

## Polya의 문제해결 각 단계에서 학생들이 보인 사고과정의 코드화

김 소 균<sup>1)</sup> · 신 현 성<sup>2)</sup>

### I. 서 론

#### A. 연구의 필요성 및 목적

문제해결은 우리나라에서도 4차 교육과정 이래로 그 중요성을 인식하는 단계를 거쳐, 그것을 수학교육의 궁극적인 목적으로 인식하고, '수학을 가르치는 것' 자체를 학생들의 '문제해결력을 향상시키는 것'으로 받아들이고 있다. 또한 문제해결을 수학교육연구의 가장 중요한 연구분야의 하나로 여기고, 그것을 대상으로 많은 연구가 이루어지고 있다. 그러나 학교 현장에서는 문제해결의 중요성은 누구나 인정하면서도 실제로는 문제와 문제해결의 전략적 측면에 대한 지식도 부족하고, 또 그것들을 학생들의 발달단계나 문제장면과 관련해서 언제 어떻게 지도해야 하는지 또, 그 과정에서 구체적으로 교사가 해야 할 역할은 무엇인지를 잘 알지 못하는 실정이다. 구체적으로 이루어진 연구들-'문제의 분류나 문제해결 전략들의 분류', '문제해결에서 일어나는 인지과정의 분석' 등은 기타의 이론적인 연구와 더불어 문제해결의 지도방법의 연구에 필요한 구체적인 기초자료를 제공한다는 데 큰 의의를 가진다. 이에, 본 연구자는 본 연구에서 구현하고자 하는 목표를 다음 세 가지로 설정하였다.

첫째, 학생들의 문제해결과정을 분석하는 데 필요

한 코딩조직을 구성한다.

둘째, 우수자들의 문제풀이 과정을 단계별로 분석하여 인지과정의 특징을 알아본다.

셋째, 각 단계별 문제해결과정에서 나타난 특징들을 근거로 학생들의 문제해결력 신장을 위한 학습지도 자료를 얻는다.

#### B. 용어의 정의

##### 1) 코드, 코딩조직(coding system)

코딩조직은 Kilpatrick으로부터 시작된 말로써 인지과정에서 나타난 특징을 엄밀히 구분하여 기호화한 것들의 집합체를 의미한다. 예를 들면, 변수의 도입은 V(Various)로 표현하였다. 이때, V와 같이 각각의 기호 하나 하나를 코드(Code)라 한다.

##### 2) 프로토콜

본 연구에서는 과정연구의 한 방법으로서 발성사고법을 이용하여 문제해결과정을 카세트 테이프나 VTR 테이프에 녹음한 후, 그것을 시간의 순서에 따라 원고화 한 것을 의미한다.

#### C. 연구문제

본 연구의 목적과 필요성에 근거하여 연구문제를

1) 강원인제중학교

2) 강원대학교 수학과

다음과 같이 설정하였다.

1. 수학적 문제해결과정의 코딩조직의 단계별 분류는 가능한가?
2. 이 코딩 조직에 의하면 학생들이 문제를 해결할 때의 수학적 문제해결과정의 4단계별 인지과정의 특징은 무엇인가?

#### D. 연구의 제한점

##### 1) 발생사고법의 한계

사고과정을 추출하는 방법으로 발생사고법을 사용하는데, 이 방법이 피실험자의 모든 사고과정을 추출했다고 보기는 어려우며 일부 사고과정(무의식적 추론 등)에 대한 정보가 누락될 가능성이 있다.

##### 2) 코드화의 한계

인간의 사고과정은 복잡적이고 연속적인 흐름으로 나타나는데 이 사고과정을 독립된 별개의 코드를 이용하여 단절적으로 코드화한 것이 피실험자의 사고과정을 그대로 나타낸다고 해석하는 데에는 어려움이 있다.

##### 3) 연구 대상의 지역적, 수적 한계

본 연구의 연구대상은 속초시 고등학생 14명으로 구성되어 지역과 대표성, 수적 한계로 연구결과를 전국적으로 일반화하기에는 제한점을 갖는다.

