심적인 주제는 문장으로 제시된 방정식과 그 해결에 있었다. 초기에 사용된 방법들은 특정한 방정식에 대한 해를 찾는데 집중되었으며 따라서 그 방법들은 수치적 경험과 기하학적 시행착오를 거치면서 전개되었다. 대수의 역사가 방정식에서 시작되었다는 것은 대수적 사고의 핵심을 고찰하는데 있어서 그 출발점 역시 방정식의 해결에서부터 시작될 수 있음을 의미한다. 이와 함께 Charbonneau는 대수적 사고 방법에 대한 설명에서 대수적 사고의 두 가지 측면을 강조한다. 그에 따르면 대수는 관계를 다루는 방법과 분석을 통한 문제 해결 방법이 강조되는 영역으로, 대수적 사고는 이러한 측면에서 개발되어야 한다고 하였다[5]. 이것은 데카르트가 강조한 대수적 사고의 4가지 측면 가운데 비례론, 분석적 사고와 관련해서 생각해 볼 수 있는 부분이다.

따라서 이 글은 대수적 사고에서 그 내면에 존재하는 본질을 연구하는데 있어서 그 대상을 방정식에 두었으며, 방정식 풀이과정의 역사를 통해 추출할 수 있는 핵심적인 사고를 분석적 사고와 비례적 사고로 보았다.

바빌로니아의 대수학은 '가정법'을 통해 전개되었으며, 이 방법에서 핵심은 '임시값'을 가정한 분석적 사고와 '비례적 조정 요소'를 통해 '임시값'을 '참값'으로 변화시키는 비례적 사고에 있다. 또한 '임시값'은 오늘날 대수방정식에 등장하는 미지수의 원시적인 형태로 볼 수 있을 것이다.

이러한 바빌로니아 대수학은 그리스 기하학에서 연역적인 논증 기하의 영향으로 대수학과의 직접적인 연결고리를 형성하지는 못한다. 그러나 그리스 기하학에서 찾아볼 수 있는 비례론은 단순히 산술적인 계산을 넘어 보다 체계적인 이론을 형성하고 있으며, 파포스의 분석법은 기하학적 전통에서 분석적 사고의 흐름을 계속 유지하고 있다. 이러한 그리스 사고의 전통은 디오판토스에 이르러 바빌로니아 대수학을 계승하면서 새로운 전기를 맞이한다.

디오판토스의 산학은 미지수에 대한 개념이 형식화되어 나타난 최초의 것으로 간주된다.

여기서 등장하는 미지수 즉, 'arithmos'는 대상을 표현하는 단순한 문자의 개념을 뛰어넘어 연산 과정에서 표현된다. 또한 디오판토스가 사용한 다양한 문제해결방법에는 분석적 사고가 기본적으로 가정되어 있으며, 비례적 사고 역시 문제 유형에 따라 바빌로니아의 '가정법'과 유사하게 나타나고 있다. 무엇보다 'arithmos'의 도입은 '임시값'에 의존하던 산술적 사고로부터 직접 조작의 대상을 생각함으로써 본격적인 대수적 사고로의 이행을 의미하게 되었다.

비에트에 이르러 비로소 수의 개념으로부터 일반적인 기호로의 이행은 확실하게 이루어진다. 무엇보다 비에트의 대수는 문자에 대한 연산이 의미론적으로 이루어지지 않고 연산 그 자체에서 정의된다. 그의 이러한 성취는 디오판토스의 산학 분석에서 이루어진 것으로, 무엇보다 'arithmos'의 개념을 확장하여 보다 추상적인 대수학의 출발을 가져왔다고 할 수 있다. 이것은 비에트의 '분석적 기술'이 무엇보다 방정식과 비례론을 기초로 하여 진행되었다는 사실에 기인한다.

이처럼 분석적 사고와 비례적 사고는 대수의 역사적 전개에서 대수적 사고의 핵심에 계속 놓여 있었음을 알 수 있다. 무엇보다 분석적 사고와 비례적 사고는 대수의 추상성이 상승하는 단계에서도 계속 그 모습을 유지해 왔다는 사실에 주목해야 한다. 이와 함께 사고 수준에 있어서 산술적 사고에서 대수적 사고로의 이행은 '가정법'에서 사용된 '임시값'에서부터 시작되었으나, 그 도약은 '임시값'을 생각하지 않고 'arithmos'와 같은 미지수 자체의 기호언어에 의해 직접적인 방법으로 문제를 해결하면서 이루어졌다는 사실 또한 중요하다. 오늘날 대수적 사고는 현대 대수에서 추상성이 증가되면서 이루어진 구조와 일반화, 동적 변화에 대한 파악을 포함하고 있다. 대수적 사고에 있어서 분석적 사고와 비례적 사고는 역사적 고찰에서 보여주듯이 현대 대수의 관계와 구조를 이해하는데 있어서 중요한 역할을 담당할 것으로 기대된다.

대수의 역사적 발달을 다루는 과정에서 이 글은 아라비아 수학과 중세 수학의 역할에 대한 부분은 논의의 대상에서 제외하였다. 그러나 아라비아 수학과 중세 수학 역시 대수 발달에서 중요한 시기에 해당하며, 따라서 이 시기에 나타난 대수적 방법 및 대수적 사고에 대한 분석을 이 글과 비교하는 것은 차후 연구과제가 될 것이다. 이와 함께 실제 학교 대수 교과서 및 대수 지도 과정에서 학생들에게 강조되는 대수적 사고를 역사적 고찰에서 드러난 대수적 사고와 관련해서 그 과정과 차이점을 분석해본다면, 산술적 사고에서부터 대수적 사고로의 이행에 있어서 의미 있는 연구과제가 될 것으로 기대된다.

참고 문헌

1. 민세영, "Piaget의 개념 발달의 메커니즘과 대수의 역사," **대한수학교육학회 논문집 제8권 제2호**(1998), 485-494.

2. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1999.
3. Boyer, C., Merzbach, U. C./양영오 · 조윤동 역, **수학의 역사**, 경문사, 2000.
4. Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L., *Approaches to Algebra*, Kluwer Academic Pub., 1996.
5. Charbonneau, L., "From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry," *Approaches to Algebra*. eds. N. Bednarz, et al., Kluwer Academic Pub., 1996, 15-37.
6. Charbonneau, L., Lefebvre, J., "Placement and Function of Problems in Algebraic Treatises from Diophantus to Viète," *Approaches to Algebra*. eds. N. Bednarz, et al., Kluwer Academic Pub., 1996, 155-165.
7. Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Dover Pub., 1968.
8. Melillo, J. A., *An Analysis of Students' Transition form Arithmetic to Algebraic Thinking*, Kent State University Thesis (Ph.D.), 1999.
9. Radford, L., "The Historical Origin of Algebraic Thinking," *Perspectives of School Algebra*. ed. R. Sutherland, et al., Kluwer Academic Pub., 2001, 13-36.
10. Radford, L., "The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective," *Approaches to Algebra*. eds. N. Bednarz, et al., Kluwer Academic Pub., 1996, 39-53.
11. Thorpe, J. A., "Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It?," *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. eds. S. Wagner & C. Kieran, NCTM, 1989, 11-24.
12. van der Waerden, B.L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, 1983.