

## 스플라인 曲面을 利用한 土工量 決定에 關한 研究 On the Earthwork Volume Decision Using Spline Surfaces

류재철\* · 이승훈\*\* · 문두열\*\*\*

Yoo, Jaechil · Lee, Seung-Hoon · Mun, Du-Yeoul

### 要 旨

건설시공현장에서 토공량 결정은 전체공사비 중에 큰 비중을 차지하므로 정확한 계산방법이 있어야 한다. 토공량을 계산하는 현행방법은 격자점 사이의 횡단면의 간격을 선형(사다리꼴법칙)이나 비선형(심프슨법칙)으로 가정한다. 일반적으로 비선형법칙이 선형법칙보다 더 정확한 것으로 나타나 있다. 그러나 앞에서 언급된 모든 방법은 예리한 코너부분이나 두 점 사이의 갑작스런 지형변화에 대처할 수 없는 결점을 내포하고 있다. 본 논문에서는 B-스플라인을 이용하여 주어진 데이터를 지나는 스플라인 곡면을 구하는 알고리즘을 살펴보고, 스플라인 곡면을 이용하여 토공량을 근사적으로 구하는 방법을 제시한다. 스플라인 곡면을 이용한 방법이 Chen과 Lin이 제시한 방법보다 더 정확함을 몇 가지 예를 통해 보인다.

### ABSTRACT

The calculation of earthwork plays a major role in plan or design of many civil engineering projects, and thus it has become very important to advanced the accuracy of earthwork calculation. Current methods used for estimating the volume of pit excavation assumes that the ground profile between the grid points is linear(trapezoidal rule), or nonlinear(simpson's formulas). Generally speaking, the nonlinear profile formulas provide better accuracy than the linear profile formulas. However, all the formulas mentioned have a common drawback to ground profile, such as sharp corners or the grid points of any two straight lines. In this paper, we propose an algorithm of finding a spline surface which interpolates the given data and an appropriate method to calculate the earthwork. We present some computational results showing that our proposed method provides better accuracy than Chen and Lin's method.

## 1. 서 론

### 1.1 연구의 필요성

대규모의 건설공사나 항만공사의 埋立土工量 규모를 결정할 때 土工작업은 총 공사비의 상당한 부분을 차지하므로 경제적인 시공과 비용절감을 위하여 정확한 토공량의 계산이 필요하다. 더욱이 산악지나 저수지, 호수, 해안·해변지역같이 지형의 형상이 복잡한 경우에도 적용할 수 있는 토공량의 계산방법에 대한 연구는 중요하다.

토공량 결정에 대한 연구는 1980년대 초까지만 하여도 지형의 횡단면의 표면 곡률을 단순히 線形으로 가정한 사다리꼴법칙, 배형거법, 삼각형법, 좌표법, 횡단면법

등으로 각 구간의 면적을 계산한 후 양단면평균법이나 각구공식, 중앙단면법 등으로 구하였다. 1990년도 이후에는 지형경계를 곡률로 가정하여 각각 한 방향으로 2차, 3차식 그리고 1차와 2차의 조합식으로 면적을 구하는 동시에 계산식이 약간 복잡하여지지만 지형의 격자단면을 양방향으로 동시에 2, 3차 식을 적용하여 면·체적식을 유도하는 연구가 주류를 이루었다. 그런데 수치표고모형을 위한 컴퓨터의 보급과 계산기능의 발달에도 불구하고 토공량 계산방법은 舊방법인 사다리꼴법칙이나 좌표법, 등간격의 심프슨 법칙 등으로 면·체적을 구하고 있다. 다시 말해 현장의 지형조건에 맞는 정확한 이론에 근거한 수식의 정립과 적용을 하지 않고 일정 간격으로 주어진 표고자료의 간격을 무조건 아주 미세하게 나누어 경계식을 직선으로 가정한 사다리꼴법칙으로 구하거나 경계의 변곡점을 고려하지 않고 등간격의 심프슨 법칙을 획일적으로 단순히 적용하고 있다. 불규칙적이고

\*동의대학교 수학 컴퓨터통계학부 교수

\*\*동의대학교 기계 산업시스템공학부 교수

\*\*\*동의대학교 토목 도시공학부 교수

변화가 심한 지형표면의 전체 경계식을 단순히 선형, 비선형으로만 가정하는 면적 및 체적의 계산식은 실제의 지형과 부합되지 않으므로 불합리한 면이 많다. 그리고 지금까지는 각 이론식의 검정방법으로 절대값에 가까운 정확도를 구할 수 없어서 지거간격을 아주 작게 취하는 방법이나 미리 정해진 2~3차 식의 수학적 곡선을 면적 적분하거나, 모형수조 속에 표준사를 넣어서 기준 값으로 취하여 검산하는 방법 등 별 다른 방안이 없었다.