## II. 이론적 배경

### A. 문제해결 전략

문제해결 전략은 계획수립 단계에서 결정적으로 이용될 수 있는 해결책을 말한다. 여러 선임 연구자들은 문제해결의 전략을 여러 가지 기준으로 분류하고 목록화해 놓았다.

문제해결 전략으로서 Krulik과 Rudnick은 (1)패턴 인식, (2)단순화와 축소, (3)실험과 모의, (4)추측과 검사, (5)논리적 연역, (6)조직화된 정렬, (7) 거꾸로

풀기를 제시하고 있다.

Larson은 (1)패턴찾기, (2)그림그리기, (3)동치문제 만들기, (4)문제를 변경하기, (5)효과적인 표기 선택, (6)대칭의 조사, (7)여러 경우로 나누기, (8)거꾸로 풀기, (9)모순에 의한 논의, (10)동가성 추구, (11)극단적인 경우를 생각하기, (12)일반화하기를 들고 있다.

한국교육개발원에서는 (1)식 만들기, (2)그림 그리기, (3)규칙성 찾기, (4)표 만들기, (5)거꾸로 풀기, (6)예상과 확인, (7)수형도 그리기, (8)단순화하기를 들고 있다.

### B. Polya의 문제해결 단계

Polya는 「How to solve it」에서 문제해결을 이해, 계획 수립, 실행, 반성의 네 단계로 나누고 각 단계에서 효과적으로 사용될 수 있는 발견술을 제시하고 있다. 이 책에서 Polya가 제시한 단계별 발견술은, 교사가 완전히 마스터한 다음, 학생이 필요로 하는 경우 적절한 발견술을 적절한 때 발문 형태로 제시하여 학생들이 스스로 어려움을 해결할 수 있도록 도와주는데 시사점을 준다.

### C. 문제해결 과정연구의 의의와 방법

문제해결은 그 자체가 결과(문제의 정답의 여부)라기보다는 그 과정에서 인간들이 행하는 지적, 심리적 행위의 집합체이기 때문에, 문제해결의 연구에 있어서는 그 '과정의 연구'가 관련된 다른 연구들의 연구 기초자료를 제시할 수 있는 의의를 가질 것이다.

문제해결 과정에서 전개된 인간의 지적활동에 관한 정보를 얻는 방법으로는 발생사고법(thinking aloud), 내성법(introspection), 회상법(retrospection), 필기법(written inventories) 등이 있다. 발생사고법은 Dunker 이후에 많은 학자들을 거쳐 발전을 거듭했는데, 피실험자가 문제를 해결하는 과정에서 떠오르는 모든 생각들을 가능한 한 말로 소리내어 표현

하도록 하고, 그 내용을 카세트 테이프나 비디오 테이프로 녹음한 뒤 실험자가 후에 분석하는 기법이다. 위의 각 네 가지 연구방법들은 나름대로의 장점도 있지만 연구의 대상과 필요, 목적 등에 의해서 선택되어 편리성 및 객관성과 신뢰도를 보강해야 할 것이다.

### III. 연구방법 및 절차

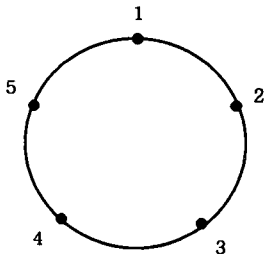
#### A. 표본설정

속초시 소재 남녀 고등학교(속초고등학교, 속초여자 고등학교) 1학년 학생 14명을 대상으로 수학교사 6명의 추천을 받아 남학생 9명과 여학생 5명을 선정하였다.

#### B. 검사문제의 선정

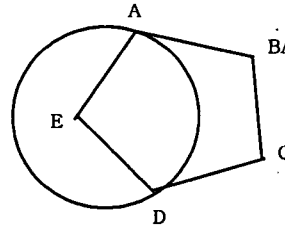
다양한 풀이과정과 전략을 포함하는 문제를 15문항(예비문항) 선정하여 전문가와 수학교사 6명에게 의뢰하여 타당도를 조사, 그 중 7문제를 사용하였다.

**문제1** 동일 원주상에 시계 방향으로 차례로 다섯 개의 점 1, 2, 3, 4, 5가 있다. 한 마리의 벌레가 이 원 위의 한 점에서 다른 점으로 시계방향으로 뛰어 다니고 있다. 숫자가 홀수인 점이면 한 칸을 뛰고 짝수인 점이면 두 칸을 뛴다. 벌레의 처음 위치가 5이고, 1995번 뛴다면 어느 숫자 위에 오겠는가?



