한국학교수학회논문집 제 5권, 제 2호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 5, Number 2, 83-100, December 2002

고등학교 학생들의 삼각함수에 대한 이해 실태 분석 및 오류 지도에 관한 연구

윤 종 관[1] · 이 덕 호[2]

I. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

초 · 중등학교 수학교육은 21세기의 정보산업 사회를 살아갈 학생들에게 요구되는 수학적인 소양과 수학적인 힘을 길러주는 데에 목표를 두어야 한다(NCTM, 1989). 수학적 소양이란 문제해결을 위해 수학적 방법을 다양하게 사용하는 능력과 탐구하고, 추측하고, 논리적으로 추론할 줄 아는 능력을 뜻하며, 이러한 수학적인 소양을 갖추는 데에 기초가 되는 무엇보다도 중요한 요건의 하나가 수학적 개념에 대한 정확하고 깊이 있는 이해이다. 수학적인 개념을 이해하는 것은 여러 가지 현상을 수학적으로 표현하고 논리적으로 문제를 해결하는 태도의 기초가 되며, 더 나아가 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 한다.(교육부, 1992)

수학적 대상은 인간이 그것을 인식할 수 있든 없든 상관없이, 객관적으로 존재한다고 믿는 사람도 있으며, 수학적 대상은 존재하는 것이 아니라 단지 수학적 기호 자체에 불과하다고 보는 입장도 있고, 또 유한번의 단계에 의해서 구성할 수 있는 개념만 수학적 대상으로 인정하는 입장도 있다. 수학적 대상에 대한 이러한 입장의 차이는 수학의 확실성에 대한 인식의 차이를 불러오고, 따라서 수학교육의 이념과 방법에 대한 차이를 초래하기도 했다.(교육부, 1995). 수학적 사실을 일반화시키는 것을 개념이라 하고, 개념과 개념과의 관계를 박혀 놓은 것을 일반화 원리 또는 법칙이라 하고, 그 일반화 또는 원리는 이론을 형성하고, 그 이론은 교육의 주요 내용을 이루게 된다. 따라서 교육 내용의 대부분은 수없이 많은 개념들로 구성되어 있어 개념의 지도는 중요하다 하겠다.

piaget는 지식의 획득은 학습주체와 그의 환경 사이에서 균형을 유지하기 위해 끊임없이 일어나는 상호작용의 결과이고 이 균형 과정에서 새로운 개념을 기존의 인지구조에 통합시키는 동화작용과 새로운 개념에 맞게 학습자의 기존의 인지구조를 변화시키는 조절작용이 일어나며 동화와 조절이 성공적으로 일어났을 때 개념이 획득된다고 보고 있다. 또 "많은 학생들이 일관성 있게 보인 오류는 그 문제에 접근하는 학생들의 인지구조를 나타내는 것이다"라고 하였다.

인문계 고등학교 학생 중 많은 학생들이 삼각함수 단원을 학습한 이후에도 삼각함수에 관한 문제를 해결할 때, 삼각함수에 대한 정확한 이해가 없이 매우 빈약한 개념적 지식만을 갖고 문제해결과정에서 많은 오류를 발생시키며, 중학교에서 학습한 삼각비의 개념이 삼각함수의 개념으로 동화와 조절이 이루어지지 못하여 후속학습에 상당한 어려움을 느끼고 있다.

본 연구는 고등학교 1학년 과정에서 학습하는 삼

1) 인천부평여자고등학교

2) 공주대학교 수학교육과

각함수단원 중 응용부분을 제외한 기본적인 개념부분과 성질, 삼각방정식과 삼각부등식을 학생들은 어떻게 이해하고 있으며, 어떠한 오류를 범하고 있는지를 확인하고, 이해를 방해하는 장애는 무엇인지를 파악 분석하여 그 지도 방안을 모색하여 교수방법 개선과 학생들의 학습에 도움이 되고자 한다.

B. 선행 연구 분석

최완희(1997)는 고등학교 학생들의 호도법과 60분법의 혼용에 관한 연구에서 학생들이 첫째, 60분법을 호도법으로, 호도법을 60분법으로 고치는 데에는 별 어려움을 느끼지 못하며 상당히 익숙해져 있지만 그것을 도형에 적용하기에는 어려움을 느끼고 있다. 즉 호도법보다는 이전에 사용하던 각의 단위인 60분법을 더 자연스럽게 여기고 있다. 둘째, 삼각함수에서 사용되는 문자(θ, x, p)에 60분법을 사용하는가 또는 호도법을 사용하는가에 별 반응 없이 둘 다 혼용하고 있으며, 특히 $f(x+30°)=f(x)$ 와 같은 식을 사용하는데 있어 전혀 개의치 않는다. 또한 π가 180°와 같다는 생각으로 인해 π가 실수라는 생각보다는 180°라는 의식이 더 강하게 작용하고 있어서 각이 실수로 표현된다는 생각에 부정적이었다. 셋째, 학생들은 삼각함수의 그래프에서 좌표 평면상에 60분법으로 삼각함수를 그리는 것에 별다른 모순점이 없다고 생각하며 이 60분법으로 그려진 그래프를 이동하는데 무리가 없다고 생각하고 있었다. 즉, x축으로 30°이동과 같은 말을 자연스럽게 사용하고 있었으며, 삼각부등식이나 삼각방정식을 풀 때에도 60분법과 호도법을 혼용하여 그래프를 그리고 답을 구하고 있었다. 또한 60분법으로 그려진 그래프를 보고 정의역은 실수로 대답하였으며 정의역을 60분법으로 주었을 때도 그래프를 60분법으로 그리거나 호도법으로 환산해서 그래프를 그리고 있으며, 넷째, 좌표평면 위에서 60분법으로 그래프를 그리는 데 익숙해진 학생들은 면적에서도 아무 생각 없이 $S=4\pi$대신에 $S=720°$으로 쓸 수 있다는 생각도 하게 되었으며 삼각함수가 아닌 일반 도형에서도 60분법을 생각하고 있었다는 문제점이 있다고 지적하였다.

최복순(2000)은 고등학교 2학년 학생의 삼각함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구에서 첫째, 삼각함수의 정의를 정확하게 알고 있는 학생의 비율은 연구 대상 88명중에서 18.19%로 매우 낮게 나타났으며, 20.45%의 학생들은 정의와는 다른 오개념을 가지고 있었고 61.36%나 되는 많은 학생들이 전혀 대답하지 못하였다 한다. 둘째, 삼각함수에 관한 문제풀이 과정에서 학생들이 범하는 오류의 모형을 기술적인 오류(A모형), 문제의 자료를 잘못 사용하거나 잘못 해석하는 오류(B모형), 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류(C모형), 애매한 오류(엉뚱한 해, D모형)로 분류하여 분석한 결과, 정리나 정의를 부적절하게 사용한 오류가 전체의53.93%로 가장 많았으며, 다음으로 기술적인 오류가 24.08%, 애매한 오류가 17.93%, 문제의 자료를 잘못 사용하거나 잘못 해석하는 오류가 4.05%로 이는 삼각함수의 정의나 개념·성질을 잘 이해하고 있지 못하고 있는 것으로 나타났다고 한다.

나병채(2002)는 고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 개념에 대한 이해 실태분석에서 첫째, 고등학교에서 새로이 정의되는 각의 개념에 대하여 정확한 이해가 결여되어 있는 것으로 나타났으며 어떤 각에 대하여서라도 그림으로 나타낼 수 있어야 하는데 이 분야에 심각한 결손이 있어 문제점으로 지적되며 둘째, 라디안의 개념에 대한 정확한 이해가 결여되어 있었으며, 다른 삼각함수 개념들에 비하여 혼란이 심하게 나타났다. 전반적으로 라디안에 대하여 학생들이 생소하게 느끼고 있으며, 중학교까지 사용했던 각도에 대하여 부차적인 것으로 생각하고 있었다. 가장 중요한 라디안의 정의와 라디안 값 구하는 방법은 모르고 공식만을 암기하여 모든 것을 공식을 통하여 해결하려는 경향이 강하였다. 셋째, 삼각비에서 삼각함수로의 충분한 조절이 이루어지지 않아 각이 2, 3, 4사분면의 각에 대한 삼각함수 값 구하는 것을 어려워하고 있었다. 넷째, 삼각함수 그래프에 대한 정답율이 매우 좋지 않았으며, 특히 탄젠트함수의 그래프는 정답율이 두드러지게 낮았다. 학생들이 삼각함수 개념 전반에 대한 연결되고 통합된 이해에 이르지 못하고 공식만을 암기하여 문제를 해결하려 하고 있다고 하였다.

C. 용어의 정의

1) 호도법

하나의 원에서 반지름과 같은 길이의 호에 대한 중심각을 1라디안이라 하며 각의 크기를 재는 데에 라디안을 단위로 재는 방법.