### 1.2 연구의 연혁

토공량 계산에서 가장 중요한 것은 실제 지형표면의 형상과 부합되는 경계식의 결정인데 1980년도 이전에는 주로 1차 선형식에 기초로 한 사다리꼴법칙이나 좌표법이 주된 방법이었다. 지형표면의 비선형 해석은 1983년 Ahmed가 변곡점을 고려한 2차 포물선과 1차 직선을 혼합한 면적식을 제시하였고<sup>1)</sup> 그밖에 불규칙한 지형의 해석은 1983년 Hoffman,<sup>10)</sup> 1984년 Wolf,<sup>2)</sup> Wheatly,<sup>9)</sup> 1985년 Wong<sup>12)</sup>의 연구가 있었고, 1987년 El-Hassan은 보간다항식에 의해 심프슨 제 2법칙을 해석하여 사다리꼴 법칙과 면적계산을 비교하였다.<sup>7)</sup> 1988년 Easa는 Lagrange 다항식에 의한 심프슨 제 1법칙을 유도한 후 다시 부등간격에 적용이 용이하도록 응용하였다. 그리고 실제 수치 예를 들었는데 구간을 짝수구간으로 나누어 변곡점을 고려한 부등간격의 면적계산을 하였으며, 짝수 구간이외 나머지 남은 1구간의 경계식은 미분식으로 스무싱하여 구하였다.<sup>5)</sup> 1989년 Chambers는 등간격의 Easa 법칙을 이용하여 종·횡단 경계식을 보간다항식에 의한 심프슨 법칙을 유도한 후 x, y방향으로 구간이 2개면 심프슨1법칙, 3개면 심프슨2법칙에 의한 각 방향에 중적분으로 이들의 비선형 부등간격에 의한 점고법으로 토공량을 구하였다.<sup>3)</sup> 1991년 Easa는 원추형의 체적계산식을 유

도하였고, 양단면 평균법의 결점은 절·성토단면의 양단의 면적차이가 크면 큰 오차를 수반한다고 하였으며 그리고 Chen과 Lin은 3차 스플라인 보간 다항식을 이용하여 절토량을 구하는 방법을 제시하였고, 2종류의 모형지형을 개발하여 점고법과 Chamber법과의 정확도를 비교 분석 하였다.<sup>6)</sup> 1998년 Easa는 정확도에서는 Chen과 Lin이 제시한 방법보다는 좋지 않지만 사용하기에는 좀 더 편리한 3차 Hermite 다항식을 이용한 토공량 계산 방법을 제시하였다.<sup>4)</sup> 언급한 토공량 계산 기법들을 표 1과 같이 비교, 정리할 수 있다.

### 1.3 연구의 목표

Chen과 Lin이 제시한 방법을 일반화하여 실제지형과 가장 부합되는 3차 스플라인 곡면을 위한 계산식과 알고리즘을 제시하고자한다. Chen과 Lin이 제시한 방법은 축(x축 또는 y축) 한 개를 고정하여 스플라인 곡선을 구하고 그 곡선들을 이용하여 단면적을 구한 후, 그 단면적들의 평균을 이용하여 근사적인 토공량을 결정한다. 이는 토공량을 결정함에 있어, 한 축은 3차로 근사시키고, 다른 한 축은 1차로 근사시키는 것이다. 그러므로 두 축 모두를 각각 3차 스플라인으로 근사시키는 방법에 의한 토공량 결정은 Chen과 Lin이 제시한 방법보다 더욱 정확성을 갖는다. 두 축 모두를 각각 3차 스플라인으로 근사시키는 문제는 주어진 3차원 데이터를 지나는 스플라인 곡면을 구하는 문제와 같다. 따라서 본 연구는 주어진 3차원 데이터를 지나는 스플라인 곡면을 구하는 알고리즘을 제시함으로써 좀더 정확한 토공량 결정을 목표로 한다.

### 1.4 연구의 진행 방법

자연경계조건과 주어진 3차원 데이터를 지나는 3차 스플라인 곡면을 구하기 위하여 우리는 3차 B-스플라인을

표 1. 토공량 계산기법 비교

구분(저자, 방법)	사용기법	격자간격
Surveying Texts	사다리꼴 공식 적용	등간격, 부등간격
Ahmed(1983)	2차 포물선과 1차 직선 혼합모형 적용	등간격, 부등간격
Hassan(1987)	심프슨 공식 적용	등간격, 부등간격
Easa(1988)	심프슨 공식 적용	등간격
Chambers(1989)	심프슨 공식 적용	등간격, 부등간격
Chen과 Lin(1991)	3차 스플라인 다항식 적용	등간격, 부등간격
Easa(1998)	3차 Hermite 다항식 적용	등간격, 부등간격
문두열(2000)	x, y 양방향을 고려한 3차 스플라인 다항식 적용	등간격, 부등간격
본 연구	3차 스플라인 곡면식 적용	등간격, 부등간격

사용할 것이다. 그러므로 B-스플라인과 스플라인에 대한 기호 및 잘 알려진 수학적 결과를 증명 없이 기술한다 (필요한 수학적 증명은 참고서적<sup>8),11)</sup>을 참조). 스플라인에 대한 흥미로운 수학적 결과는 무척 많지만 본 논문에서는 스플라인 곡면을 기술하고 또 그것을 이용한 토공량 계산을 위한 알고리즘에 중점을 두므로 알고리즘과 프로그래밍에 필요한 수학적 내용만을 2장에서 기술한다. 본 논문에서 제시된 모든 수치적 계산 결과는 Maple 프로그램을 이용하여 계산하였으며, Chen과 Lin이 제시한 방법과 본 논문에서 제시한 방법의 정확도를 비교, 분석한다.