**문제2** 아래 그림과 같이 정오각형 ABCDE의

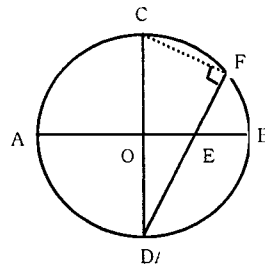
변 CD와 변 AB는 점 D와 A에서 원과 접하고 있다. 이 때, 열호AD의 중심각의 크기는?



**문제3** 직사각형의 이웃하지 않는 두 꼭지점이 (4, 3), (-4, -3)이고, 다른 두 꼭지점의 좌표도 각 성분이 정수값인 직사각형은 몇 개인가?

**문제4** 삼각형의 세 변의 길이가 11, 15, k이다. 주어진 삼각형이 둔각삼각형일 때, 정수 k값은 몇 가지인가?

**문제5** 아래 그림에서 선분AB, CD는 원의 중심 O에서 직교하는 두 개의 지름이고, 현 DF는 선분 AB와 점 E에서 만난다. DE=6이고, EF=2일 때, 원의 넓이는?



**문제6** 집합 {1, 2, 3, ..., 100}의 원소 n중에서  $n^2$ 의 십의 자리의 수가 홀수인 것은 몇 개인가?

**문제7** 좌표평면 위에 꼭지점의 좌표가 (0, 0), (0, 3), (3, 3), (3, 1), (5, 1), (5, 0)인 L자 모양의 영역이 있다. 원점을 지나는 직선으로 이 영역의 넓이를 이등분하려고 한다. 이 직선의 기울기는?

3. 검사실시

14명의 학생들을 10개 팀으로 나누어 7문항의 검사 문제를 풀게 하고 각 팀의 문제해결과정을 발생사고법으로 검사하였다. 5팀씩 두 번으로 나누어 검사를 실시하였는데 각 팀의 문제를 해결하는 과정을 5명의 보조 교사가 각각 다른 교실에서 감독하며 녹음을 하여 프로토콜을 작성하였다.

4. 실행결과 분석방법

1) 코딩조직의 구성 및 단계별 분류

선임연구에서 정리된 전략의 종류와 개발된 코딩조직을 살피고, 본 연구에서 만들어진 각각의 프로토콜에서 보여지는 의미 있는 전략과 사고과정을 새로운 코드로 첨가하고 거의 비슷한 코드의 통합과정을 거쳐서, 그 결과를 Polya의 문제해결의 각 단계에서 이루어지는 사고과정에 속하는 코드군으로 분류하였다. 이 과정에서 5명의 보조교사의 도움을 받아 각각의 프로토콜에 대한 코드화를 시도한 후 3명 이상이 일치하는 것은 문제 풀이 단계별로 그 단계에서 꼭 필요한 코드(사고과정의 요소)로 분류하였다.

2) 학생들의 문제풀이과정의 단계별 인지과정 분석

본 연구에서는 사고과정의 연구에서 흔히 그렇듯이 서술적 통계방법을 사용하였으며, 학생들의 문제풀이과정을 다음과 같은 방법으로 분석하였다.

(1) 각각의 코드화 된 프로토콜로써 각각의 문제별로 문제의 특징과 관련한 다양한 전략의 사용 등을 분석하고

(2) 또 이것을 각 단계별로 분석하여 학생들의 각 단계별 사고과정의 특징을 분석한다.

