Historia Mathematica Vol. 15, No. 2, 2002, 1-14

수학의 위기와 그 극복 과정*

관동대학교 수학교육과 김종명

Abstract

The paper is analyzed the crisis of mathematics for paradoxes in mathematics, also its process of conquest in the history of mathematics. We have found that various views of the infinity and infinitesimal in the history of mathematics. This study be tried to find out the process development of mathematics on passing through a crisis conquest of mathematics for contradictions in the history of mathematics.

0. 서론

인간은 먼 옛날부터 자연과 삶 속에서 수학적 개념들을 찾아내어 일상생활에서 언어와 함께 사용하였다. 수학적 개념들은 수학이 발전하면서 추상적인 개념이 되었다. 추상적인 개념들은 인간의 삶에서 매우 중요하다. 우리들의 삶 속에서 판단하고 결정하며, 창의적인 생각들은 논리적이고 추상적인 사고에서 출발하기 때문이다.

고대문명의 발생지로부터 전수되고 축적되어 정리되어온 수학은 인류의 문화유산이다. 여러 지역에서 각각 다른 수학적 체계와 내용을 수많은 고민과 시행착오들로 이루어 논 그들만의 합리적 사고의 역사이기 때문이다. 수학의 발전과정에서 비합리적인 이론과 매우 복잡하고 이해하기 어려운 내용들은 역사에서 사라졌을 것이다.

완전한 수학으로서의 엄밀한 증명이 필요한 연역적 수학은 고대 그리스에서부터 시작되었다. 그리스인들은 이 세계가 어떻게 시작되었으며, 하늘과 우주는 어떤 원리로 운행되는지? 만물의 본질과 근원은 무엇인지? 이런 철학적 물음을 가지고 있었다. 그들은 이러한 생각을 신화적인 표현이 아니고 구체적인 언어로 논리적이고 합리적인 절차에 따라 분명하게 표현하기 위해서 수학을 시작하였다. 수학은 진리이기 때문에 절대적으로 변하지 않으며 정확하고 완전한 체계가 되어야 한다고 생각하였다. 실생활의 필요성과는 관계없이

* 본 논문은 2002학년도 관동대학교 학술연구비 지원에 의한 결과임.

순수학문으로 수학은 '지식을 위한 지식'으로 발전하였다.

서양에서 수학은 진리이기 때문에 이론전개에서 모순은 극복되어야하고 해결되어야만 했다. 그들이 절대적으로 믿어야 하는 이성(理性)이 참된 지식을 끌어내지 못하고 혼돈과 비진리를 태어나게 한다면, 이성을 믿을 수 없게되는 것이다. 모순은 역설을 가져오게 되고 합리적인 학문체계 전체가 흔들리고 몰락하기 때문이었다.

완전한 체계로 건설하려던 수학이 확장되고 발전하면서 모순(矛盾)이 발견되고, 해결할 수 없는 문제들이 발생하였다. 수학이 발전하면서 어떤 모순과 문제점이 발견되었는지? 이러한 수학적인 문제들을 해결하기 위해서 얼마나 많은 수학자들이 연구하고 노력하였는지? 수학적 위기와 모순점이 발견되었던 몇 가지 중요한 수학의 내용들을 조사할 것이다.

수학의 역사에서 수학적 위기의 발생과 극복과정을 조망해 봄으로서 수학에 대한 폭넓은 이해로 수학의 발전 지향점을 발견할 수 있게 될 것이다. 수학에 대한 모순점이나 어려운 문제를 해결하기 위해서 수학이 발달하였고, 지금도 미래를 예측하거나 해결할 수 없는 자연현상과 실용적 문제를 풀기 위해서 계속적으로 연구하고 있음을 알 수 있다.

수학의 역사에서 모순의 발견에 대한 수학적 위기와 그 극복 과정을 자세히 연구함으로서 매우 흥미 있는 수학의 역사를 접하게 될 것이다. 또한 수학에서 모순의 역사를 통해서 수학 발전의 계기를 알 수 있고, 수학의 특징과 본질을 발견하게될 것이다. 이러한 수학적 모순의 발생과 문제해결의 극복과정을 연구하는 것은 매우 의미 있는 일이다.

1. 경험적 실용기술로 머물었던 고대의 수학들

기원전 3000년경부터 인류는 수의 계산이나 날짜 계산, 토목공사에서 측량 등 수학적 활동을 하였던 기록들이 남아있다. 대표적인 곳이 고대문명의 발상지인 이집트, 메소포타미아, 인도, 그리고 중국이다. 중국의 황하는 봄에는 몹시 가물고 여름에는 홍수가 심하여 풍토와 기후가 거칠고 혹독하여 자연에 대한 어떤 불가지(不可知)의 힘에 의해서 압도되었다. 따라서 중국인들은 자연에 순응하는 천명(天命)사상과 겸양과 인내심의 기질을 갖게되었다. 거칠은 자연의 품에서 자연의 은총을 기원하는 겸허함이 있을 따름이었다. 하늘을 대신하여 지배하는 천자에게 복종하는 것은 하늘의 뜻을 따르는 것이었다. 질서와 규칙이 있는 자연법칙의 존재를 명확히 확인 할 수 없었다. 자연현상에서 모순과 혼돈이 있는 것은 당연한 것이었다. 동양수학에는 논리적으로 증명하는 유클리드 기하학과 같은 학문적 체계와 실증적인 실험방법이 없었다. 중국은 지리적으로 고립되어 타문화와 접촉이 힘들었고, 수학적 기호의 발전도 없었다.