## 2. 스플라인 곡면을 이용한 토공량 계산

### 2.1 스플라인, B-스플라인의 기본적인 특징 및 용어에 대한 설명

평면상의 두 점  $c_1=(x_1, y_1)$ 과  $c_2=(x_2, y_2)$ 가 주어졌다고 하자. 두 점을 잇는 직선을 매개변수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p(t|c_1, c_2; t_2, t_3) = \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} c_1 + \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} c_2, \quad t \in [t_2, t_3] \quad (2-1)$$

여기서 매개변수  $t_2$ 와  $t_3$ 는  $t_2 < t_3$ 을 만족하는 임의의 실수라 하자. 위 직선은 매개변수  $t_2$ 와  $t_3$ 의 선택에 관계없음에 유의하라. 평면상의 임의의  $n$ 개의 점  $(c_i)_{i=1}^n$ 을 잇는 직선은 식 (2-1)을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$f(t) = \begin{cases} p(t|c_1, c_2; t_2, t_3), & t \in [t_2, t_3) \\ p(t|c_2, c_3; t_3, t_4), & t \in [t_3, t_4) \\ \vdots \\ p(t|c_{n-1}, c_n; t_n, t_{n+1}), & t \in [t_n, t_{n+1}) \end{cases} \quad (2-2)$$

여기서  $n$ 개의 실수  $(t_i)_{i=2}^{n+1}$ 는  $t_i < t_{i+1} (i=2, 3, \dots, n)$ 을 만족하도록 한다.

점  $(c_i)_{i=1}^n$ 을 곡선의 제어점(control points)이라 하고,  $(t_i)_{i=2}^{n+1}$ 을 곡선의 knots 또는 knot 벡터라 한다. 기호를 간략히 하여  $p(t|c_{i-1}, c_i; t_i, t_{i+1})$ 을  $p_{i,1}(t)$ 라고 하고, 상수함수를 다음과 같이

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2-3)$$

정의하면 식 (2-2)은 다음과 같이 간략히 표현된다.

$$f(t) = \sum_{i=2}^n p_{i,1}(t) B_{i,0}(t) \quad (2-4)$$

식 (2-2)와 (2-4)의 표현을 일반화하여 차수가 높은 곡선에 적용하자. 먼저 2차 스플라인 곡선을 설명하자. 평면상에 제어점  $c_1, c_2, c_3$ 에 대하여 knots를  $(t_i)_{i=2}^5$ ,  $t_2 \leq t_3 < t_4 \leq t_5$ 라 하자. 그러면  $c_1, c_2$ 을 잇는 직선과  $c_2, c_3$ 을 잇는 직선을 이용하여 다음과 같이 2차 스플라인 곡선을 얻을 수 있다.

$$p(t|c_1, c_2, c_3; t_2, t_3, t_4, t_5) = \frac{t_4 - t}{t_4 - t_3} p(t|c_1, c_2; t_2, t_3) + \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} p(t|c_2, c_3; t_3, t_4) \quad (2-5)$$

여기서  $t$ 는  $[t_3, t_4]$ 에 속하는 변수이다. 임의의  $n$ 개의 제어점  $(c_i)_{i=1}^n$ 에 대해서는 knots 벡터  $(t_i)_{i=2}^{n+2}$ ,  $t_2 \leq t_3 < \dots < t_{n+1} \leq t_{n+2}$ 을 사용하여 식 (2-5)에 의해 다음과 같이 스플라인 곡선을 정의할 수 있다.

$$f(t) = \begin{cases} p(t|c_1, c_2, c_3; t_2, t_3, t_4, t_5), & t_3 \leq t \leq t_4, \\ p(t|c_2, c_3, c_4; t_3, t_4, t_5, t_6), & t_4 \leq t \leq t_5, \\ \vdots \\ p(t|c_{n-2}, c_{n-1}, c_n; t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{cases} \quad (2-6)$$

기호를 간략히 하여  $p(t|c_{i-2}, c_{i-1}, c_i; t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2})$ 을  $p_{i,2}(t)$ 라고 쓰자. 그러면 식 (2-4)와 같이 식 (2-6)을 다음과 같은 간단한 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(t) = \sum_{i=3}^n p_{i,2}(t) B_{i,0}(t) \quad (2-7)$$