이해 단계의 사고과정	사고과정의 세분화
(1) 주어진 조건의 확인(P)	Re: 읽기 St: 출발점 확인 Df: 단어나 문장의 의미확인 Pr: (필요한) 용어의 성질 확인
(2) 다른 언어로 의역하기(L)	Vs:변수를 사용하여 나타내기 Es:식으로 표현하기 Fs:문제의 뜻에 따라가며 그림을 그리거나 그림에 나타내기 Gs:좌표에 나타내거나 그래프 그려보기 Bs:문제의 뜻에 따라가며 시행해보기
(3) 구해야할 것을 분명히 하기	O:구하려고하는 것을 분명히 하기

계획 단계의 사고과정	사고과정의 세분화
(1)그림그리기(F)	F1:문제상황을 순서대로 그리기 F2:문제의 요소사이의 관계를 그림으로 나타내기 F3:도형그리기 Gr:그래프그리기
(2)추상화하기(Ab)	V:변수도입하기 E:문제의 요소사이의 관계를 식으로 나타내기
(3)규칙성(패턴)찾기(R)	B:문제의 뜻에 맞게 실행해보기(규칙발견) Nr:비조직적인 경우의 수 구하기 Ns:조직적인 경우의 수 구하기 T:표 만들기 Od:순서도 만들기 Nt:아닌 것부터 제외해나가기

IV. 코딩조직의 구성과 분류

(4) 추측 (예상하고 확인)하기(G)	Um: 설명없이 제시된 불확실한 풀이방법 및 갑작스런 추측의 사용 Tr: 맹목적인 추측을 동반한 시행착오 방법 Ts: 조직적인 시행착오 방법
(5) 논리적 방법(A)	D: 연역적 사고 I: 귀납적 사고 E: 모순과 대우에 의한 사고
(6) 문제를 변형하여 풀기(M)	Bw: 거꾸로 풀기 Sv: 문제를 풀린 것으로 생각하기 Sm: 경험한 문제와 유사한 문제를 이용하여 생각하기 N: 일반화 하기 Sp: 특수화하기 S: 단순화하기 Op: 부분목표의 설정 Af: 보조요소의 사용 Pa: 여러경우로 나누어 풀기

실행 단계의 사고과정	사고과정의 세분화
(1) 실행(C)	C: 계획의 실행 U: 수학적 사실, 공식 등을 상기하기 Fm: 수학적 사실, 공식 등을 사용하기 Ar: 계산이나 암산하기 Ac: 계산기 사용 Cn: 세기 Z: 두 개 이상의 결과를 종합하여 정리하기 Co: 학생 스스로 목표 확인, 재인식 Pn: 사용중인 해법을 취소하고 새 해법 구하기

(2) 오류·곤란(RR)	Xs: 구조적 오류 Xe: 기계적 오류 Xc: 오류의 정정 Xf: 공식이나 풀이 방법을 틀리게 기억하고 있거나, 기억하지 못할 때 Go: 목표의 상실 Pn: 자신의 풀이과정을 잊어버리기
(3) 힌트(H)	Ex: 관찰자가 학생의 문제이해를 돕기 위해 문제 설명 ?!: 관찰자가 학생의 문제이해를 돕기 위한 발문을 할 때 ?x: 관찰자가 오류를 지적하기 위한 발문을 할 때 ?k: 학생이 질문을 할 때 H: 힌트 Hf: 공식 힌트

반성 단계의 사고과정	사고과정의 세분화
(1) 답 점검하기(As)	Pa: 조건은 다 사용하였는지 확인 Ba: 거꾸로 생각해보기 Ea: 답이 아니라고 가정해보기 Da: 추측의 경우-근거를 마련하기 Aa: 답쓰기 확인 Na: 답을 일반화하기
(2) 풀이과정 점검하기(Ps)	Ap: 계산의 확인 Fp: 공식의 적용 확인

## V. 자료의 분석 및 결과

### A. 학생들의 문제풀이 과정의 코드화

10팀의 주어진 7개의 검사문제를 해결하는 과정을 녹음하여 모두 프로토콜을 작성하여 다음과 같

이 분석하였다. 다음은 문제3번의 풀이과정이다.

문제3. 직사각형의 이웃하지 않는 두 꼭지점이 (4, 3), (-4, -3)이고, 다른 두 꼭지점의 좌표도 각 성분이 정수값인 직사각형은 몇 개인가?