2) 삼각함수 개념

삼각함수 개념은 일반각, $sinx$, $cosx$, $tanx$, $cosecx$, $secx$, $cotx$의 값, $y=sinx$, $y=cosx$, $y=tanx$의 그래프에 대한 개념을 의미하는 것으로 한다.

3) 개념의 이해

개념의 생성 원리를 파악하고 이를 표현할 수 있으며, 그 개념을 적절한 문제 상황이나 현상에 적용할 수 있는 상태를 말한다.

D. 연구문제

본 연구에서는 삼각함수의 개념과 기본 성질에 관한 이해 상태는 어떠한가, 어떠한 오류를 범하고 있는지, 이해를 방해하는 장애는 무엇인지를 분석하고 그 지도방법을 모색하고자 한다. 이를 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1) 고등학교 2학년 학생들의 호도법 개념의 이해 실태는 어떠한가?

2) 고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 개념의 이해 실태는 어떠한가?

3) 고등학교 2학년 학생들의 삼각함수의 개념과 삼각방정식, 부등식의 풀이과정에서 발생하는 오류의 유형과 오류의 원인을 분석하고 그 지도방법을 모색한다.

E. 연구의 제한점

1) 본 연구의 대상은 인천광역시에 소재하는 일반계 고등학교에서 2학년 4개 반을 연구자가 임의로 선정하여 설문조사와 면담을 실시하였으므로 전국적인 학생을 대상으로 한 일반화에는 한계점이 있다.

2) 학생들의 면담이나 학생들의 풀이에서 오류의 원인이 되었던 것을 분석한 것으로서, 모든 학생이 같은 문제에서 똑같은 원인으로 작용하는 것은 아니다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. 호도법

각도를 다루면 30°, 60°, 90°, 120°등과 같은 수들이 아주 자연스럽게 자주 등장하게 되는데, 이것은 최초에 직각을 90°로 했기 때문이며, 그것은 바빌로니아에서 사용되었던 60진법의 자취라고 한다. 물론 삼각형의 각과 같은 몇몇 "정적인 각"을 다룰 때에는, 익숙해지면 이것으로 아무런 불편도 없지만, 회전하는 각과 같은 "변하는 각"을 다룰 때에는 보다 더 적절한 측정법이 있었으면 싶은 생각이 들게 된다.

그 측정법이라는 것은 다음과 같은 아주 자연스러운 것이다. 일반적으로 회전하는 각을 다루는 데에는 하나의 원을 정해 놓고, 그 원주 위를 점이 빙글빙글 돌아가는 모습에서 출발하는 것이 좋다. 그래서 이 원의 반지름을 1로 해 둔다. 지금 이 원주 위를 동점 P가 A에서 B까지, 시계바늘과 반대방향으로 움직일 때(양의 방향), 중심각 ∠AOB가 정해진다고 생각한다. 이 때 ∠AOB의 새로운 측정법으로서, 점 P가 움직인 거리, 곧 원호상 AB의 길이를 ∠AOB 의 크기로 채용하자는 것이다.

지금 이 원주를 따라 한 사람이 자전거를 타고 A지점에서 B지점까지 가는 모습을 상상해 보자. 이 사람의 움직임을 원의 중심 O에서 보고 있는 사람은 ∠AOB의 크기로써 이 사람의 이동을 확인하게 될 것이다. 한편, 자전거에 타고 있는 사람은 자기가 얼마만큼 이동했는가를 자전거에 장착해 놓은 거리

계로써 확인할 것이다. 이 두 가지의 각각 다른 측정법을 결부시켜서 ∠AOB의 크기는 자전거의 거리계에 나타난 눈금으로 표시되어 있다고 생각하는 것이 새로운 각의 측정법인 것이다. 이 새로운 각의 측정법을 호도법이라 하고, 측정한 각의 크기를 라디안이라 한다.

반지름 1인 원주를 일주하면 길이는 2π이다. 따라서 360°는 2π라디안이 된다. 반 바퀴 돌 때에는 각각 일주의 꼭 절반이 되어, 180°는 π라디안이 된다. 90°는 $\frac{\pi}{2}$라디안이다. 45°는 $\frac{\pi}{4}$라디안이다. 보통은 라디안을 생략하고, 360°는 2π이다 하는 식으로 말한다. 각도와 라디안이 대응되는 표를 써보면 아래와 같다.

육십분법	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°	360°
호도법	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

그런데 A에서 B로 시계 바늘과 같은 방향으로 도는(음의 방향)경우에는 원주를 따라 달려간 거리에 마이너스를 붙이고, 이것을 ∠AOB의 크기로 한다. 가령 시계 바늘과 같은 방향으로(음의 방향)568회와 $\frac{1}{4}$회전했을 때의 각은 $-568\times2\pi+(-\frac{\pi}{2})$ $=-1136\pi-\frac{\pi}{2}=-1136\frac{1}{2}\pi$가 된다.

B. 삼각함수의 역사적 배경

삼각함수를 이용해서 삼각형의 6요소(세변의 길이, 세 각의 크기)사이의 관계를 조사하거나, 주어진 조건에 맞는 삼각형을 결정하는 연구를 삼각법이라 한다. 삼각법은 천문학, 점성술, 토지측량, 항해술과 같은 실생활에 널리 사용되어 그 역사가 대단히 오래되었다.

삼각법을 체계적으로 연구한 가장 오래된 학자는 기원전 그리스의 히파르코스(190~125?B.C)라고 볼 수 있다. Hipparchos는 천문학에서 필요한 구면삼각법의 창시자로 천문학을 연구하면서 공의 표면과 같은 면, 즉 구면 위의 두 점 사이의 거리와 각의 크기를 잴 필요를 느껴서 삼각법을 연구하였으며 원의 호의 길이를 알 때 그에 대응되는 현의 길이를 아는 "현의 표"를 만들었는데 이것이 최초의 간단한 삼각함수표라 할 수 있다.

기원전 100년경 메넬라우스는 원의 현에 대하여 쓴 여섯권 짜리 논문을 썼지만 모두 분실되었다고 한다. 다행히 그의 다른 저작인 '구면론(球面論)'이 아라비아어로 보존되어 그리스에서 삼각법의 발전에 대한 연구에 상당한 빛을 주었다. 제Ⅰ권에서는 "구면 삼각형"을 정의한 후 유클리드가 평면삼각형에 대하여 세운 많은 명제(이를테면 합동정리, 이등변 삼각형에 관한 정리 등)를 구면 삼각형에 대하여 세우고 있다. 제Ⅱ권에서는 천문학과 관련된 정리가 실려 있다. 제 Ⅲ권은 당시의 구면 삼각법을 싣고 있으며, 그것은 주로 오늘날 메넬라우스 정리로 알려진 명제로부터 유도된 것이다. "한 횡단선이 삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB와 각각 L, M, N에서 만나면 $(\frac{AN}{NB})(\frac{BL}{LC})(\frac{CM}{MA})=-1$이다"

구면인 경우에는 횡단 대원(大圓)이 구면 삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB와 만난다고 가정해야 하고, 대응 결과는 다음과 동치가 될 것이다.

$$(\frac{\sin AN}{\sin NB})(\frac{\sin BL}{\sin LC})(\frac{\sin CM}{\sin MA})=-1$$

구면 삼각법의 많은 내용이 구면삼각형과 구면 횡단선을 가지고 이 정리로부터 유도될 수 있다.

그 후 프톨레마이오스(Klaudios Ptolemaios 또는 Ptolemy)는 '알바게스트'라는 책을 쓰고 오늘날의 사인표에 해당하는 수표를 작성하였다. '알바게스트'는 13권으로 이루어져있는데 이 책의 제1권 10장과 11장에서 삼각법에 대해 다루고 있다. 10장에서는 방법을, 11장에서는 현표(a table of chords)로 이루어져 있는데 이것은 중심각(α)에 대응하는 현의 길이를 나타내는 현함수(crdα)에 대한 도표이다. 그것은 반지름이 60인 원에서 중심각이 α인 호에 대응하는 현의 길이로 정의된다. crdα = $120\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$가 성립하므로 한 각에 대하여 현과 사인(sin) 사이에 간단한 관계가 있음을 알 수 있다.

9세기에 아라비아에서 알바타니(al-Battani, 858~929)는 톨레미의 업적을 소개하고 tan, cot에 관한 1°마다의 표를 만들었으며, 둔각 구면삼각

형에 대한 cos정리를 알고 있었다. 10세기에 아불 웨파(Abul-wefa, 940~998?)는 tan, cot, sec, cosec의 개념을 확립하여 여섯 가지 삼각함수를 사용하였으며 15′ 간격의 삼각함수표를 만들었다.