3차의 스플라인 곡선도 비슷하게 정의되며, 식 (2-7)과 같이 간단한 형태로 표현할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{i=4}^n p_{i,3}(t) B_{i,0}(t). \quad (2-8)$$

여기서

$$\begin{aligned} p_{i,3}(t) &= p(t|c_{i-3}, c_{i-2}, c_{i-1}, c_i; t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}) \\ &= \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} p(t|c_{i-3}, c_{i-2}, c_{i-1}; t_{i-2}, t_{i-1}, t_{i+1}, t_{i+2}) \\ &\quad + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} p(t|c_{i-2}, c_{i-1}, c_i; t_{i-1}, t_i, t_{i+2}, t_{i+3}) \end{aligned}$$

$t$ 은  $[t_i, t_{i+1}]$ 에 속하는 변수이다.

또한 식 (2-4), (2-7), (2-8)을 제어점에 의한 표현으로 바꾸면 다음과 같이 표현할 수 있다.<sup>8),11)</sup>

$$f(t) = \sum_{j=1}^n c_j B_{j,d}(t) \quad (2-9)$$

여기서

$$B_{j,d}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+d}-t_j} B_{j,d-1}(t) + \frac{t_{j+1+d}-t}{t_{j+1+d}-t_{j+1}} B_{j+1,d-1}(t), \quad d=1, 2, 3. \quad (2-10)$$

함수  $B_{j,d}=B_{j,d}(t)$ 을  $d$ 차의 B-스플라인이라고 부른다. knots 벡터가 구체적으로 주어지면 위의 반복식에 의해  $d$ 차의 B-스플라인을 생성할 수 있고, 그것의 적절한 일차 결합으로 부분적으로  $d$ 차인 스플라인을 생성할 수 있음에 유의하자. 구체적으로  $n$ 개의 측량 데이터  $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ 이 주어졌을 때, 적당한 knots 벡터를 선택하여  $d$ 차의 B-스플라인을 생성할 수 있고, 식 (2-9)에 의해 생성된 선형시스템의 해로써 주어진 데이터를 지나는 스플라인을 구할 수 있다. 이 방법은 Chen과 Lin이 제시한 방법 중에서 스플라인 곡선을 구하는 방법보다 일반적이다. 왜냐하면 Chen과 Lin이 이용한 자연경계조건을 만족하는 스플라인 곡선은 식 (2-9)에서 주어진 데이터와 자연경계조건을 적용한 선형시스템의 해를 이용하여 똑같이 얻을 수 있기 때문이다. 더욱이 인위적으로 주어지는 경계조건들과 상관없이 주어진 데이터를 지나는 스플라인 곡선을 구할 수 있다. 특히 3차원 문제에서는 Chen과 Lin이 제시한 방법으로는 확장이 불가능하지만 B-스플라인을 이용하면 주어진 3차원 데이터를 지나는 스플라인 곡면의 생성이 가능해진다.

몇 가지 B-스플라인의 예를 살펴보자.

#### 예 1. (1차 B-스플라인)

$$B_{j,1}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j} B_{j,0}(t) + \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_{j+1}} B_{j+1,0}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, & t_j \leq t < t_{j+1} \\ \frac{t_{j+2}-t}{t_{j+2}-t_{j+1}}, & t_{j+1} \leq t < t_{j+2} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

B-스플라인  $B_{j,d}$ 는 knots 벡터  $(t_i)_{i=j}^{j+d+1}$ 에 의해서만 주어짐에 유의하고 B-스플라인을 좀더 잘 이해하기 위하여  $B_{j,d}(t) = B(t|t_j, \dots, t_{j+d+1})$ 라고 하자.

만약  $d \geq 2$ 이고  $(t_j, \dots, t_{j+d}, t_{j+d+1}) = (a, b, \dots, c, d)$ 라고 하면,

$$B(t|a, b, \dots, c, d)(t) = \frac{t-a}{c-a} B(t|a, b, \dots, c)(t) + \frac{d-t}{d-b} B(t|b, \dots, c, d)(t). \quad (2-11)$$

#### 예 2. (2차 B-스플라인)

1.  $B(t|0, 0, 0, 1) = (1-t)B(t|0, 0, 1) = (1-t)^2 B(t|0, 1).$
2.  $B(t|0, 0, 1, 2) = t \left( 2 - \frac{3}{2}t \right) B(t|0, 1) + \frac{1}{2} (2-t)^2 B(t|1, 2).$
3.  $B(t|0, 1, 2, 3) = \frac{t^2}{2} B(t|0, 1) + \left( \frac{3}{4} - \left( t - \frac{3}{2} \right)^2 \right) B(t|1, 2) + \frac{(3-t)^2}{2} B(t|2, 3).$
4.  $B(t|0, 1, 1, 2) = t^2 B(t|0, 1) + (2-t)^2 B(t|1, 2).$
5.  $B(t|0, 0, 1, 1) = 2t(1-t)B(t|0, 1).$
6.  $B(t|0, 1, 2, 2) = \frac{1}{2} t^2 B(t|0, 1) + (2-t) \left( \frac{3}{2} t - 1 \right) B(t|1, 2).$
7.  $B(t|0, 1, 1, 1) = t^2 B(t|0, 1).$

위의 2차 B-스플라인들의 그래프는 그림 1과 같다.