산학(算學)에 관한 문제를 형이상학적 수리사상인 음향오행설과 역(易)의 관점에서 많이 다루었다. 변화가 심한 자연현상의 본질을 꿰뚫어 본다는 직접적인 관찰보다는 궁극적인 존재로서 보이지 않는 기(氣)를 상정하여 기의 철학과 음양오행설로 설명하였다. 산학에서는

음양(−, +)을 도입한 수학과 방정식이 서양보다 먼저 발전하였으나 학문적인 수학으로는 발전하지는 못했다. 자연과 인간의 조화 그리고 인간관계를 중요시하고 중용(中庸)을 강조하는 인문학의 숭상은, 또한 수학의 발전을 저해하였다[3].

인도의 날씨는 더운 기후가 계속되어 무성한 숲을 키웠다. 식물과 동물이 번창하고 인간은 자연의 일부이며 미약한 존재로 인식되었다. 따라서 자연의 힘은 신성하고 초월적인 존재가 되어 인간과 무한한 자연이 순환하는 윤회(輪廻)사상이 생겼다. 인간생활을 부정하고 해탈(解脫)에서 구원을 얻게된다. 그들의 지혜는 무한히 자신을 부정하는 것이다. 숫자의 사용과 불교의 공(空)의 사상에서 0이 나왔다.

고대문명의 발상지에서는 과학과 수학의 내용이 모두 실용적인 발명품과 계산과 기술뿐이었고 자연현상의 일반적인 원리, 이론, 법칙 등 본질적인 성질들을 발견하지 못했다.

대표적인 중국의 수학 교과서는 **구장산술**이 있다. 이 책의 내용은 구체적이고 특별한 경우를 다룬 문제집으로 논밭의 측량, 곡물교환, 비례계산, 방정식, 토목공사 등 문제의 종류에 따라 모아서 편집하여 만든 책이다. 또한 수학의 내용은 실제생활에서 경험할 수 있는 수학문제들로 문제의 답만 있거나, 기능적인 풀이 방법만 제시되어 있다. 일반적인 이론을 전혀 다루지 않은 기능적인 풀이 방법을 전수하기 위한 문제집으로 책의 내용만으로는 왜 그렇게 되는지 쉽게 알 수 없는 난해한 책이다.

고대문명의 발상지에서 발생한 수학들은 실용적인 측면이 강조되어서 수학의 모순이라든가 수학의 완벽한 정확성이 필요치 않았다. 예를 들면 원의 넓이를 계산할 때 π를 3으로 계산한다던가, '몫이 정수로 떨어지지 않을 때는 소수점 이하를 적당히 배분한다'는 어림셈으로 계산하였다. 이러한 계산은 실용성에는 아무런 문제가 되지 않았다. 구체적이고 실용적인 수학 문제에는 다소 진실과 차이가 있어도 그대로 인정하였기 때문에 학문적인 모순이나 위기가 있을 수 없었다. 따라서 이러한 수학은 일반적이고 추상적인 이론의 발전 없이 그대로 침체되어 기능적인 기술로 머물 수밖에 없었다.

2. 최초의 모순 : 무리수의 발견

고대 그리스인들은 신(神)이 창조한 우주는 수학적인 질서와 조화를 지니고 있고 유한하며 일정한 형태를 가지고 있다고 생각하였다. 하늘에는 천상계(天上界)를 구성하는 물체가 이 지구상의 세계와는 다른 신적(神的)인 실체라는 것이다. 거기는 완전한 질서의 세계이고 따라서 균질적이고 영원히 계속되는 천체의 운동은 시작도 끝도 없이 완전한 원을 이루며 한결같이 계속되는 등속운동을 한다고 생각했다. 그들의 자연관은 실체론적이고 목적론적 형이상학이었다. 자연은 합리적이며 조화로운 아름다움이 있고 완벽한 수학적 질서가 있다고 생각했다.

그리스 최초의 자연철학자 탈레스(Thales, BC 624-546)는 이집트와 바빌로니아를 여행

하면서 이집트의 기하학과 바빌로니아의 천문학을 배웠다. 기하학을 연역적 방법으로 연구한 최초의 학자이고 가장 뛰어난 최초의 철학자였다. 자연세계를 구성하고 있는 근본에 의해서 만물전체의 변화를 설명할 수 있으며, 자연의 복잡한 현상 속에는 어떤 확실한 원리와 근본이 되는 것이 숨어 있을 것이라고 생각하였다. 그는 물질세계에서 스스로 변하지 않으면서 모든 물질변화의 기본이 되는 실체를 '물(水)'이라고 결론을 지었다. 이러한 생각은 자연현상과 다양한 물질들의 변화를 설명하는 새로운 방법이었다. 우주와 자연에서 일어나는 자연현상을 인간의 이성으로 설명할 수 있다는 생각을 가지고 자연을 바라볼 수 있었기 때문이었다[3].

탈레스의 정신을 이어받은 피타고라스(Pythagoras, BC 572-492년)는 우주의 근원과 원질의 탐구에서 추상적인 양(量)인 수(數)에 의해 세계가 만들어져 있다고 주장하였고, '영원한 질서의 신(神)은 수학적으로 사고한다.'라는 사상으로 영혼을 정화하여 신과 합일한다는 생각을 가지고 영혼의 정화를 위하여 수학을 연구하였다. 수학의 연구는 영원한 진리로 연역적이고 논리적인 증명이 반드시 필요하였다. 진리란 인간 이성으로 파악할 수 있으며 절대적으로 불변하는 것이다. 모든 현실을 초월하여 존재하는 영원한 존재만이 참된 존재이기 때문에 진리는 변할 수 없는 것이었다. 또한 모든 증명은 공리(axiom)로부터 연역되고 이 공리는 일반적으로 이론 체계를 세우는 기초로 인식된 탈레스의 초기 연역방법을 강화하고 보완하였다.