유럽에서는 14세기 이후 삼각법이 천문학에서 독립하여 산술, 기하, 대수의 종합된 형태로 차차 체계를 세우게 된다. 코페르니쿠스의 제자인 레티쿠스(Rheticus 1514~1576)는 계산기를 사용해서 두 개의 뛰어난 삼각함수표를 작성하였다. 하나는 10″ 간격의 호에 대해 여섯 가지 삼각함수의 값을 소수 열째 자리까지 계산한 수표이고, 다른 하나는 10′ 간격의 호에 대해 사인함수의 소수 열다섯째 자리까지 계산한 수표이다. 여기서 비로소 삼각함수를 직각삼각형의 변과 관련시켜 삼각비와 같이 정의하였다.

오늘날 우리가 쓰고 있는 사인, 코사인이라는 용어는 중세 인도에서 비롯된 것이며 여러 나라를 거쳐 번역되면서 17세기에 이르러 지금과 같은 용어로 굳어진 것이다.

현재와 같이 일반각에 대한 삼각비의 값이 표로 제시된 것은 뉴턴의 미적분학 연구에서 아래와 같은 사인과 코사인의 급수 전개를 발견한 이후이다.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

오일러는 다시 이들 공식을 실변수에서 복소수의 변수로까지 확장하고 복소수의 편각을 고찰함으로써 일반각의 개념을 확실히 했다. 이처럼 삼각함수는 오일러, 푸리에 등을 거치면서 현대 수학은 물론 현대 물리학, 공학 등에 이르기까지 응용 범위가 넓은 수학의 한 분야가 되었다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

A. 연구대상 및 연구기간

1) 연구 대상 : 인천광역시에 소재하고 있는 일반계 고등학교 중에서 일 개교를 선정하여 2학년 15학급 중에서 자연계열 4개 반 133명을 연구대상으로 하였다.

2) 연구 기간 : 2001년 10월 ~ 2002년 10월

B. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사도구는 고등학교 교과서 및 참고서, 인터넷 수학관련 사이트 등을 참고로 하여 삼각함수 개념의 이해 정도를 파악할 수 있는 기본적인 문항으로 구성하여 제작하였으며, 문항의 내용에 따른 성격을 고려하여 일곱 종류로 나누었고 모든 문항은 오류의 유형과 원인을 분석하기 위하여 서술형으로 제시하였다. 각 문항의 특성은 <표-1>과 같다.

<표-1> 검사지의 문항 특성

문항 내용	문항 번호	검사 내용	문항수
호도법	1	호도법의 정의	3
	2~3	60분법과 호도법의 관계	
삼각함수 정의	4	삼각함수 정의	1
삼각함수의 성질	5	삼각함수값의 계산	5
	6-(1)	$\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수값의 계산	
	6-(2)	$\pi+\theta$에 대한 삼각함수값의 계산	
	6-(3)	$\frac{3\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수값의 계산	
	6-(4)	$2\pi+\theta$에 대한 삼각함수값의 계산	
삼각함수의 그래프	7-(1)	$y=\sin x$의 그래프 그리기	6
	7-(2)	$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$의 그래프 그리기	
	7-(3)	$y=\sin 2x$의 그래프 그리기	
	7-(4)	$y=\cos x$의 그래프 그리기	
	7-(5)	$y=\cos x+1$의 그래프 그리기	
	7-(6)	$y=2\cos x$의 그래프 그리기	

문항 내용	문항 번호	검사 내용	문항수
삼각함수의 주기	8-(1)	$y=\sin x$의 주기 계산	5
	8-(2)	$y=\cos(x-\frac{\pi}{3})$의 주기 계산	
	8-(3)	$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$의 주기 계산	
	8-(4)	$y=2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$의 주기 계산	
	8-(5)	$y=\tan(2x+\frac{\pi}{3})$의 주기 계산	
삼각방정식	9-(1)	삼각 방정식 풀기(sin 포함)	6
	9-(2)	삼각 방정식 풀기(sin 포함)	
	9-(3)	삼각 방정식 풀기(cos 포함)	
	9-(4)	삼각 방정식 풀기(cos 포함)	
	9-(5)	삼각 방정식 풀기(tan 포함)	
	9-(6)	삼각 방정식 풀기(sin , cos 포함)	
삼각부등식	10-(1)	삼각 부등식 풀기(sin 포함)	4
	10-(2)	삼각 부등식 풀기(cos 포함)	
	10-(3)	삼각 부등식 풀기(tan 포함)	
	10-(4)	삼각 부등식 풀기(연립부등식)	

C. 검사 방법 및 절차

1) 검사 방법

연구대상으로 표집된 인문계 고등학교 자연계열 2학년 4개 반 133명을 대상으로 8월 말에 실시하였다. 검사 전에 학생들에게 검사의 목적을 충분히 설명하였고, 문제를 완전히 풀지 못하더라도 풀 수 있는데 까지 성의 있게 풀어 줄 것을 당부하였다. 검사는 수학교사들의 협조아래 학생들에게 전혀 예고되지 않은 상태에서 60분간 실시하였다.

2) 학생 면담

학생 개별 면담은 12명의 학생들을 대상으로 실시하였으며 개별 면담 방법은 학생들의 검사지에 답한 내용을 같이 확인하면서 학생들의 생각을 설명해 보게 하거나 예를 들게 하는 방법을 사용하였다. 응답을 못한 경우에는 면담자가 예를 제시하거나, 유사문항을 같이 풀어 가면서 판단하도록 하였다. 면담은 각 문항을 해결할 때 어떠한 생각을 하였는지에 주안점을 두었다.

Ⅳ. 결과 및 분석

검사를 실시한 결과를 바탕으로 각 문항의 항목별 빈도와 정답율을 표로 나타내고 오류 형태별로 개별 면담을 실시하여 얻은 자료를 종합하여 오류의 원인을 분석하였다. 모든 학생이 같은 문제에서 똑같은 원인으로 오류를 발생하는 것이 아니므로 오류 형태별 빈도는 제시하지 않았다.

A. 호도법 개념의 이해 실태 및 오류 분석

1) 호도법의 정의

[문제1]은 호도법의 정의를 이해하고 있나를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답율은 <표-2>와 같다.

<표-2> 호도법의 정의에 대한 반응 빈도표

문항	인원	정답		오류		무응답	
	(명)	인원	%	인원	%	인원	%
1	133	64	48.12	43	32.33	26	19.55

호도법의 정의를 이해하고 있는지를 파악하기 위한 문항으로 정답률 48.12%, 오류 32.33%, 무응답 19.55%로 검사 학생 중 51.88%가 이해하지 못하고 있다. 그리고 정답자 48.12 %중에서 $\theta=\frac{l}{r}$의 정의를 이용하여 풀이한 학생은 13명뿐이고 나머지 학생들은 [그림-1]과 같이 부채꼴의 반지름, 호의길이, 중심각 사이의 관계에서 $l=r\theta$나 $s=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$의 공식을 이용하여 문제를 풀었다. 이는 호도법의 정의는 제대로 이해하지 못하

고 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식을 단순히 암기하여 기계적으로 계산하고 있다는 것을 말한다. 면담과정에서 이를 확인 할 수 있다.

$$l = 2r \qquad \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{r^2}\theta = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{r}\cdot 2\cancel{r}$$
$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl \qquad \therefore \theta = 2\,(rad)$$

[그림-1. 1번 문항 풀이 유형]

연구자 : 호도법을 설명할 수 있겠니?
A학생 : 반지름의 길이와 호의 길이의 비로써 각의 크기를 나타내는 방법이라고 생각합니다.

연구자 : 그러면 이 문제는 호의길이가 반지름의 2배로 주어지면 $\theta = \frac{l}{r}$에서 $\theta = \frac{2r}{r}$ $= 2$라디안으로 계산하면 될 것 같은데, 너는 호도법을 설명할 수 있으면서 이 문제를 왜 이렇게 해결하였니?
A학생 : 정의는 생각하지 못하고요. 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식 $s = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$을 이용하여 문제를 풀었습니다.
연구자 : 호도법을 설명할 수 있겠니?
B학생 : 잘 못하겠는데요. $1° = \frac{\pi}{180}$ 라디안으로 고치는 것 아닌가요.

연구자 : 그럼. 이 문제는 어떤 생각을 갖고 풀었니?
B학생 : 부채꼴의 호의 길이 구하는 공식 $l = r\theta$에 대입하여 문제를 풀었습니다.

이 대화에서 확인할 수 있듯이 학생들은 호도법의 정의를 이용하여 각의 크기를 구하는 것이 아니라 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식을 단순히 암기하여 기계적으로 계산하고 있음을 확인할 수 있다. 호도법에 대한 오류 형태를 살펴보면 다음과 같다.