#### 예 3. (3차 B-스플라인)

3차 B-스플라인의 몇 가지 예,  $B(t|0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $B(t|0, 0, 0, 1, 2)$ ,  $B(t|0, 0, 1, 2, 3)$ ,  $B(t|0, 1, 2, 3, 4)$ ,  $B(t|0, 0, 2, 2, 4)$ ,  $B(t|0, 1, 2, 2, 4)$ ,  $B(t|0, 2, 2, 2, 4)$ .

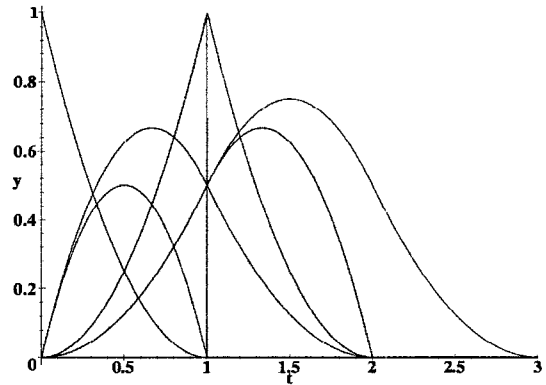


그림 1. 2차 B-스플라인의 그래프

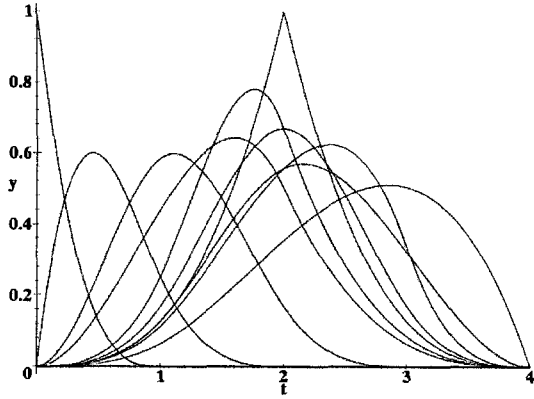


그림 2. 3차 B-스플라인의 그래프

2, 4), B(t|0, 1, 3, 3, 4), B(t|0, 1, 2, 4, 4), B(t|0, 1, 4, 4, 4)등의 그래프는 그림 2와 같다.

## 2.2 자연경계조건을 만족하는 스플라인 곡면

주어진 2차원 데이터  $(x_i, y_i)_{i=1}^n$  이 주어졌을 때,  $g(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n$ 와 자연경계조건을 만족하는 3차 스플라인 곡선이 유일하게 존재하기 위한 충분조건인 Schoenberg-Whitney nesting 조건을 만족하는 knots 벡터를 선택할 수 있다. 예를 들면, knots 벡터  $(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_n, x_n, x_n)$ 은 자연경계조건을 만족하고 주어진  $n$ 개의 데이터를 만족하는 유일한 3차 스플라인 곡선을 생성시키는  $(n+2)$ 개의 일차독립인 3차 B-스플라인 함수들을 유도한다.

이제 3차원 데이터  $(x_i, y_i, f_{ij})_{i=1, j=1}^{m_1, m_2}$  을 지나고 자연경계조건을 만족하는 3차 스플라인 곡면을 구하자. 여기서  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m_1} = b, c = y_1 < y_2 < \dots < y_{m_2} = d$  라고 하고,  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ 라고 하자.

$x$ 축과  $y$ 축에 대한 knots 벡터를 각각  $(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, \dots, x_{m_1-1}, x_{m_1}, x_{m_1}, x_{m_1}, x_{m_1})$ 와  $(y_1, y_1, y_1, y_1, y_2, \dots, y_{m_2-1}, y_{m_2}, y_{m_2}, y_{m_2}, y_{m_2})$ 을 택하면 Schoenberg-Whitney nesting 조건을 각각 만족한다.<sup>11)</sup> 그러므로  $x$ 축에 대한  $(m_1+2)$ 개의 3차 B-스플라인  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \phi_{m_1+2}$ 을 생성하고,  $y$ 축에 대한  $(m_2+2)$ 개의 3차 B-스플라인  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m_2}, \psi_{m_2+1}, \psi_{m_2+2}$ 을 생성함으로써 공간  $S_1 = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \phi_{m_1+2}\}$ , 공간  $S_2 = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m_2}, \psi_{m_2+1}, \psi_{m_2+2}\}$ 라고 정의하면, 자연경계조건을 만족하고  $(m_1 \times m_2)$ 개의 주어진 데이터를 지나는 3차 스플라인 곡면  $g(x, y)$ 은 tensor

product 공간  $S_1 \otimes S_2$ 에서 유일하게 존재하고 다음과 같이 구할 수 있다.