	·Pa	·"대각선의 길이가 이거고 이 각이 직각이어야 하나까"	·조건사용 확인
반성	·Fp	·"음..."(피타고라스정리 확인)	·공식확인
	·Ap	·"음..."(계산 확인)	·계산확인
	·Pa	·"정수인 것은"	·조건확인
	·Aa	·"아 맞다. 이렇게 내개."	·답 확인

단계	코드	프로토콜	비고
문제이해	·Re	·문제읽기	·문제에 나오는 용어를 짚으면서 문제를 다시 읽고 핵심용어(직사각형)의 정의와 성질도 살핀다.
	·Df	·(읽으면서) "대각선"	
	·Df	·"각이 직각이어야 돼"	
	·O	·"대각선의 길이가 필요해"	
계획수립	·Op	·"대각선의 길이가 꼭 있어야 해. 대각선의 길이가 정해지면 그 대각선의 길이를 같게 변형해보면 될 것 같은데..."	·부분목표의 설정
	·Um	·"그러보면 하나밖에 안 그려질 것 같고..."	·불확실한 추측
	·V	·"다른 한 꼭지점의 좌표를 (x, y)라 놓아보자."	·변수도입
	·E	·"그러면 이 각도 직각이니까 두 점까지의 거리를 구해서 제곱의 합이 100이 나오게 하면 되겠네."	·식세우기
실행	·C	·"다른 한 꼭지점의 좌표를 (x, y)라 놓아보자."	·실행
	·Fm	·"그럼 피타고라스 정리에서"	·공식의 사용
	·Ar	· $\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} = 100$ ·계산하면, $2x^2+2y^2=50$ $x^2+y^2=25$ · $x=0$ 일 때 $y=-5$ , $x=0$ 일 때 $y=5$ . 두 번째 답이다.	·계산
실행	·Co	·지금 정수로 된 꼭지점을 모두 구하는 거니까 (3,4), (-3, -4)하고 (5,0), (-5, 0). 하나, 둘, 셋, 넷 개다.	·목표의 확인
	·Cn		·세기

문제 3에서는 다섯 가지의 전략의 사용이 예상되었으나 조금 다른 방법으로 문제를 해결한 팀이 있었다. 예상되었던 전략은 우선, (1)무작위로 문제의 뜻에 맞는 좌표를 찍어보려다 (-4, 3), (4, -3)이외의 것을 찾지 못하는 경우이고, (2) 두 번째는 조건에 맞는 그림들을 무작위로 그려보다가 만족하는 점들이 원에 있게 되는 규칙을 발견하는 경우이고, (3)주어진 두 점(4,3), (-4, -3)을 잇는 선을 대각선으로 하여 각이 직각이므로 원주각으로 생각하여 원을 찾는 경우이고, (4)직사각형의 성질인 두 대각선은 길이가 같고 서로 이등분한다는 것을 이용하여 두 점 사이의 거리의 반 5를 반지름으로 하는 원을 발견할 수 있을 것으로 기대했다. 그러나 대부분의 팀이 직사각형을 무작위로 그려보다가 규칙을 발견하지 못하여 '하나' 또는 '둘'이라고 답하였고, 성공한 팀에서는 변수를 도입해서 찾고자 하는 꼭지점을 (x,y)라 놓고 피타고라스 정리를 이용하여 식을 세우고 그것을 정리하여 원의 방정식을 찾았다. 거기서 정수해를 하나하나 찾아 문제를 해결하였다. 또 특이한 풀이로는 원점을 지나면서 대각선의 길이의 반이 5로 같아지는 좌표로 1사분면에서 x좌표를 1에서부터 2, 3, 4, 5로 바꾸어 가며 계산해보더니 1, 2는 안되고, 3, 4, 5에서 찾아져서 x좌표의 0, -3, -4도 생각하여 바로 5개라고 답하니 이 팀은 시행착오(Tr)로써 빠르고 정확하게 해결하였다.

### B. 학생들이 문제풀이 과정에서 보인 사고과정의 단계별 분석

문제이해의 단계에서 보이는 성공적으로 문제를 이해한 학생들의 사고과정의 특징은 첫째, Pr. (필요한) 용어의 성질을 확인하는 경우가 많다는 것이다. 주어진 조건을 확인하는 과정에서 Re: 읽기 나 St: 출발점확인 등에서의 차이보다는 주어진 용어의 정

확한 의미와 그 성질을 확인하느냐 안 하느냐 하는 것이 문제이해의 성공을 좌우하는 것으로 나타났다. 둘째, O. 성공적으로 문제를 이해한 학생들은 무엇을 구하려는지를 분명히 하는 버릇이 있었고 반대로 그렇지 않은 경우는 문제이해에서 실패했다.