오류1. 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때에는 π를 항상 붙여야 한다고 인식하는 경우.

$$l = r\theta, \quad l = 2r$$
$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{2r}{r} = 2 \quad \therefore 2\pi$$

[그림-2. 1번 문항 오류 I]

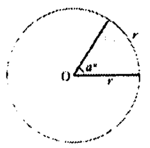
이 경우는 호도법에서 주로 다루는 각의 크기가 모두 π를 포함하고 있는 경우의 특수각만을 접하여서 나타나는 상황이다. 이 학생의 인식에는 호도법으로 표현되는 라디안 각의 크기에는 π가 꼭 붙는 것으로 생각하고 있다. 아래 면담과정에서 이를 확인할 수 있다.

연구자 : 호도법을 설명할 수 있겠니?
C학생 : $1° = \frac{\pi}{180}$ 라디안으로 바꾸는 것이요.
연구자 : 이 문제는 어떻게 생각하고 풀었지?
C학생 : 부채꼴의 호의 길이를 구하는 공식 $l = r\theta$을 이용하여 풀었습니다.
연구자 : 풀이 결과에서 2를 얻었는데 왜 π를 붙였니?
C학생 : 그림을 그려보니 2°는 아닐 것이라 생각되어 π를 붙였는데요. 호도법은 각에 π를 붙이는 것 아닌가요?
연구자: 왜 그런 생각을 하게 되었니?
C학생: $60° = \frac{\pi}{3}$와 같이 교과서의 문제에서 도를 라디안으로 바꾸면은 전부 π가 붙어있어서요.

위의 세 경우의 면담에서 확인할 수 있듯이 호도법의 정의는 제대로 이해하지 못한 상태에서 부채꼴의 호의 길이와 넓이에 대한 공식을 단순히 암기하고 이를 기계적으로 문제에 적용하여 각의 크기를 구하거나 육십분법과 호도법 사이의 관계만을 기억하고 있으면서 호도법이 육십분법의 또 다른 표현으로만 이해하고 있다. 그리고 교과서의 모든 문제상황에서 다루는 라디안 각은 거의 모두가 π가 들어있는 특수각을 이용하므로 인하여 호도법으로 표현되는 각의 크기에는 π가 들어가는 것으로 잘못 생각하게 된다. 이러한 상황이 발생하게 되는

한 원인은 교수학적 요인이 작용한 것이라 판단된다. 나병채(2002)는 호도법 도입의 필요성과 호도법의 유용성이 충분히 설명되어져야 하며, 호도법 단원 내용 전개 방식이 재고되어야 한다. 즉 호도법의 정의와 호도법으로 각을 계산하는 것을 핵심으로 부각하여 강조하고 나머지는 기존의 지식에 각만도에서 라디안으로 바꾸면 되므로 이점을 강조하여야 한다고 밝히고 있다. 호도법을 설명하고 있는 현행교과서의 내용을 살펴보면 다음과 같다.

원호의 길이는 대응하는 중심각의 크기에 비례하므로, 반지름의 길이가 r인 원 에서 길이가 r인 호에 대한 중심각의 크기를 $a°$라 하면 $r : 2\pi r \ = \ a° : 360°$



따라서, $a° = \dfrac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57°17'45''$

여기서, 중심각 a의 크기는 원의 크기에 관계없이 일정하다.

이와 같이, 반지름의 길이와 같은 호에 대한 중심각의 크기 $\dfrac{180°}{\pi}$를 **1라디안**(radian)이라 하고, 이것을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

육십분법과 호도법 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

> ◎ **육십분법과 호도법**
>
> 1 $a°$는 호도법으로 $(\dfrac{\pi}{180}a)$라디안
>
> 2 θ라디안은 육십분법으로 $(\dfrac{180}{\pi}\theta)°$

보기 $\pi = 180°, \quad 120° = \dfrac{2}{3}\pi,$

$1\text{라디안} = \dfrac{180°}{\pi}$

호도법에서 동경 OP를 나타내는 한 각을 θ라디안이라 할 때, 일반각은 다음과 같다.

$$2n\pi + \theta \ (\text{단, } n\text{은 정수})$$

문제1. 다음에서 육십분법의 각은 호도법으로, 호도법의 각은 육십분법으로 나타내어라.

(1) 30° (2) 420° (3) -120° (4) -1050°

(5) $\dfrac{8}{5}\pi$ (6) $\dfrac{13}{4}\pi$ (7) $\dfrac{10}{3}\pi$ (8) 2

위에서 살펴본 봐와 같이 현행교과서에서 호도법을 설명할 때 호도법이 도입된 배경과 필요성에 대한 언급이 없으며 호도법의 개념 설명이후 호의 길이와 반지름의 길이로 중심각의 크기를 호도법으로 구하는 예시나 문제를 제시하지 않은 상태에서 육십분법과 호도법의 관계를 강조하고 이를 이용하여 각기 다른 방법으로 각의 크기를 나타내는 문제로 이루어져 있다. 이것으로 인하여 학생들은 호도법이 $1\text{라디안} = \dfrac{180°}{\pi}$, $1° = \dfrac{\pi}{180}$ 라디안에 의하여 각의 표현을 변형하는 것, 즉 육십분법의 또 다른 표현이라는 인식을 형성하게되며 주어진 각의 크기가 모두 π를 포함하고 있는 경우의 특수 각만을 사용하고 있어 호도법으로 표현되는 각의 크기에는 π가 붙는 것으로 잘못 이해하게 되는 한 원인으로 작용한 것이다. 따라서, 호도법 단원에서 호도법 도입의 배경과 필요성이 설명되어지고 1라디안의 개념 설명 이후에 호의 길이와 반지름의 길이에 의하여 중심각의 크기를 구하는 문제를 해결하고 연습하는 과정을 통하여 라디안은 실수로 표현되는 각의 크기이고 이와 같이 각의 크기를 나타내는 방법이 호도법임을 정확하게 이해하게 한 다음, 육십분법과 호도법의 관계를 설명하는 단계로 교과서의 구성이 이루어지도록 하여야 할 것이다.

2) 육십분법과 호도법의관계

[문제2]는 육십분법과 호도법의 관계를 이해하고 있나를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답율은 <표-3>와 같다.

<표-3> 육십분법과 호도법의 관계에 대한 반응 빈도표(1)

문항	인원	정답		오류		무응답	
	(명)	인원	%	인원	%	인원	%
2	133	125	93.98	8	6.02	0	0

육십분법과 호도법의 관계를 이해하고 있는 정도를 파악하기 위한 문항으로 정답율이 매우 높게 나타났다. 이는 거의 대부분의 학생이 1라디안= $\frac{180°}{\pi}$, $1° = \frac{\pi}{180}$ 라다안을 알고 있다는 것을 의미한다.

[문제3]은 육십분법과 호도법의 관계를 이용하여 호도법이 실수로 표현되는 각의 크기인 것을 이해하는지를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답률은 <표-4>와 같다.

<표-4> 육십분법과 호도법의 관계에 대한 반응 빈도표 (2)

문항	인원 (명)	정답		오류		무응답	
		인원	%	인원	%	인원	%
3	133	82	61.65	37	27.82	14	10.53

[문제2]에 비하여 정답률이 현저하게 떨어진다. [문제2]에서 $180° = \pi$라디안, $360° = 2\pi$ 라디안이라 답을 하였음에도 $180° = 3.141592\cdots$ (rad)는 인정하지 않는다. 이는 [문제1]에서 호도법의 정의를 분석한 결과와 같이 호도법을 제대로 이해하지 못한 것에 원인이 있다.

2. 삼각함수 개념의 이해 실태 및 오류 분석

1) 삼각함수의 정의

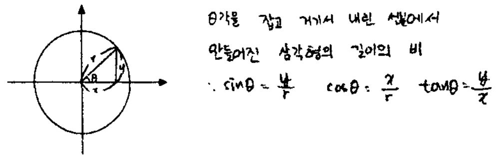
[문제4]는 삼각함수의 정의를 이해하고 있나를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답률은 <표-5>와 같다.

<표-5> 삼각함수의 정의에 대한 반응 빈도표

문항	인원 (명)	정답		오류		무응답	
		인원	%	인원	%	인원	%
4	133	27	20.3	41	30.83	65	48.87

삼각함수의 정의를 얼마나 이해하고 있는가를 파악하기 위한 문항으로 정답률 20.3%, 오류 30.83%, 무응답 48.87%로 검사 학생 중 79.7%나 이해하지 못하고 있다. 이해를 못하는 학생들의 오류 형태를 살펴보면 다음과 같다.

오류1. 직각 삼각형의 변의 길이의 비로 이해하는 경우.



[그림-3. 4번 문항 오류 I]

가장 많은 학생들이 가지고 있는 오류 유형으로, 중학교에서 학습한 삼각비의 개념을 삼각함수의 개념으로 동화와 조절이 이루어지지 못하고 있음을 알 수 있다.