$$g(x, y) = \sum_{p=1}^{m_1+2} \sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \psi_q(y) \phi_p(x) \quad (2-12)$$

라고 하면 주어진 데이터를 지나야 함으로 모든  $i, j$ 에 대하여

$$\sum_{p=1}^{m_1+2} \sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \psi_q(y_i) \phi_p(x_i) = f_{i,j} \quad (2-13)$$

을 만족하여야 한다. 식 (2-13)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{p=1}^{m_1+2} d_{p,j} \phi_p(x_i) = f_{i,j} \quad (2-14)$$

$$\sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \psi_q(y_j) = d_{p,j} \quad (2-15)$$

자연경계조건을 고려하면 식 (2-14)은 행렬의 크기가  $(m_1+2) \times (m_1+2)$ 인 유일한 해를 갖는 선형시스템이며, 이 선형시스템의 해를 이용하여 다시 자연경계조건을 고려하면 식 (2-15)도 행렬의 크기가  $(m_2+2) \times (m_2+2)$ 인 유일한 해를 갖는 선형시스템이다. 식 (2-15)로부터 유도된 해를 식 (2-12)에 대입함으로써 구하고자 하는 3차 스플라인 곡면을 구할 수 있다.

그러므로 3차 스플라인 곡면을 이용한 체적은 식 (2-12)으로부터 다음과 같이 쉽게 계산된다.

$$\sum_{p=1}^{m_1+2} \sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \int_c^d \psi_q(y) dy \int_a^b \phi_p(x) dx \quad (2-16)$$

식 (2-14)을 구체적인 선형시스템으로 표현하면, 임의의  $j = 1, 2, \dots, m_2$ 에 대하여

$$\begin{pmatrix} \phi_1''(x_1) & \phi_2''(x_1) & \dots & \phi_{m_1+2}''(x_1) \\ \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_{m_1+2}(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_{m_1+2}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1(x_{m_1}) & \phi_2(x_{m_1}) & \dots & \phi_{m_1+2}(x_{m_1}) \\ \phi_1''(x_{m_1}) & \phi_2''(x_{m_1}) & \dots & \phi_{m_1+2}''(x_{m_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,j} \\ d_{2,j} \\ \vdots \\ d_{m_1+2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1, y_j) \\ f(x_2, y_j) \\ \vdots \\ f(x_{m_1}, y_j) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

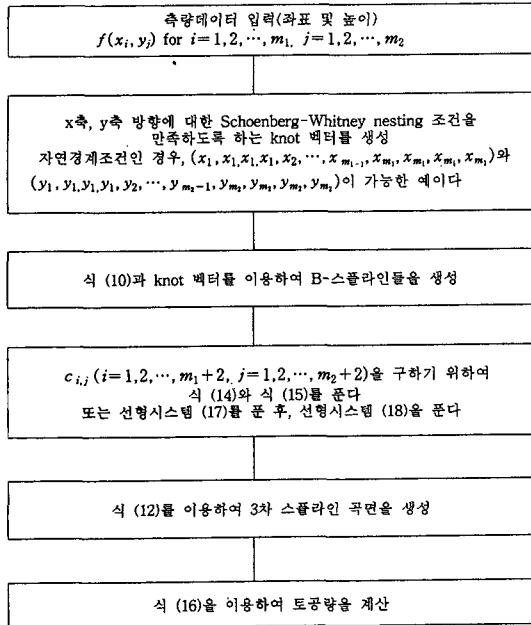


그림 3. 흐름도

와 같이 쓸 수 있고, 마찬가지로 임의의  $i = 1, 2, \dots, m_1 + 2$ 에 대하여 식 (2-15)은 다음과 같이 표현

$$\begin{pmatrix} \Psi_1''(y_1) & \Psi_2''(y_1) & \dots & \Psi_{m_2+2}''(y_1) \\ \Psi_1(y_1) & \Psi_2(y_1) & \dots & \Psi_{m_2+2}(y_1) \\ \Psi_1(y_2) & \Psi_2(y_2) & \dots & \Psi_{m_2+2}(y_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Psi_1(y_{m_2}) & \Psi_2(y_{m_2}) & \dots & \Psi_{m_2+2}(y_{m_2}) \\ \Psi_1''(y_{m_2}) & \Psi_2''(y_{m_2}) & \dots & \Psi_{m_2+2}''(y_{m_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i,1} \\ c_{i,2} \\ \vdots \\ c_{i,m_2+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ \vdots \\ d_{i,m_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

선형시스템 (2-17)을 각각 풀고, 그것들을 이용하여 다시 선형시스템 (2-18)을 각각 풀면 제어점  $c_{i,j}(i = 1, 2, \dots, m_1 + 2, j = 1, 2, \dots, m_2 + 2)$ 을 구할 수 있고 그 값들을 식 (2-16)에 적용하면 우리가 제시하고자하는 스플라인 곡면을 이용한 토공량을 계산한다. 위의 과정을 요약하면 그림 3의 흐름도와 같이 나타낼 수 있다.