계획 단계에서는 다양한 전략의 사용과 선택의 단계인데, 성공적으로 문제를 해결한 학생들의 특징은, 물론, 문제의 성질에 맞는 다양한 전략을 선택하고 정확하게 적용하는 경우이지만 구체적으로 살펴보면 첫째, Ab. 추상화전략이 의미 있게 사용되었다. 즉, 변수(V)를 도입하나 식을 세우기(E)에 능한 학생들일수록 그렇지 않은 학생보다는 더 어려운 문제까지 해결할 수 있는 경향을 나타냈다. 둘째는 N. 문제에서 요구하는 규칙을 발견하는 데 있어 문제상황을 순서대로 그리거나 문제의 뜻에 맞게 시행해보거나 추측을 사용하거나 하는 부분은 같았으나 규칙이 발견되었을 경우 성공적인 문제해결자들은 문제의 뜻에 비추어 그 근거를 마련하려하여 일반화 하고자하는 시도가 있었다. 셋째는 Op, Af, Pa. 부분 목표의 설정, 보조요소의 사용, 여러 경우로 나누어 풀기에 능숙한 학생들은 문제를 바르게 해결하였다.

실행의 단계에서 성공적인 문제해결자들은 오류를 줄이기 위해서 문제의 이해나 목표의 확인, 공식이나 지식의 확인, 계산의 확인 등을 필요할 때마다 시행하였다.

반성의 단계에서는 성공적인 문제해결자들은 Ba. 거꾸로 생각해 보는 경우가 많았으며, Da. 추측의 경우 그 근거를 다시 이야기하거나 Na. 답을 일반화해보려는 시도가 보였다. 또한 공식의 적용이나 계산이 맞았는지, 답을 바르게 썼는지 확인하는 경우가 많았다.

## VI. 결론 및 제언

본 연구를 수행하면서 얻은 의미 있는 결과는 무엇보다도

첫째, 연구자가 속해있는 지역에서 학생들의 문제 해결과정에서 일어나는 그들의 사고과정을 밖으로

꺼내는 작업을 성공적으로 했다는 점이다. 문제해결의 각 단계별로 학생들의 머릿속에서 일어날 수 있는 사고과정을 코드화하여 분류하는 것은 연구자의 완전한 창의적 작업은 아니지만 특히, 학생들의 사고과정을 분석하는 도구로서 연구자가 속해있는 교실에서 실험된 프로토콜로 다양한 발견전략, 사고형태 및 습관 등을 단계별로 코드화했다는 점이다.

둘째, 코딩조직을 구성하는 일과 코드화 작업은 학습현장에서 많은 응용을 제공할 수 있다는 점이다. 이를테면 본 연구에서처럼 문제해결에서 성공하는 학생과 그렇지 못한 학생의 특징을 아는 일이나 여러문제의 특징을 결정짓는 일, 학습현장에서 유용한 문제해결의 학습모델을 개발하거나, 문제해결의 오류형태를 분석하는 일 등에 이 연구 결과를 즉시 활용할 수 있다. 본 연구의 결과로서 학생들의 문제해결 단계별 사고과정의 특징을 알므로 해서 교실에서 교사가 학생들을 도울 때 교사 스스로 학생들의 입장에 서보고 학생들의 마음속에서 무엇이 일어나고 있는가 이해하려고 노력하는 데 도움을 얻을 수 있을 것이다.

셋째, 문제의 이해 단계에서 교사는 학생들이 문제의 조건을 모두 확인하는 태도를 길러주어야 한다. 특히, 모든 조건 각각의 의미와 서로의 연관성 및 성질을 이용할 태세를 갖춘 후에 다음 단계로 넘어갈 것을 주문해야 한다.

둘째, 계획 수립의 단계에서는 전략의 선택에서 시행착오를 겪는 경우에 주어진 조건의 정의나 성질에 맞는 추상화를 시도할 수 있게 권유할 수 있으며, 또한, 갑작스런 추측이나 무작위적인 시행착오 등의 사용에 있어서도 사후에 그 근거를 찾는 습관을 기를 수 있게 지도하여야 한다.