피타고라스 학파는 만물을 구성하는 기본 요소는 '정수(整數)'라고 주장했다. 그들의 수는 자연수를 말하는 것으로 이들 수와 기하학에서의 점과를 대응시켰다. 자연수 1은 하나의 점이고 2는 하나의 선이며, 3은 하나의 면이고, 4는 하나의 입체이다. 4라는 수로 만든 피라미드는 돌이나 나무로 만든 피라미드가 아니고 비물질적인 단지 마음의 개념에 불과한 것이다. 자연의 세계는 이 수와 그 비례에 의해 성립되는 법칙으로 질서와 조화가 있는 존재로서 이해하였다. 각 수에 의미를 부여하여 수와 그 관계로 세상의 모든 것을 설명하려고 하였다. 자연수 1은 이성(理性), 2는 여성, 3은 남성을 상징하고, 4는 정의, 5는 결혼, 6은 영혼을 의미했다. 정수론으로는 형상수의 연구로 자연수열의 연속항의 임의의 항까지의 합은 삼각형수이고, 마찬가지로 홀수열의 합은 정사각형수임을 기하학적으로 보였다. 또 완전수, 친화수, 인수의 합, 수의 비례와 평균의 연구, 상가평균, 조화평균 등도 분류하였다[3]. 수학의 이론은 감각을 통한 관찰보다는 선험적인 지식인 논리로부터 이끌어 낼 수 있는 진리로 구성된다는 입장을 고수하였다.

피타고라스는 직각삼각형에서 빗변 길이의 제곱은 다른 두 변의 길이를 각각 제곱하여 더한 것과 같음을 연역적으로 성립함을 증명하였다. 이 정리에 의해서 유리수가 아닌 무리수가 발견되었다. 이것은 만물의 근본이 정수라는 그들의 공리에 모순이 되었다.

또한 선은 입자의 점으로 이루어졌으며 유한점이 아니고 무한점이이라고 생각했다. 선분의 길이는 반드시 유리수로 표현된다. 즉 임의의 두 선분은 같은 단위로 측정할 수 있다고 생각했었다. 그러나 무리수의 발견으로 그들의 학문체계에 모순과 위기를 느끼게 되

었다. 이러한 모순의 발견은 그들의 학문체계를 완전히 바꿔야하는 해결할 수 없는 어려운 문제였다. 따라서 무리수는 수로부터 제외하고 이 사실을 비밀로 하였다.

이 위기의 극복은 기원전 370년경 에우독소스(Eudoxus)의 비례이론에 의해서 수를 비교하는 방법을 도입하여 부분적으로 해결하였다. 양과 비례에 관한 개정된 이론은 전 역사를 통하여 가장 위대한 수학적 걸작 중의 하나이다. 이것은 유클리드의 **원론** 제5권에 나온다. 정확한 접근방법은 극한을 이용하여 칸토어가 엄밀하게 전개하였다[12].

3. 제논의 역설

철학자 제논(Zenon, BC 495-435)은 파르메니데스의 설을 옹호하여 무한히 많다(多)와 운동의 존재를 인정하면 자기모순에 빠지게 된다는 것을 증명하였다. 무한히 많은 것이 존재한다면 그것은 무한소(無限小)인 동시에 무한대(無限大)이며 유한이면서도 무한이 아니면 안 된다고 반박하였다. 이러한 제논의 역설(paradoxe, 逆說)은 운동에 관해서 이분법(二分法)이 있다, 만일 직선을 무한히 쪼갤 수 있다면 운동은 불가능하다. 왜냐하면 한 개의 선분상의 모든 무한한 점들을 유한의 시간 안에 통과할 수 없기 때문에 운동은 시작조차도 할 수 없다는 것이다. 아킬레스와 거북이의 문제에서, 아킬레스는 거북이를 앞지르지 못한다. 왜냐하면 그가 우선 앞서 있는 거북이의 출발 지점에 도달하지만 그 때 거북은 제2의 지점으로 전진하였고 그가 또 그 지점에 도달하면 거북은 이미 제3의 지점에 도달해 있기 때문이다. 이런 일이 한없이 되풀이됨으로 아킬레스는 거북을 앞지르지 못한다는 것이다. 또 한가지는 만약 시간을 더 이상 쪼갤 수 없는 아주 짧은 순간들로 이루어져 있다면 움직이는 화살은 정지해 있다는 것 등이 있다.

이러한 소피스트의 역설은 그 동안 논리적으로 구성한 많은 수학적 이론들의 기초가 흔들려서 다시 한번 그들이 이루어 놓은 업적들을 뒤돌아 봐야만 했다.

엘레아 학파는 수를 사물과 분리시켜서 비존재로서 학문에서 제외 시키려했다. 그들의 방법은 가설의 설정과 귀류법에 의한 증명방법으로 그리스의 초기수학의 논리로부터 이어받은 것이다[1]. 그들은 "어떤 것이 존재한다고 주장하려면 만들 수 있는 구체적인 방법이 있어야하며, 비서술적 정의는 원소가 존재한다는 가정을 하고 있기 때문에 어떤 대상도 구성해 낼 수 없다"는 것이다[4]. 그들의 공격은 시각적이고 직관적이었다. 피타고라스의 선은 무한 점으로 되어 있다는 것과 영이 아닌 것을 무한히 많이 합하면 무한히 커질 것이라는 생각으로 무한의 개념에서 모순이 발생함을 보여주었다.

피타고라스 학파는 절대진리인 수학으로 완벽한 논리와 완전한 구성으로 진리를 밝히려 하였던 것이다. 그러나 그들은 위기에 직면하게 되었다. 그럴듯한 논리로 증명하였다는 엘레아 학파의 반박을 받고 난감하였다. 그들은 공격과 비난에 대하여 방어를 하여 위기를 극복해야만 했다. 해결방법은 확고한 기초를 이루는 공준과 공리, 그리고 정의를 설정하여 완전

한 이론으로 수학을 완벽하게 구성하는 것이었다.