### 3. 실험 및 고찰

본 연구의 실험을 위한 대상지형은 1991년 발표된

Chen과 Lin이 제시한 예제와 다른 세 모델을 설정하여 Chen과 Lin이 제시한 방법과 본 연구에서 제시된 방법을 직접 비교하였다. Chen과 Lin이 제시한 모델을 이용하여 Chen과 Lin이 제시한 방법과 본 연구에서 제시한 방법을 직접 비교하는 것은 좋지 않다. 왜냐하면 제시된 모델의 한 방향이 각각 상수이거나 직선이기 때문이다. 그러므로 두 방법을 객관적으로 비교하기 위하여 세 모델을 설정하였다. 각 모델의 정의된 구역을 가로축(x) 전체 길이가 120 m이고 세로축(y)이 90 m인 경우로 제한했으며 주어지는 데이터를 불규칙적인 격자점에서 주어진다고 가정하였다. 즉 첫 번째 경우는 x축의 1, 21, 41, 61, 81, 101, 121과 y축의 1, 26, 36, 66, 81, 91에 의한 격자점에서의 각 함수 값이 주어진 데이터이고(Case 1), 두 번째 경우는 x축의 1, 16, 46, 56, 91, 101, 121과 y축의 1, 19, 37, 55, 73, 91에 의한 격자점에서의 각 함수 값이 주어진 데이터이고(Case 2), 세 번째 경우는 x축의 1, 16, 46, 56, 91, 101, 121과 y축의 1, 26, 36, 66, 81, 91에 의한 격자점에서의 각 함수 값이 주어진 데이터(Case 3)로 하였다.

#### 3.1 실험 1

실험1에서는 아래의 함수식에 의하여 표고를 구하며 간격을 달리(case1, case2, case3)하여 토공량을 계산하였다.

$$z = f(x, y) = \frac{y^2}{1000} + \frac{xy^2}{10000} + \frac{x^2}{1000},$$

$$1 \leq x \leq 121, 1 \leq y \leq 91$$

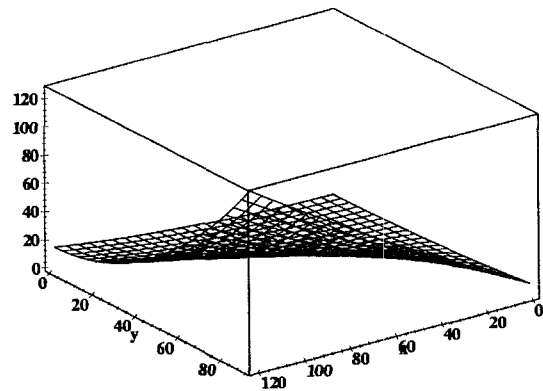


그림 4.  $z = f(x, y) = \frac{y^2}{1000} + \frac{xy^2}{10000} + \frac{x^2}{1000}$  의 모형지형

표 2. 실험 1에 대한 계산 결과

	Chen과 Lin이 제시한 방법		본 연구에서 제시한 방법	
	토공량(m <sup>3</sup> )	오차(%)	토공량(m <sup>3</sup> )	오차(%)
case 1	274,045.91	2.58	268,039.55	0.33
case 2	271,342.80	1.57	267,681.53	0.19
case 3	274,018.08	2.57	268,011.72	0.32

$$V = \int_1^{91} \int_1^{121} f(x, y) dx dy = 267,160.68 \text{ m}^3$$

Chen과 Lin이 제시한 방법과 본 연구에서 제시한 스플라인 곡면을 이용한 방법에 의해 계산한 실험1에 대한 결과는 표 2와 같다.

### 3.2 실험 2

실험2에서는 아래의 함수식에 의하여 표고를 구하며 간격을 달리(case1, case2, case3)하여 토공량을 계산하였다.

$$z = f(x, y) = \frac{20 + y\sqrt{y}}{10\sqrt{x}}, \quad 1 \leq x \leq 121, \quad 1 \leq y \leq 91$$

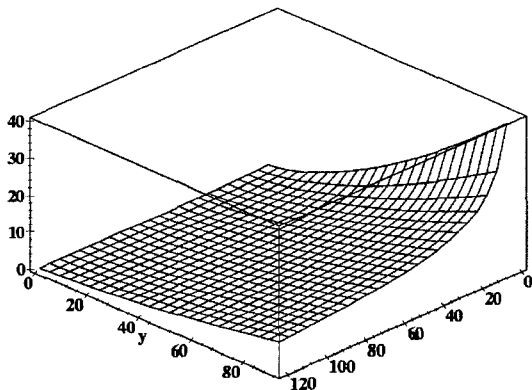


그림 5.  $z = f(x, y) = \frac{20 + y\sqrt{y}}{10\sqrt{x}}$  의 모형지형

표 3. 실험 2에 대한 계산 결과

	Chen과 Lin이 제시한 방법		본 연구에서 제시한 방법	
	토공량(m <sup>3</sup> )	오차(%)	토공량(m <sup>3</sup> )	오차(%)
case 1	80,037.00	19.8	79,013.37	18.3
case 2	69,286.20	3.7	68,725.17	2.9
case 3	69,773.40	4.5	68,881.02	3.1