연구자 : 삼각함수에 대하여 네가 생각하고 있는 것을 말해보겠니?

A학생 : 임의의 각 θ의 동경과 원이 만나는 점에서 x축에 수선을 내린 다음 만들어지는 직각삼각형의 길이의 비를 구하는 것이요.

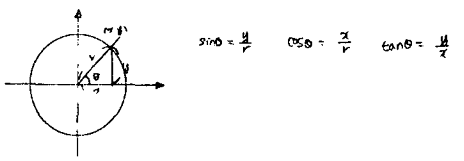
B학생 : 직각삼각형에서 사인= $\frac{\text{높이}}{\text{빗변}}$, 코사인= $\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}$, 탄젠트= $\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}$ 의 값을 구하는 것이요.

C학생 : 30°, 45°, 60°에서 사인, 코사인, 탄젠트의 값을 구하는 것이요.

위의 대화에서 확인 할 수 있듯이 삼각함수의 정의를 중학교에서 학습한 삼각비와 동일시하고 있다. 삼각함수는 중심이 원점에 있고 반지름의 길이가 r인 원 에서 중심각 θ의 크기에 따라서 결정되는 동경과 원의 교점의 x좌표와 y좌표에 의하여 정하여지므로 각 θ에 대한 함수관계이고 이 함수를 삼각함수라 하는 것을 이해하지 못하고 삼각비의 개념에서 머물고 있다. 이와 같은 오류는 시초선

을 중심으로 동경이 회전하는 방향과 크기로 정의하는 일반각의 개념을 정확하게 이해하지 못한 것과 일반각의 특징인 주기를 이해하지 못하고 있는 것이 한 원인이고 이는 일상생활의 습관에 기인한다. 이러한 오류를 범하는 학생들은 삼각함수의 값, 그래프, 방정식과 부등식의 해를 구하는 과정에서 상당한 어려움과 오류를 범하고 있다.

오류2. 역삼각함수를 제대로 정의하지 못하는 경우



[그림-4. 4번 문항 오류Ⅱ]

이 경우는 삼각함수가 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수만으로 이루어진 것으로 이해하고 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수도 삼각함수임을 인정하지 않고 사인과 코사인, 탄젠트함수의 역수인 것으로만 이해하는 경우이다.

연구자 : 삼각함수는 어떤 것으로 이루어져 있지?
A학생 : 사인, 코사인, 탄젠트함수요.
연구자 : 코시컨트, 시컨트, 코탄젠트는 삼각함수가 아니라 생각하니?
A학생 : 예. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ 으로 사인과 코사인, 탄젠트의 역수로 알고 있는데요?

이 경우는 면담과정에서 여섯 개의 함수관계를 설명하면서 이를 확인한 결과 서로 다른 함수 관계가 이루러짐을 이해하고 있었으나 삼각함수의 상호관계를 암기하여 단순하게 문제에 적용하며 해결하는 과정에서 코시컨트는 사인의 역수, 시컨트는 코사인의 역수, 코탄젠트는 탄젠트의 역수관계만으로 인식하고 이를 단순히 암기하여 변형하는 것에만 익숙하여진 경우이다.

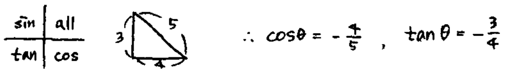
2) 삼각함수의 상호 관계

[문제5]는 삼각함수의 상호관계를 이해하고 있나를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답률은 <표-6>과 같다.

<표-6> 삼각함수의 상호관계에 대한 반응 빈도표

문항	인원 (명)	정답		오류		무응답	
		인원	%	인원	%	인원	%
5	133	89	66.92	32	24.06	12	9.02

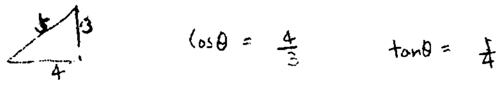
삼각함수의 상호 관계를 이해하고 있는가를 파악하기 위한 문항으로 정답율 66.92%, 오류 24.06 %, 무응답 9.02%로 이해하고 있는 정도가 높게 나타났다. 그러나 정답자중에서 절반정도의 학생들이 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 의 관계를 이용하기보다는 [그림-5]와 같이 삼각비와 삼각함수 값의 부호를 이용하여 문제를 풀이하였다.



[그림-5. 5번 문항 풀이유형]

삼각함수의 상호 관계에 대한 오류 형태를 살펴보면 다음과 같다.

오류1. 1사분면에서 직각삼각형 길이의 비로만 생각하는 경우.



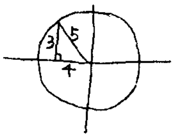
[그림-6. 5번 문항 오류Ⅰ]

이 경우는 주어진 각 θ의 크기를 무시하고 삼각비의 개념만을 이용하여 문제를 해결한 경우로 [문제4]의 삼각함수의 정의에 대한 분석에서 확인된 오류1를 범하는 학생들이 대부분 일으키는 오류로서 중학교에서 학습한 삼각비의 개념이 삼각함수로의 조절이 이루어지지 않아 범하는 오류 형태이다. 이는 삼각함수 정의의 정확한 이해가 얼마나 중요한

가를 반영하는 것이다.

오류2. 삼각함수 값의 부호를 무시하고 직각삼각형의 길이의 비로 생각하는 경우.

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$



[그림-7. 5번 문항 오류II]

이 경우는 앞의 오류1과 유사한 경우로 각 θ의 동경을 2사분면에 작도는 하여 구하고자하는 값을 구하였으나 삼각함수 값은 각 θ의 동경과 원과의 교점의 x좌표와 y좌표의 값에 의하여 결정된다는 것을 무시하고 삼각비의 개념으로 문제를 해결하는 오류를 범하고 있다. 따라서 삼각함수의 정의 및 값을 계산하는 지도과정에서 삼각함수의 값은 각 θ의 동경과 원과의 교점의 x좌표와 y좌표의 값에 의하여 결정되므로 삼각함수의 부호는 x좌표와 y좌표의 부호에 의하여 결정됨을 이해시키고 각 사분면에서 삼각함수의 부호가 달라지는 이유를 이해하도록 하는 충분한 지도가 이루어져야한다.

3) $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\pi\pm\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$꼴의 삼각함수 값

[문제6]은 일반각의 삼각함수를 예각의 삼각함수로 나타내어 그 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답율은 <표-7>과 같다.

<표-7> $2n\pi+\theta$, $-\theta$, $\pi\pm\theta$, $\frac{\pi}{2}\pm\theta$꼴의 삼각함수 값에 대한 반응 빈도표

문항	인원 (명)	정답		오류		무응답	
		인원	%	인원	%	인원	%
6-(1)	133	79	59.40	50	37.59	4	3.01
6-(2)	133	74	55.64	54	40.60	5	3.76
6-(3)	133	58	43.61	68	51.13	7	5.26
6-(4)	133	87	65.41	45	33.83	1	0.75

일반각의 삼각함수를 예각의 삼각함수로 나타내어 그 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 파악하기 위한 문항으로 6-(1)은 $\frac{\pi}{2}+\theta$꼴의 사인값, 6-(2)는 $\pi+\theta$꼴의 코사인값, 6-(3)은 $\frac{3\pi}{2}+\theta$꼴의 탄젠트값, 6-(4)는 $2n\pi+\theta$꼴의 사인값을 구하는 문항이다. 6-(3)의 정답율이 현저하게 낮게 나타났는데 이는 학생들이 사인함수와 코사인함수 보다 탄젠트함수 값을 구하는 것과 $\frac{\pi}{2}+\theta$, $\pi+\theta$꼴보다 $\frac{3\pi}{2}+\theta$꼴의 삼각함수를 더 어렵게 느끼고 있음을 나타낸다. 정답자중에서 거의 대부분의 학생들이 [그림-8]처럼 호도법을 사용하는 것 보다 육십분법으로 변환하여 문제를 풀었다. 이는 삼각함수를 학습한 이후에도 호도법보다는 육십분법을 편하게 느끼고 있음을 의미한다.

1) $\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = \sin(90°+30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

[그림-8. 6번 문항 풀이유형]

일반각의 삼각함수에 대한 오류 형태를 살펴보면 다음과 같다.

오류1. 삼각함수 값의 부호를 잘못 인식하고 있는 경우.

1) $\sin(\underbrace{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}_{90°+30°})$ $\sin 120° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

[그림-9. 6번 문항 오류 I]

이 경우는 일반각의 삼각함수를 예각의 삼각함수로 변형하여 문제를 해결하지 않고 주어진 각을 계산하여 정의대로 값을 구하였으나 2사분면에서의 삼각함수 값의 부호를 정확하게 이해하지 못한 것으로 삼각함수의 상호 관계의 오류2와 같은 원인에 의하여 일으키는 것이다.