제논의 역설을 극복하기 위해서 아리스토텔레스(Aristoteles, BC 348-322년)는 경험주의적 입장에서 합리적으로 무한(無限)에 대한 개념을 정리하였다. 가능적 무한과 현실적 무한으로 나누고 무한은 현실적이거나 완결된 것이 아니고 가능적 즉 잠재적(potential)으로 존재한다고 했다. 잠재적 무한이란 자연수열과 같이 언제까지나 계속 나아가는 무한이다[8].

그리스의 수학자들은 수학적 추론의 정확성을 중요시하였다. 사유(思惟)와 이성(理性)에 대한 절대적인 신뢰는 감각적인 것에 대한 거부로 이어졌고 그들은 정신적인 풍요로움을 즐기고 누렸었다. 기하학은 진리를 깨우치는 방법이었다. 수학적 이론은 변할 수 없는 절대진리며 완전하고 이상적인 진리를 위해서는 완벽한 공리와 체계의 수학이 필요하였다[1].

공리와 정의를 바탕으로 엄밀한 논증을 거쳐 연역적으로 체계화된 완전한 수학을 구성하려는 노력은 유클리드의 책으로 나타났다. 그 때까지의 수학적 결과를 집대성하여 기하학 **원론**을 발표하였다. 그러나 제논의 역설 문제는 18세기 극한에 대한 연구가 있을 때까지 해결할 수 없는 문제였다.

3. 방정식의 해법과 허수의 발견

방정식의 해법은 동양에서 먼저 발전하였다. 이차 방정식의 풀이법은 기원전 2000년경에 메소포타미아에서 완전하지 않은 방법이 있었고, 중국의 수학 책 **구장산술**에 계산법이 있다. 디오판투스는 이차 방정식의 해법을 알고 있었으나 양수 근 이외는 모두 무시해 버렸다. 완전한 이차 방정식에 대한 해법은 인도의 바스카라(Bhaskara, 1114-1185)에 의해서 이루어졌다. 그러나 동양수학은 실용적인 측면에서 수학을 다루었기 때문에 더 이상 순수한 이론적인 측면으로 크게 발전을 이룰 수는 없었다.

서양에서는 16세기에 이탈리아의 수학자들이 삼차와 사차 방정식의 대수적 방법으로 일반적인 해법의 발견은 가장 괄목할 만한 일이고, 이것은 수학적 발전의 밑거름이 되었다. 삼차 방정식의 해법은 타르탈리아(Tartaglia, 1499-1557)가 발견했지만 그의 방법을 카르다노(Cardano, 1501-1576)의 논문 **위대한 술법**(1545)으로 발표하여 세상에 알려지게 되었다. 이 책에 실려 있는 삼차 방정식은 $x^3+mx=n$의 해법이다. 삼차 방정식의 일반식은 다음과 같다.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

이 방정식에서 x를 $x=x-\dfrac{b}{3a}$로 치환하면 다음과 같은 삼차 방정식이 된다.

$$x^3+3px=2q$$

따라서 삼차 방정식 $x^3+mx=n$와 같은 형태를 풀면 된다. 이것의 풀이는 다음과 같다.

다음 항등식을 생각하자.

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$$

이 식과 삼차 방정식과 비교해서 $3ab=m$과 $a^3-b^3=n$으로 놓으면 x는 $a-b$가 된다. 이 과정에서 치환이란 방법을 사용하였다. 그리고 허수를 최초로 다루었다. 카르다노는 무리수나 음수에 대한 확고한 기초 개념이 없었던 때였지만 이러한 수를 일반적인 수로 인정하여 계산하였다. 그러나 그도 다소 저항을 느끼면서 사용하였다. 모두 0이 아닌 3개의 실근이 있는 삼차 방정식의 해를 구하는 과정에서 반드시 음수의 제곱근이 나타난다. 방정식의 실수 해를 찾기 위해서는 음수와 무리수 그리고 허수를 반드시 다루어야만 했었다. 허수는 아주 심각한 의미를 가지는 꼭 필요한 현실적인 수였다[2].

허수는 수(數)라고 하기에는 너무나도 이상한 대상으로 일반인들은 납득하기 어려운 수였다. 제곱해서 음수가 되는 수는 크기도 순서도 없고 수(數)직선 위에 어디에도 없다. 허수는 상상하기 어려운 수였다. 무리수는 얼마든지 가까운 실수가 있지만 무리수와는 다르게 허수는 이 수와 가까운 실수가 존재하지 않는다. 허수는 눈으로 확인할 수도 알 수도 없는 것이다. 여기에 수학은 완전할 수 없었다.

허수가 발견된 지 250여 년 후 가우스(Gauss, 1777-1855)는 허수가 가지고 있는 신비의 베일을 벗기고 눈으로 볼 수 있는 가우스 평면을 만들었다. 이 평면의 창안으로 복소수는 현실성이 있는 수로 바뀌어 허수의 계산과 허수를 포함하는 수학적 이론이 확장되고, 실용적인 계산 등에 활용할 수 있는 수로 되어 빠르게 발전하였다.

수학에서 어떤 모순이나 문제가 발견되면 수학의 발전이 잠시 어려워지지만, 이 수학적 난관의 벽을 뛰어 넘게되면 새로운 수학 발전의 신천지가 전개되는 것이다. 모순의 극복은 한층 더 높은 수학적 학문으로 도약을 하게되어 새로운 응용과 새로운 차원의 수학으로 발전하게 된다.

4. 미적분학의 기초

수학이 자연에서 발견되는 완전한 진리라는 풍토 위에서 근대서양의 시작은 '자연을 수학적으로 설명할 수 있다'는 인간의 적극적인 의지와 신념 때문이었다. 자연을 관찰하여 변할 수 없는 자연법칙을 귀납적으로 종합하고 분석하여 연역적으로 모순이 없는 완전한 자연법

칙의 이론들을 실험하여 실증적으로 증명하고 발견하였다.