셋째, 실행단계에서 교사는 학생들로 하여금 '왜 그렇게 결정했는지', 혹은 '자신의 사고활동이 옳은지'를 스스로 끊임없이 반문하는 태도를 지닐 수 있게 지도하여야 한다.

넷째, 반성의 단계에서는 거꾸로 생각해 보거나 정답을 문제상황에 맞게 진술하였는지를 확인할 수 있도록 지도하여야 하고, 그 후에는 그 결과를 다른 문제로까지 일반화하거나 문제의 조건을 변화시켜 새로운 문제를 생각해 보거나 다른 풀이과정을 생각해 보는 태도를 지닐 수 있게 지도하여야 한다.

본 연구에서 분석해 보았던 학생들의 특징을 참고하여, 그들을 지도할 때, 그들이 할 수 있는 사고(학생들의 사고과정의 단계별 특징)를 발문이나 힌트 형태로 제공할 수 있을 것이다. 또한 수업을 진행하는 과정에서 주어진 문제들을 단계별로 지도할 필요도 있을 것이다. 이렇게 하면 여러 학생들의 서로 다른 의미 있는 전략을 선택하였다 하더라도 그들 각각은 그들 나름대로 자신의 문제해결을 단계별로 진행시켜 나갈 수 있게 되며, 미래에 새로운 문제를 대하더라도 각 단계에서 그들이 문제를 해결하기 위해 '무엇을 점검하고 어떤 전략을 어떻게 사용해야 하는지'에 대한 필요한 질문들을 스스로 던질 수 있게 될 것이다.

## 참 고 문 헌

- 강문봉 외 2인 (박교식, 류희찬)(1993), 문제해결 전략의 상세화 및 계열화; 수학교육세미나, 수학교육학 세미나 그룹
- 강욱기 외(1985), 수학과 문제해결력 신장을 위한 수업방법 개선 연구, 한국교육개발원
- 이영미(1991), 수학적 문제해결 과정에서 학생들이 보인 인지과정 분석, 이화여자대학교
- 신현성(1985), 수학적 문제해결 과정의 분석 및 풀이방법의 탐색; 강원대학교 논문집-과학기술연구, 제 22집
- \_\_\_\_\_ (1985), 문제해결 지도의 국제적 연구 동향; 산수과 문제해결력 신장을 위한 수업 방안 연구 세미나집, 한국 교육개발원
- 풀야, (1957), 어떻게 문제를 풀 것인가, 우정호(역)(1997), 서울, 천재교육
- Krulik, S, K & J. A. Rudnik(1987), Problem Solving: A Handbook for teacher. Allyn and Bacon. Inc.
- Larson, L. C (1983), Problem-Solving through Problems. Springer-Verlag New-York Inc.
- Shulman, L. S. & A. S. Elstain(1975), Studies of Problem-Solving; Judgement and Decision Making: Implication for Education Research, Peacock Publisher.



## Coding of students' thinking process in Polya's stages of problem solving

Kim, So-Gun<sup>1)</sup> · Shin, Hyun-Sung<sup>2)</sup>

### Abstract

The purpose of this study is to analyze thinking process in problem solving and to get some teaching materials to improve students' problem solving abilities.

For this study, 14 girl and boy students in highschool were tested with 7 testing questions. The whole process of students' problem solving was observed by using 'Thinking aloud', recorded by Audio Tape and finally drawn up to Protocol. On the basis of that Protocol, coding system was set up and characteristics of thinking process in each stage were analyzed.

-In the stage of planning, successful problem solvers tried to check the properties of words included in problems(Pr) and made it clear that they were seeking(O)

-In the stage of planning, students used abstraction strategy(Ab, making equation(E) or using variable(V)) appropriately could solve more difficult problems. Successful problem solvers turned used unsystematical trial into systematical method and were good at using partial objects, assistant factors.

- In the stage of carrying out the plan, successful problem solvers to reduce the error, check the purpose, used formula, knowledge and calculation.

-In the looking back stage, successful problem solvers generalized the answer and checked the total process.

---

1) Kang-Won, In-Je Middle School

2) Dept. of Mathematics Education, Kang-Won University