오류2. 역삼각함수의 값을 잘못 이해하는 경우.

$$3)\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\cot 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$270+30$

$90\times 3+30$

[그림-10. 6번 문항 오류II]

이 경우의 오류 원인은 역삼각함수의 값을 제대로 이해하지 못한 것에 있다. 즉 $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$의 정의를 정확하게 이해하지 못하여 역삼각함수의 값을 모르기 때문이다. 즉 삼각함수의 정의와 역수관계를 이해하지 못한 상태에서 일반각의 삼각함수를 예각의 삼각함수로 나타내는 공식을 단순히 암기하고 있으며 이를 기계적으로 문제에 적용하여 해결하려는 경우이다.

오류3. 일반각의 삼각함수를 예각의 삼각함수로 나타내는 공식을 잘못 이해한 경우.

$$2)\ \cos(\underset{180^{\circ}}{\pi}+\underset{30^{\circ}}{\tfrac{\pi}{6}}) = \cos(210^{\circ}) = \cos(90\times 2+30^{\circ}) = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[그림-11. 6번 문항 오류III]

이 경우는 일반각의 삼각함수를 예각의 삼각함수로 나타내는 공식을 잘못 암기하여 일어나는 오류이다. 이러한 경우의 학생들은 공식을 단순히 암기하여 적용하려하며, 공식의 암기과정에서 부호나 함수관계를 잘못 암기하여 오류를 범하는 경우로 이는 단순한 공식의 암기도 중요하지만 삼각함수의 정확한 개념을 바탕으로 일반각과 예각의 관계가 성립하는 이유를 충분히 파악할 수 있도록 지도하는 과정이 필요함을 의미한다.

4) 삼각함수의 그래프

[문제7]은 삼각함수의 그래프를 표현할 수 있는지를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답율은 <표-8>와 같다.

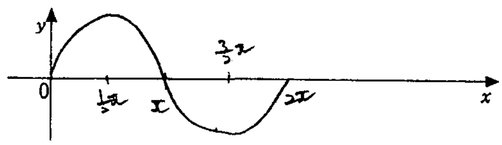
<표-8> 삼각함수의 그래프에 대한 반응 빈도표

문항	인원 (명)	정답		오류		무응답	
		인원	%	인원	%	인원	%
7-(1)	133	92	69.17	41	30.83	0	0
7-(2)	133	61	45.86	70	52.63	2	1.50
7-(3)	133	62	46.62	66	49.62	5	3.76
7-(4)	133	91	68.42	42	31.58	0	0
7-(5)	133	75	56.39	55	41.35	3	2.26
7-(6)	133	72	54.14	57	42.86	4	3.01

삼각함수의 그래프를 정확하게 표현할 수 있는가를 파악하기 위한 문항으로 7-(1), 7-(4)의 $y=\sin x$ 와 $y=\cos x$의 정답율은 높으나 평행이동과 주기의 변화가 있는 나머지 문항은 정답율이 현저하게 낮다. 이는 함수개념의 근본적인 문제라 할 수 있다. 각 문항에서 발생하는 오류 형태를 살펴보면 아래와 같다.

오류1. 함수의 기본조건을 무시한 경우.

1) $y=\sin x$

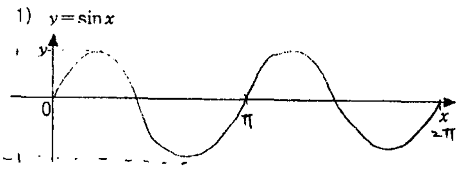


[그림-12. 7번 문항 오류 I]

이 경우는 함수의 기본 조건인 정의역, 치역 등을 무시한 것으로 이는 삼각함수가 실수에서 실수로 대응되는 함수라는 개념이 없이 단순한 도형으로 이해하는 경우와 단순한 실수에 의한 경우로 나타난 것을 면담과정에서 확인 할 수 있었다. 따라서, 함수의 기본 조건인 정의역, 치역, 대칭성 등을 알아

보 게 하 는 지 도 과 정 이 필 요 하 다 .

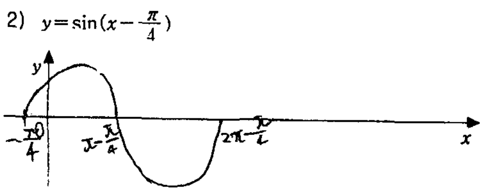
오류2. 함수의 주기를 잘못 인식하고 있는 경우.



[그림-13. 7번 문항 오류Ⅱ]

이 경우는 함수의 주기를 제대로 파악하지 못한 경우로 면담과정에서 함수의 주기성에 대한 이해가 부족한 것으로 파악되었다. 이는 삼각함수의 그래프에서 1주기 이상의 그래프를 그려봄으로서 서로 다른 θ값에 대해 그 함수 값이 주기적으로 같게 나타나는 것을 통하여 주기성을 이해시키는 지도과정이 필요하다.

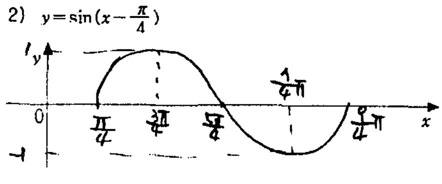
오류3. 평행이동의 개념을 잘못 이해하는 경우.



[그림-14. 7번 문항 오류Ⅲ]

이 경우는 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프는 정확하게 그릴 수 있으나 함수의 평행이동의 개념을 잘못 이해하고 있는 경우이다. 면담과정에서 함수의 평행이동을 점의 평행이동과 동일시하여 함수의 이동방향을 반대로 이해하고 있거나 x축의 방향으로 이동하는 것과 y축의 방향으로 이동하는 것을 혼동하는 경우도 있음을 확인할 수 있었다. 이는 삼각함수만의 문제가 아니라 함수의 평행 이동에 대한 전반적인 개념을 이해하고 있지 못하고 있음을 의미한다.

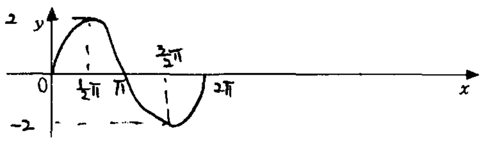
오류4. 그래프의 연속성을 무시한 경우.



[그림-15. 7번 문항 오류Ⅳ]

이 경우는 함수의 연속성을 무시하여 일어난 오류로 평행이동을 어떤 주어진 도형 자체를 x축의 방향으로 옮겨놓는 것으로 잘못 인식하고 있어 $y=\sin x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$의 그래프를 그린 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 옮겨놓는 것처럼 그래프를 표현하였다. 면담과정에서 함수의 평행이동에 대한 개념은 이해하고 있었으나 함수의 연속성을 무시한 것을 확인 할 수 있었다. 이와 같이 연속성을 무시하게된 원인은 함수의 평행이동을 학습하는 과정에서 일반적인 다항함수의 그래프를 제한된 공간에다 표현하고 평행이동을 하는 것을 마치 도형을 이동시켜 옮겨놓는 것으로 잘못 이해하고 있는 것에 있다.

오류5. 주기의 변화와 최대, 최소값의 변화를 혼동하는 경우.



[그림-16. 7번 문항 오류Ⅴ]

이 경우는 삼각함수의 주기의 변화와 함수의 최대, 최소값의 변화를 서로 혼동하여 발생하는 오류 형태로서 삼각함수의 그래프에 대한 잘못된 이해가 원인이 되는 경우와 삼각함수 $y=r\sin(\omega x+\alpha)+\beta$에서 최대값은 $|r|+\beta$,

최소값은 $-|r|+\beta$, 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{|\omega|}$임을 단순히 암기하여 사용하는 과정에서 잘못 적용하여 그래프를 그리므로 발생하는 경우가 있다.

5) 삼각함수의 주기

[문제8]은 삼각함수의 주기를 구할 수 있는지를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답률은 <표-9>과 같다.