군대 생활을 하던 데카르트(Descartes, 1596-1650)는 1619년 다뉴브 강변의 어느 시골 마을에서 야영하면서 어느 날 밤 세 번이나 새로운 철학과 해석기하학의 착상에 대한 꿈을 꾸었다. 신비적인 황홀경에 빠진 특이한 체험을 겪은 뒤 그는 기하학에 관해 집중적인 연구를 하였다. 수개월의 연구 끝에 위대한 수학적 도구인 해석기하학을 창조하였다. 좌표라는 새로운 수학적 도구를 도입하여 그리스의 정적인 수학에서 운동과 변화를 다루는 근대수학이 나타날 수 있게 되었다. 이 기하학은 좌표를 도입하여 수에 대한 대수적 영역과 도형에 대한 기하학의 영역을 서로 대응할 수 있도록 하는 기하학과 대수학을 통합하는 역할을 하였다. 해석기하학의 출발점은 변수를 정해서 도형을 수치화 한 것이다. 기하학적인 도형을 간단히 대수식으로 나타내어 기하학과 대수학을 하나로 묶어 종합과 분석적 방법을 가지고 연구하였다. 우주와 자연의 세계가 기하학적으로 표현할 수 있으며, 그 안에서 물체는 형태를 가지며 운동을 하게된다. 어떤 학문이라도 확실한 지식은 항상 수학적으로 표현하고 증명할 수 있어야했다.

이렇게 변화된 과학적 세계관은 1637년 데카르트의 논문 "모든 과학에서 이성을 바르게 이끄는 진리를 탐구하기 위한 방법서설(方法序說)"에서, 그는 체계적인 회의를 통하여 명확하고 엄격한 개념에 도달하고, 그 개념으로부터 타당한 결론을 많이 이끌어 낼 수 있기를 희망하였다. 과학에도 이 방법론을 적용하여 만물은 물질과 운동으로 설명할 수 있다는 가설에 도달했다. 온 우주는 정지하지 않고 계속 소용돌이치는 물질로 구성되어 있다. 따라서 모든 현상은 물질들이 부딪쳐 생겨나는 힘에 의해 기계적으로 설명된다는 것이다[9]. 그는 철학의 방법론적 근거는 수학에 있으며 수학의 방법론적 핵심은 이성(理性)과 논리성이라고 보았다. 수학적 도구를 사용하여 자연의 움직임과 변화를 묘사하여 설명하고 분석하는 근대 과학은 우주를 물체의 운동과 그 원천인 힘을 생각하는 역학적 세계관을 탄생시켰다.

좌표를 도입하여 뉴턴과 라이프니츠는 미적분학을 창안하였다. 뉴턴(Newton, 1642-1727)은 물체의 운동을 연구하면서 1666년 미분의 개념인 '유율법'(流率法)을 착상하였지만 발표는 1687년 **자연철학의 수학적 원리**(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)에 이 개념이 소개되어 있다.

라이프니츠(Leibniz, 1746-1716)는 1686년 "심오한 기하학과 불가분자(不可分者) 혹은 무한자의 해석에 대하여"라는 논문에서 해석과 대수를 거의 같은 의미로 쓰고 수학적 기호법을 도입하여 전개하였다. 이것이 무한소 해석으로 발전되고 나중에 극한의 개념을 도입하여 미분적분학으로 발전하였다. 1714년 "미분학의 역사와 기원"이라는 논문에서 그의 수학적인 개념과 방법 그리고 사상이 어떻게 형성되어 왔는지 소개하였다.

자연수는 얼마든지 커질 수 있다. 그러나 아무리 큰 수를 곱하여도 유한밖에 안 되는 수를 무한소(infinitesimal)라 한다. 무한소는 유클리드의 **원론**에 공리로 처음으로 소개되어 있다. 아르키메데스는 무한소를 부피계산에 활용하였다. 서양근대에는 미분과 적분에서 무한소의 개념을 도입하여 수학적 이론을 전개하여 미적분학을 완성할 수 있었다. 또한 무한소는

극한, 수열, 급수 등을 연구하는데 아주 유용한 개념이다. 그러나 무한소의 개념은 완전하지 못했다. 코시와 바이어슈트라스에 의해서 무한소에 대한 거의 정확한 정의를 하였다. 그러나 완전한 것은 아니었기 때문에 로빈슨(1960)은 초 실수계라는 수 체계를 세워 무한소를 정확히 정의하였다[7].

라이프니츠는 무한소의 기하학을 무한소의 해석이라는 기호수학으로 전환하였다. 또한 미분의 개념을 확립하였다. 그는 접선법과 구적법을 합리화하는 연구에서 잘 고안된 기호를 사용하였다. 그의 미적분학에 대한 논문에서 오늘날도 그대로 쓰고 있는 다음과 같은 절묘한 기호를 사용하여 수학에서 기호화를 획기적으로 발전시켰다.

$$dx, \quad dy, \quad \int f(x)dx$$

미분적분학은 자연의 연속적 현상을 분석하고 종합하는 방법으로 자연을 탐구하는 최고의 도구가 되었다. 미분은 연속적인 변화를 무한히 쪼개어 순간적인 변화를 알아보는 분석적 방법이지만 적분은 쪼개진 무한히 작은 것들을 모아서 유한의 상태로 만들어 조사하는 종합적 방법이다. 미적분학의 출현은 근대수학을 획기적으로 발전할 수 있도록 했으며 자연을 설명하는 근대과학의 중추적 역할을 하게 되었다. 근대과학의 핵심인, 우주를 물체의 운동과 그 원천인 힘을 생각하는 역학적 세계관이 탄생되었다. 자연을 수학적으로 설명할 수 있다는 신념으로 변할 수 없는 자연법칙을 귀납적으로 종합하고 분석하여 모순이 없는 확고한 자연법칙을 탐구하고 발견하였다. 자연현상에 대하여 주어진 초기조건이 있을 때 자연법칙을 적용하여 미분방정식을 풀면 미래의 현상까지도 완전히 예측할 수 있다는 수학주의 사고 즉 미래가 법칙과 주어진 조건에 의해서 미래가 미리 정해져 있다는 결정론(決定論)적인 사상이 있었다. 뉴턴의 과학이 수학적으로 체계화가 이루어지고 과학이 합리적, 경험적, 실험적 방법에 의해서 성공을 거두었다, 이러한 수학적 방법론에 대한 믿음은 인문 사회학계에도 큰 영향을 주었다. 과학지상주의 사고 즉 수학으로 모든 문제를 밝혀낼 수 있다는 수학지상주의 사고가 있었다.

5. 비유클리드 기하학

로바체프스키(Lobachevskii, 1792-1856)는 1829년 카잔대학 학보에 "기하학의 원리에 대하여"라는 논문과 그 후 1847년 논문 "평행선론에 관한 기하학적 연구"에서 비유클리드 기하학에 대한 연구내용을 발표하였다. 볼리아이(Janos Bolyai) 또한 유클리드의 제 5 공준인 평행선 공준을 증명하기 위해서 여러 가지 방법을 시도하였다. 결국 1832년 그의 아버지의 저서에 부록으로 "공간에 관한 절대로 정당한 연구를 포함한 부록"에 그의 비유클리드 기하학에 대한 연구를 발표하였다. 그때까지는 유클리드 기하학은 완전한 논리적 체계로 이루어진

절대적 진리로써 학문과 기하학의 기초로 생각했었다. 그러나 비유클리드 기하학의 발견으로 유클리드 기하학 뿐만 아니라 다른 기하학도 존재함을 보였다.

리만(Riemamn, 1826-1866)은 1854년 취직 강의에서 "기하학의 기초에 있는 가설에 대하여"라는 제목으로 논문을 발표하였다. 이 내용은 기하학의 토대는 결코 확실하지 않다, 공간적인 양과 관계가 있는 '여러 개의 연장(延長)을 갖는 것'이라는 개념을 구성하였다. 굽은 공간에 관한 일반적 연구와 차원에 대한 것이 있다. 굽은 공간의 연구에서 곡률이 0인 공간은 유클리드 공간이고 곡율이 일정한 음수 값을 가지면 로바체프스키 공간이고, 곡률이 양수 값으로 일정하면 리만이 창안한 리만 공간이 되는 것이다. 곡률이 0인 유클리드 공간에서는 한 직선 밖에 한점을 지나 주어진 직선에 평행인 직선은 단 한 개뿐이다. 곡률이 음수인 로바체프스키 공간에서는 한 직선 밖에 한 점을 지나 주어진 직선에 평행인 직선은 무수히 많이 존재하나, 리만의 공간에서는 평행선이 하나도 존재하지 않는다. 즉 동일한 면 위에 있는 두 직선은 반드시 만나게 되어 있다[2].

자연현상에서 변하지 않는 이론을 발견하여 설명하는 절대 진리인 수학은 비유클리드 기하학의 발견으로 절대 진리라는 황제의 자리를 위협받게 되었다. 또한 수학의 본질을 바꾸어야만 하는 문제였기 때문에 비유클리드의 탄생은 수학의 위기였다. 위기를 극복하기 위해서 공리론을 형성하는 등 수학관의 변화를 맞게 되었다. 그때까지 자명한 진리라고 생각했던 공리는 논리적으로 단순히 하나의 약속에 불과했다. 그후 새로운 공간의 개념이 확립되고 일반적인 공간으로 확장하여 연구하게 되었다. 이런 연구는 아인슈타인의 상대성이론에 의해서 물리적으로 실제성이 확인되었다.

6. 집합론의 모순

수학의 역사에서 무한의 문제만큼 어려운 문제는 없었다. 또한 가장 자극적이고 창조적인 주제였음을 알 수 있다. 무한이란 유한의 저 밖에 있을 것이라고 막연한 느낌을 가질 뿐이다. 무한을 이성적으로 명확히 따지기에는 신기루와 같은 모호함이 있을 따름이다. 과학 중에서 무한을 다루는 것은 수학뿐이다. 그리스 시대부터 철학적으로 풀리지 않는 문제였다. 우주는 무한한가? 인간은 무한 앞에서 인간의 존재가 얼마나 보잘것없고 불안한 것인가 느낄 수 있었다.

집합론의 창시자 칸토어(Cantor, 1845-1918)는 1872년 함수의 삼각급수의 표현의 유일성을 무한개의 불연속 점을 가진 구간 위에서 일반화하였다. 이때 그는 연속성의 연구에서 실수의 비가산(nondenumerable)성을 발견하였다[6]. 그는 집합이라는 개념을 창안하여 완성된 무한집합의 존재를 인정하여 무한을 체계적으로 연구한 것이 집합론의 시작이다.

칸토어는 그 후 '완결된 집합'(1874)이라는 개념을 도입하여 초한수에 의한 순서수의 체계를 세우고, 기수를 도입하여 연구하였다. 그가 창안한 실무한(actual)은 완성된 형태로 현실

적인 무한이다. 따라서 무한을 집합으로 전체를 묶어서 유한처럼 취급할 수 있게되었다.

집합론의 창시로 수학을 '무한을 연구하는 학문'으로 영역을 확장하게 하였다. 칸토어 이전까지는 무한이란, 아리스토텔레스의 잠재적(potential) 무한으로 인식하였고 실무한은 신(神)만이 가지는 속성으로 간주하였다. 서양의 중세에서는 무한은 신의 속성으로 취급되어 신학과 결부되었다. 신의 영역에 있었던 무한에 대한 연구는 신에 대한 도전으로 볼 수 있는 연구였기 때문에 많은 저항과 난관에 부딪치게 되었다.