<표-9> 삼각함수 주기에 대한 반응 빈도표

문항	인원	정답		오류		무응답	
	(명)	인원	%	인원	%	인원	%
8-(1)	133	119	89.47	14	10.53	0	0
8-(2)	133	103	77.44	30	22.56	0	0
8-(3)	133	85	63.91	47	35.34	1	0.75
8-(4)	133	82	61.65	50	37.59	1	0.75
8-(5)	133	74	55.64	57	42.86	2	1.50

삼각함수의 주기를 구할 수 있는지를 파악하기 위한 문항으로 정답율이 높다. 그러나 함수의 그래프를 정확하게 표현하면서 주기를 찾아낸 것이 아니라 삼각함수 식에서 최대값과 최소값, 주기를 구하는 공식을 단순하게 암기하고 기계적으로 문제에 적용하여 해결하였음을 삼각함수의 그래프에 대한 분석결과와 면담과정에서도 확인할 수 있었다. 그리고 8-(1), (2), (3), (4)의 사인함수, 코사인 함수보다 8-(5) 탄젠트 함수의 정답률이 낮다. 이는 사인함수와 코사인함수보다 탄젠트함수를 더 어렵게 느끼고 있으며 사인과 코사인함수의 주기는 같고 탄젠트함수의 주기는 다른 것을 이해하지 못하는데서 그 원인을 찾을 수 있다. 8-(1), 8-(2)의 정답율과 8-(3), 8-(4)의 정답률이 차이가 있는 것은 삼각함수 그래프의 오류5와 같이 주기의 변화와 최대, 최소값의 변화를 혼동하여 일어나는 차이이다. 이는 공식을 단순 암기하여 기계적으로 적용하는 과정에서 잘못 암기하여 그 적용을 부정확하게 하는 학생의 수가 많음을 의미한다.

6) 삼각방정식

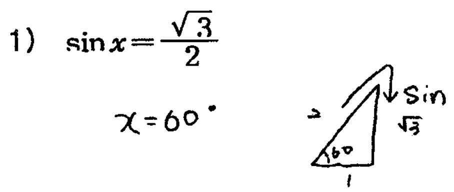
[문제9]는 삼각방정식의 해를 구할 수 있는지를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답율은 <표-10>과 같다.

<표-10> 삼각방정식의 해에 대한 반응 빈도표

문항	인원	정답		오류		무응답	
	(명)	인원	%	인원	%	인원	%
9-(1)	133	85	63.91	48	36.09	0	0
9-(2)	133	68	51.13	63	47.37	2	1.50
9-(3)	133	69	51.88	62	46.62	2	1.50
9-(4)	133	53	39.85	77	57.89	3	2.26
9-(5)	133	56	42.11	75	56.39	2	1.50
9-(6)	133	43	32.33	78	58.65	12	9.02

삼각방정식의 해를 구할 수 있는가를 파악하기 위한 문항으로 대체로 정답률이 낮게 나타났다. 이는 삼각함수의 개념과 삼각함수의 그래프에 대한 개념을 정확하게 이해하고 있지 못한 것에 원인이 있다. 삼각방정식의 해를 구하는 방법은 단위원을 이용하는 방법과 삼각함수의 그래프를 이용하는 방법이 있는데, 단위원을 이용하여 방정식의 해를 구하는 과정에서 오류가 더 많이 발생한 것으로 나타났다. 또한 9-(1), (3)의 사인함수와 코사인함수에서보다 9-(5)의 탄젠트함수에서의 정답률이 저조한 것은 삼각함수의 그래프 중에서 탄젠트함수의 그래프를 더 어렵게 느끼고 있고 개념 형성이 낮기 때문일 것이다. 삼각방정식의 풀이에서 나타나는 오류 형태를 살펴보면 다음과 같다.

오류1. 1사분면의 각에서만 해를 구한 경우.

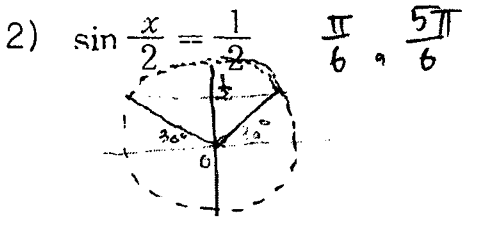


[그림-17. 9번 문항 오류 I]

이 경우는 삼각함수의 개념을 삼각비의 개념과

동일시하는 학생들에서 나타나는 오류 형태이다. 이것은 삼각함수의 값을 구하는 과정에서도 동일한 오류를 범하고 있다. 즉, 중학교에서 학습한 삼각비의 개념이 삼각함수로의 동화와 조절이 이루어지지 못한 것의 영향이 삼각함수 단원의 전 부분에서 오류를 나타내는 원인으로 작용한 것이다.

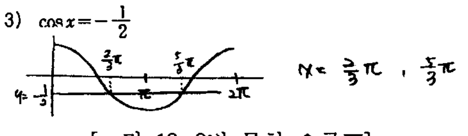
오류2. 각의 변화를 인식하지 못한 경우.



[그림-18. 9번 문항 오류Ⅱ]

이 경우는 $\theta=\frac{x}{2}$로 치환하여 $\sin\theta=\frac{1}{2}$의 해를 구한 다음에 x의 값을 구하지 않은 경우이다. 그런데 면담과정에서 $\theta=\frac{x}{2}$로 치환을 하여 문제를 해결하고 x값을 구하는 것을 잊고 실수한 경우도 있고, $\theta=\frac{x}{2}$로 치환을 한 것이 아니고 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해를 구하는 경우도 있음을 확인 할 수 있었다. 후자의 경우는 각의 변화, 즉 함수의 주기 변화를 파악하지 않고 문제를 습관적으로 해결하려고 한 것이다.

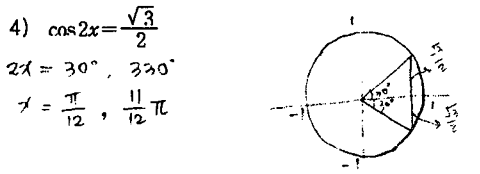
오류3. 삼각함수 그래프의 대칭성을 이해하지 못한 경우.



[그림-19. 9번 문항 오류Ⅲ]

이 경우는 함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결하는 과정에서 그래프는 정확하게 그렸으나 해를 구하는 과정에서 작은 각 $\frac{2\pi}{3}$는 맞게 구하였으나 그래프의 대칭성을 잘못 파악하여 π에 $\frac{2\pi}{3}$를 더하여 다른 하나의 해를 $\frac{5\pi}{3}$로 잘못 구한 경우이다. 이러한 오류는 해를 구하는 과정에서 학생들이 자주 범하는 경우로 삼각함수의 그래프를 지도하는 과정에서 그래프의 대칭성에 대한 정확한 지도가 요구된다.

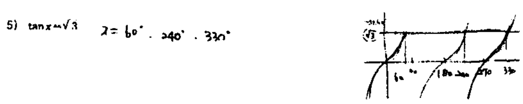
오류4. 주기의 변화를 무시하여 해의 일부분만 구한 경우.



[그림-20. 9번 문항 오류Ⅴ]

이 경우는 단위원을 이용하여 해를 구하면서 주어진 함수의 주기가 π 이므로 $0\leq x<2\pi$의 범위에서 4개의 해를 갖는다는 것을 파악하지 못하고 문제를 해결하였다. 이와 같이 삼각함수의 주기의 변화가 주어진 삼각방정식의 해를 구하는 경우에는 삼각함수의 그래프를 이용하여 해를 구하는 경우보다 단위원을 이용하여 해를 구하는 경우에서 더 많은 오류를 범하고 있다. 따라서 단위원을 이용하여 삼각방정식을 해결하는 방법보다는 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각방정식을 해결하도록 하는 지도가 필요하다.

오류5. 그래프를 잘못 그려 엉뚱한 해를 구한 경우.



[그림-21. 9번 문항 오류Ⅵ]

이 경우는 삼각함수의 그래프를 잘못 그려서 엉뚱한 해를 구하게 되는 것이다. 이와 같이 그래프를 정확하게 그리지 못하여 엉뚱한 해를 구하게 되는 오류는 사인함수, 코사인함수보다 탄젠트함수에서

더 많은 오류를 보이고 있다. 이는 사인함수, 코사인 함수 값 보다 탄젠트함수 값을 더 어렵게 여기고 있으며 그것으로 인하여 탄젠트함수의 그래프를 정확하게 이해하지 못하고 있음을 의미한다.

7) 삼각부등식

[문제10]은 삼각부등식의 해를 구할 수 있는지를 파악하기 위한 문항으로 빈도 및 정답률은 <표-11>와 같다.