집합론의 전개에서 수학의 모순이 발견되고, 증명할 수 없는 문제들이 발견되었다. 연속체가설과 선택공리 등은 증명을 할 수 없고, 부르알리-포르티(Burali-Forti)는 '모든 초한수의 집합'(1895)에서 모순의 발견을 제기하였다. 또 다시 러셀(Russell, 1902)은 집합론에 대한 역설을 발표하였다. 그의 역설은 "모든 집합의 집합은 존재하지 않는다"는 것이다. 한 명제가 참임과 동시에 거짓이 되는 치명적인 모순이 발견되어 집합 이론의 기초 개념부터 흔들리게 되었다.

이러한 모순을 극복하기 위해서 집합과 원소를 무정의 용어로 하는 공리론적 집합론을 다양하게 구성하여 만들었다. 지금도 완전한 집합론은 만들기 위해서 많은 수학자들이 노력하고있다.

수학자들은 직관적으로나 논리적으로 완전한 학문으로서의 수학이기를 수학자들은 원했다. 그러나 미적분과 집합론의 발전과 연구는 직관으로 이해할 수 없는 미분 불가능한 연속곡선과 러셀의 역리가 발견되어 완전한 수학의 기초가 흔들리게 되었다.

이런 위기를 극복하고 수학의 확실성을 재확립하고자 하는 시도로 수학 기초론이 등장하였다. 수학자들은 수학의 기초를 기하학이 아니라 산술에서 찾았다. 해석학과 기하학을 산술로 환원하려는 노력의 일환으로 실수와 무한집합이 도입되었다[4].

수학적 개념을 논리적으로 전개하여 완전하고 모순 없는 수학으로 만들기 위해서 논리주의, 직관주의, 형식주의 등 수리철학에 대한 학파가 있다.

논리주의는 모든 수학이 집합론으로 환원될 수 있다고 보았다. 그러나 집합론에서 모순이 발견되었고, 러셀의 역리로 불리는 이 문제로 인해 직관적 논리에 의해서 완벽한 수학을 구성하려는 작업은 공리적일 수밖에 없었다. 프레게와 러셀은 이 집합론의 모순을 피하기 위하여 형태이론을 도입하였다. 집합론을 재구성하여 역설들을 배제시키는데 성공하였지만, 이로 인해 공리론적 집합론은 복잡한 구조를 갖게 되었다. 환원공리, 무한공리, 선택공리 등 받아드리기 힘든 공리가 필요하였다. 결국 수학은 집합론을 토대로 하여 논리학처럼 전개할 수가 없음을 알게되었다.

직관주의는 자연수열과 같이 유한 번의 단계와 연산을 사용해서, 모든 수학적 대상을 구성적인 방법으로 전개해야 한다. 따라서 무한에 대한 증명에서는 배리법을 받아들여지지 않았다. 확실한 직관적 구성방법으로 수학적 지식을 전개하여 수학의 확실한 기초를 제공할 수 있다고 생각했다. 그러나 비록 논리주의에서와 같은 역설이나 모순은 피할 수 있었지만, 수학의 내용을 지나치게 제한하게되어 대부분의 수학자들이 소중하게 생각하는 고전적인 수

학의 많은 부분을 포기하게 되었다[2].

형식주의는 '수학은 가설'이라는 신념으로 공리를 설정하여 가장 완벽한 수학을 건설하려고 했던 수학자는 힐베르트(Hilbert)이다. 그는 수학은 형식적인 기호체계에 관한 학문이라고 보았다. 공리를 자명한 사실로 생각했던 그리스 수학과는 달리, 단지 '이론에 대한 가정'으로 공리의 개념으로 인식하고, 형식적인 공리를 토대로 하여 연역적인 방법으로 이론을 전개하고 구성하여 수학을 만들 수 있음을 보여주었다. 유클리드의 기하학의 미비점을 보완하여 모순 없는 완전한 기하학의 새로운 체계를 세우려고 노력하였다. 공리를 새롭게 설정하여, 유클리드 기하학뿐만 아니라 기하학이 무수히 많이 있음을 보여 주었다.

7. 불완전성 정리

괴델(Gödel, 1903-1978)은 1931년 다음과 같은 불완전성 정리를 증명하였다. '현재의 산술공리계를 포함하는 무모순 공리계는 불완전하다. 즉 그 공리계의 산술적인 명제 중에는 그 공리계 안에서는 긍정도 부정도 할 수 없는 것이 존재한다.'

또 다른 문제는 일반연속체가설, 구성가능성(constructible)공리, 선택공리 등 긍정이나 부정 어느 쪽도 증명할 수 없는 공리를 집합론에 가감할 수 있나 하는 것이다. 이 문제에 대하여 괴델은 무모순 공리계에 일반연속체가설이나 선택공리를 첨가하여도 무모순이다 라는 결과를 얻었다. 코헨은 위 공리 중 하나를 부정하여 집합론의 공리에 첨가하여도 새로이 모순이 생기지 않는다고 증명하였다. 그러므로 일반연속체가설, 선택공리, 구성가능성공리는 집합론의 공리계에 독립적이라는 것이 증명되었다[11].

괴델의 불완전성 정리에 의해 수학이 모순이 없는 완전한 체계임을 증명하려던 형식주의자들의 꿈은 깨어진다. 힐베르트의 형식적 체계 내의 결정 불가능한 정리들이 존재함을 보였다. 긍정도 부정도 할 수 없는 이론이 존재하고, 형식체계 자체의 안정성을 보장할 수 없었다. 따라서 형식주의자들의 최종 목표였던 수학의 무모순은 보장될 수 없었다.

서양의 과학자들은 자연과 우주가 간직하고 있는 모든 법칙과 원리를 밝힐 수 있다고 보았으며 또한 지금까지 밝혀진 진리는 완전한 이론체계를 구성할 수 있다고 생각하였다. 그러나 괴델의 불완전성 정리는 이러한 낙관론적인 생각을 꺾어야만 하였다. 인간은 우주의 궁극적인 비밀을 완전히 찾아낼 수 없음을 엄밀한 수학적인 전개방법으로 증명하였다. 즉 인간의 이성으로는 도저히 끌어낼 수 없는 진리가 존재한다는 것을 밝혔다는 것이다.

수학은 절대적인 진리로 객관성의 학문이 아니고, 역사 속에서 지식사회 구성원들의 창조와 합의에 의해서 이루어지는 학문체계로 바뀌었다. 어떤 공리를 토대로 가정과 조건에서 진리인 지식 체계이다. 또한 얼마든지 수학의 개념들을 창안하고 구성할 수 있다. 무한히 발전하며 변화하는 지식으로 수학도 하나의 사회적 이론 구조물로서 모순이 있을 수 있으며, 또한 모순을 고칠 수 있다.

수학의 공리와 정의는 인간의 무한한 상상에 의해서 창조되어 수학의 이론들을 구성하게 되었다. 현대수학의 특징 중 하나는 구성적이고 정적(靜的)인 수학이다. 수학은 많은 분야에 응용되고 다양한 양상 가운데 가장 핵심적인 개념만을 대상으로 하기 때문에 수학이 추상화되고 여러 개념들 사이의 관계와 구조(構造)를 연구하는 수학으로 발전하게 되었다.

수학이 자연세계와 함께 사회와 정신세계까지도 수학의 대상으로 수학적 모델을 만들어 연구를 할 수 있는 보다 큰 사고의 체계가 되었다. 이러한 형식적인 공리를 토대로 수학을 창조해 가는 것이다.

8. 결론

그리스인들은 질서정연하고 확실한 논리적 체계의 수학적 이론을 발견하고 증명하여 튼튼하고 체계적인 수학적 이론을 만들었다. 그러나 그러한 수학의 이론체계에서 취약성이 밝혀지고 공격을 받게 되었다. 다시 새로운 기초적 토대를 만들어 구성해야만 했다.

인류는 완전한 수학이기를 원했다. 수학과 같은 완전한 학문의 체계를 구성하여 절대진리를 발견하려고 하였다. 그러나 완전한 체계의 수학은 없고, 모순과 위기는 계속되었다. 그래서 끊임없는 노력과 고뇌를 통하여 무한의 개념과 학문의 체계를 이해하게 되었다.

수학에서 위기와 모순의 역사를 통해서 수학 발전의 계기를 알 수 있고, 수학의 특징과 본질을 발견할 수 있었다. 수학적 위기와 모순의 발생과 문제해결의 극복과정에서 수학의 완전성을 위해서 얼마나 많은 수학자들의 피나는 연구를 하였음을 알 수 있었다. 수학의 역사에서 모순은 대부분 무한이라는 개념을 정확히 파악하고 정의하기 위한 역사였다. 그리고 결국 수학의 정의도 바뀌었다. 수학은 수, 형태, 운동, 변화, 공간에 대한 연구라는 정의로부터 수학은 대상의 본질적인 성질과 구조를 파악하는 "양식(pattern)"의 과학이라는 것이다[10]. 또한 현대수학에 대한 다양한 견해가 가지는 특징을 Hersh(1993)는, "수학은 '인간적'이다. 수학은 인간문화의 한 부분이고 문화와 조화한다. 수학적 지식은 오류 가능하다. 과학처럼 오류를 수정하고 재 수정함으로써 진보한다. 시간과 장소와 다른 어떤 것에 따라 증명이나 엄밀성에 상이한 해석이 존재한다[5]."

수학적 체계와 구조는 추상적 개념으로 이루어진 구조물로 완전히 인간의 정신으로부터 나온 아름다운 구성적 창조물이다. 자연의 비밀과 사회의 역동적 구조와 정신세계의 구조까지도 파악하는데 활용할 수 있는 지식이 되었다.

참고 문헌

1. 김용국, "그리스에 있어서 연역적 수학의 성립과 Elea학파," **한국수학사학회지** 제4권

제1호(1987), 25-34.

2. 김용국, 김용운, **지성의 비극**, 일지사. 1992.
3. 김종명, "고대 그리스의 수리철학과 수학교육관," **한국수학사학회지** 제12권 제2호 (1999), 83-97.
4. 박문환, **수학교육의 철학적 기초에 대하여**, 서울대학교 대학원 석사논문, 1989.
5. 박창균, "20세기 수학의 패러다임," **한국수학사학회지** 제9권 제2호(1996), 22-29.
6. 박창균, "Cantor의 무한관," **한국수학사학회지** 제10권 제1호(1997), 33-37.
7. 유윤재, "무한소의 역사를 통해 본 수학에서의 합리성," **한국수학사학회지** 제14권 제2호(2001), 61-68.
8. 임종국, 한정순, "무한으로의 접근," **한국수학사학회지** 제11권 제1호(1998), 47-51.
9. Devlin/허민 · 오혜영 역, **수학: 양식의 과학**, 경문사, 1996.
10. Boyer, M./양영오 · 조윤동 역, **수학의 역사**, 경문사, 2000.
11. Eves/허민 · 오혜영 역, **수학의 위대한 순간들**, 경문사, 1994.
12. Eves/이우영 · 신항균 역, **수학사**, 경문사,1995.
13. Eves/허민 · 오혜영 역, **수학의 기초와 기본개념**, 경문사, 1995.
14. Cornford, F. M., *Plato and Parmenides*, London, 1939.