<표-11> 삼각부등식의 해에 대한 반응 빈도표

문항	인원 (명)	정답		오류		무응답	
		인원	%	인원	%	인원	%
10-(1)	133	78	58.65	54	40.60	1	0.75
10-(2)	133	67	50.38	65	48.87	1	0.75
10-(3)	133	52	39.10	78	58.65	3	2.26
10-(4)	133	45	33.83	77	57.89	11	8.27

삼각부등식의 해를 구할 수 있는가를 파악하기 위한 문항으로 대체로 정답률이 낮게 나타났다. 이는 삼각방정식의 해를 구하는 문항과 마찬가지로 삼각함수의 개념과 삼각함수의 그래프에 대한 개념을 정확하게 이해하고 있지 못한 것에 원인이 있다. 10-(1)과 10-(2)는 사인함수와 코사인함수에 대한 것이고 10-(3)은 탄젠트함수, 10-(4)는 연립부등식의 해를 구하는 문항으로 각 문항마다 정답율의 차이가 상당히 많이 난다. 이것은 삼각함수 중 사인함수와 코사인함수 보다는 탄젠트함수의 개념 이해가 부족하다는 것을 다시 한번 확인할 수 있다. 삼각방정식의 해를 구하는 경우는 단위원을 이용하는 것과 삼각함수의 그래프를 이용하는 것을 고루 사용하여 구하였는데, 삼각부등식의 해를 구하는 것에는 거의 대부분의 학생이 함수의 그래프를 이용하여 해를 구하였다. 이는 부등식의 해를 구할 때는 단위원을 사용하여 해를 구하는 방법을 더 어렵게 느끼고 있음을 의미하며 면담과정에서도 이를 확인할 수 있었다. 따라서 삼각부등식의 해를 구할 때도 삼각방정식의 해를 구할 때와 같이 단위원을 이용하여 구하는 것보다 삼각함수 그래프의 정확한 이해를 바탕으로 그래프를 이용하여 해를 구하는 방법을 권장하는 지도가 필요하다. 삼각부등식의 풀이에서 나타나는 오류 형태를 살펴보면 다음과 같다.

오류1. 해의 일부분만을 구한 경우.

1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 60° \rightarrow 60° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}$ $\therefore x > \frac{\pi}{3}$

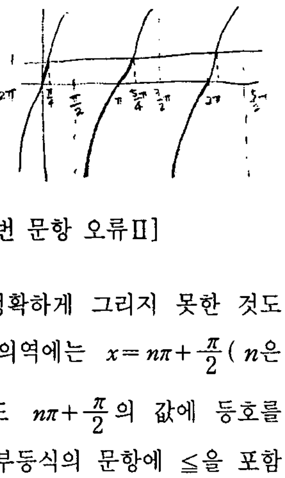
[그림-22. 10번 문항 오류Ⅰ]

이 경우는 삼각비의 개념과 삼각함수의 개념을 동일시하는 학생들에서 나타나는 오류 형태이다. 삼각함수의 정의에서 분석한 오류1을 범하는 학생들이 삼각함수의 값, 삼각방정식, 삼각부등식에서 똑같은 형태의 오류를 범하고 있다. 이런 학생들은 1사분면에서의 특수각에 대한 삼각함수 값만을 단순히 암기하고 있는 상황으로 삼각함수의 모든 부분에서 상당한 어려움을 겪는다.

오류2. 부등호를 제대로 인식하지 못한 경우.

3) $\tan x \leq 1$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi$



[그림-23. 10번 문항 오류Ⅱ]

이 경우는 그래프를 정확하게 그리지 못한 것도 있지만 탄젠트함수의 정의역에는 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)가 속하지 않는데도 $n\pi + \frac{\pi}{2}$의 값에 등호를 붙인 경우이다. 이것은 부등식의 문항에 ≤을 포함하고 있어 1, 2차 부등식의 해를 구할 때와 같이 등호를 전부 붙인 경우이다. 이는 삼각부등식의 해를 구할 때는 ≤ 또는 ≥를 포함하는 경우를 주의 깊게 파악을 하여야하는데 이를 유의하지 않고 문제를 해결하려는 태도 때문이다. 따라서 삼각부등식의 해를 구하는 지도과정에서 문제에 < 또는 >으로 이루어지더라도 해에는 ≤ 또는 ≥을 포함할 수 있

음을 그래프를 이용하여 강조하여 한다.

오류3. 그래프를 잘못 그린 경우.

[그림-24. 10번 문항 오류Ⅲ]

이 경우는 그래프에 대한 개념이 부족하여 잘못된 그래프를 그려서 엉뚱한 해를 구하게 되는 경우이다. 삼각함수 값과 그래프의 지도과정에서 더욱 주의를 기하여 지도할 필요성을 갖는다.

Ⅴ. 결론 및 제언

A. 결론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 호도법에 대한 정확한 개념의 이해가 결여되어 있다. 호도법으로 표현되는 라디안의 각의 크기는 반지름의 길이와 호의 길이의 비인 실수 값으로 표현되는 각이라는 개념의 이해가 미흡한 상태로 대부분의 학생들이 육십분법과 호도법의 관계만을 단순하게 암기하여 60분법을 호도법으로, 호도법을 60분법으로 고치고 있으며 호도법이 육십분법의 다른 표현으로 인식하고 있어 삼각함수의 개념을 형성하는 데에 상당한 장애로 작용하고 있다.

둘째, 많은 학생들이 삼각함수의 정의를 정확하게 이해하지 못하고 있다. 중학교에서 학습한 삼각비에서 삼각함수로의 충분한 동화와 조절이 이루어지지 못하고 있다. 이로 인하여 2, 3, 4사분면의 각에 대한 삼각함수 값을 구하는 과정에서 많은 오류를 범하고 있으며 사인함수와 코사인함수 보다는 탄젠트함수에 대한 개념의 이해가 부족하다.

셋째, 삼각함수의 그래프에 대한 이해도가 낮게 나타났다. 이는 삼각함수의 정의를 정확하게 이해하고 있지 못한 것이 그 한 원인이며 함수의 평행이동의 개념이 부족한 상태가 복합적으로 작용하여 오류를 일으킨 것이다.

넷째, 삼각함수 개념의 정확하지 못한 이해와 잘못된 그래프의 표현으로 삼각방정식과 삼각부등식의 풀이 과정에서 상당히 많은 오류를 일으키고 있다.

B. 제언

본 연구에서 얻은 결과를 바탕으로 다음과 같은 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 호도법 단원을 지도할 때, 호도법은 60분법과 달리 호의 길이와 반지름의 길이의 비인 실수로 표현되는 각이라는 점을 확실하게 인지시켜 주어야 하며, 호도법 단원에서 호도법의 도입에 대한 배경과 필요성이 설명되어지고 1라디안의 개념 설명 이후에 호의 길이와 반지름의 길이에 의하여 중심각의 크기를 구하는 문제를 해결하고 연습하는 과정을 통하여 라디안은 실수로 표현되는 각의 크기이고 이와 같이 각의 크기를 나타내는 방법이 호도법임을 정확하게 이해하게 한 다음, 육십분법과 호도법의 관계를 설명하는 단계로 교과서의 구성이 이루어지도록 하여야 할 것이다.

둘째, 삼각함수의 정의를 지도할 때, 중학교에서 학습한 삼각비에서 삼각함수로의 동화와 조절이 이루어지지 않아 삼각함수 단원의 전 부분에서 오류를 일으키는 원인으로 작용하므로 동화와 조절이 성공적으로 이루어질 수 있도록 충분한 설명과 시간이 주어져야하며, 삼각함수 개념에 대한 정확한 이해가 이루어질 수 있는 다양한 교수-학습 방법이 연구되어야한다.

셋째, 삼각방정식과 삼각부등식의 풀이를 지도하는 과정에서는 단위원을 이용하는 방법과 삼각함수의 그래프를 이용하는 두 가지 방법으로 문제를 해결하는데 이 두 가지 방법을 제시하더라도 많은 학생들이 단위원을 이용하여 문제를 해결하는 과정에서 오류를 많이 범하고 있으므로 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있도록 권장하여 지도하여야 한다.

참 고 문 헌

교육부(1995), 고등학교 수학과 교육 과정 해설, 대한교과서주식회사

김연식 외 1인(1996), 고등학교 공통수학, 주(두산)

나병채(2002), 고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 개념에 대한 이해 실태 분석,한국교 원대학교 교육대학원 석사학위 논문

남창모(1999), 고등학교 수학교육에서 삼각함수의 효율적인 지도방법에 대한 연구 - 공통수학을 중심으로, 동국대학교 교육대학원 석사학위논문

박두일 외 3인(1996), 고등학교 공통수학, 교학사

박세희(1995), 수학의 세계, 서울대학교 출판부

시가고지(1994), 혼자서 크는 수학, 서울 : 한길사

신현성(2000), 수학교육론, 서울 : 경문사

우정호(1996), 고등학교 공통수학, 지학사

우정호(1998), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부

조태근 외 6인(1996), 고등학교 공통수학, 금성교과서

최복순(2001), 고등학교 2학년 학생의 삼각함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구, 충남대학교 교육대학원 석사학위 논문

최완희(1997), 삼각함수에서 개념의 이해 및 그 표상에 관한 연구 - 호도법과 60분법의 혼용오류에 관한 연구, 강원대학교 교육대학원 석사학위 논문

Howard Eves(1995), 수학사 / 이우영 · 신항균 역, 서울 : 경문사

NCTM(1989), 수학교육과정과 평가의 새로운 방향 / 구광조, 오병승, 류희찬 역,서울 경문사

Richard Skemp(1997), 수학학습심리학 / 황우형 역, 서울 : 민음사