$$V = \int_1^{91} \int_1^{121} f(x, y) dx dy = 66,795,76421 \text{ m}^3$$

Chen과 Lin이 제시한 방법과 본 연구에서 제시한 스플라인 곡면을 이용한 방법에 의해 계산한 실험2에 대한 결과는 표 3과 같다.

### 3.3 실험 3

실험3에서는 아래의 함수식에 의하여 표고를 구하며 간격을 달리(case1, case2, case3)하여 토공량을 계산하였다.

$$z = f(x, y) = 50e^{-\left\{ \left( \frac{x-60}{x} \right)^2 + \left( \frac{y-45}{30} \right)^2 \right\}}, \quad 1 \leq x \leq 121, \quad 1 \leq y \leq 91$$

$$V = \int_1^{91} \int_1^{121} f(x, y) dx dy = 175,877.6457 \text{ m}^3$$

Chen과 Lin이 제시한 방법과 본 연구에서 제시한 스플라인 곡면을 이용한 방법에 의해 계산한 실험3에 대한 결과는 표 4와 같다.

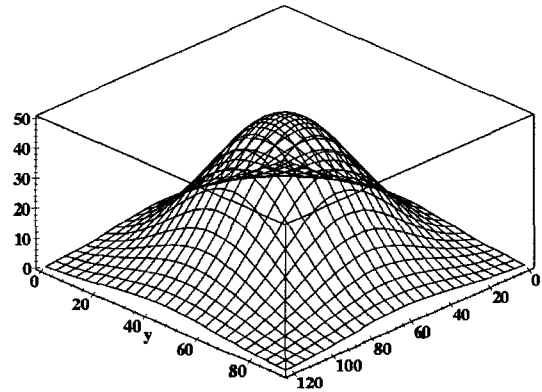


그림 6.  $z = f(x, y) = 50e^{-\left\{ \left( \frac{x-60}{x} \right)^2 + \left( \frac{y-45}{30} \right)^2 \right\}}$  의 모형지형

표 4. 실험 3에 대한 계산 결과

	Chen과 Lin이 제시한 방법		본 연구에서 제시한 방법	
	토공량(m <sup>3</sup> )	오차(%)	토공량(m <sup>3</sup> )	오차(%)
case 1	167,162.75	5.0	176,734.67	0.5
case 2	173,863.97	1.1	176,747.92	0.5
case 3	166,576.39	5.2	176,114.72	0.1

#### 4. 결 론

Chen과 Lin이 제시한 방법은 한 좌표축(x축 또는 y축)을 고정된 후, 고정된 축에서의 2차원 데이터를 이용하여 3차 스플라인 곡선을 구하고 그 곡선을 사용하여 단면적을 구하며 그 단면적들의 평균을 이용하여 근사적인 토공량을 결정한다. 이는 토공량을 결정함에 있어, 한 축은 3차 곡선으로 근사시키고, 다른 한 축은 1차 직선으로 근사시키는 것과 같다. 우리가 여기서 제시한 방법은 x축으로도 3차 스플라인 곡선으로 근사시키고 동시에 y축으로도 3차 스플라인 곡선으로 근사시키는 방법이므로 이 방법을 이용하여 토공량을 계산하면 표 2, 표 3, 표 4의 결과와 같이 일반적으로 Chen과 Lin이 제시한 방법보다 더욱 정확한 값을 얻을 수 있다.

#### 감사의 글

본 연구는 2000년도 동의대학교 자체학술연구조성비에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

1. Ahmed, F. A., "Area computation using salient boundary points", J. Surveying Engrg., ASCE, 109(1), 1983, pp. 54-63.
2. Binker, R. C. and Wolf, P. R., "Elementary Surveying. Harper and row", New York, N.Y., 1984, pp. 245-254.
3. Chambers, D. W., "Estimating pit excavation volume

- using unequal intervals", J. Surveying Engrg., ASCE, 115(4), 1989, pp. 390-401.
4. Chen, C. S. and Lin, H. C., "Estimating pit-excavation volume using cubic spline volume formula", J. Surveying Engrg., ASCE, 117(2), 1991, pp. 51-66.
5. Easa, S. M., "Area of irregular region with unequal intervals", J. Surveying Engrg., ASCE, 114(2), 1988, pp. 50-58.
6. Easa, S. M., "Smooth surface approximation for computing pit excavation volume", J. Surveying Engrg., ASCE, 124(3), 1998, pp. 125-133.
7. El-Hassan, I. M., "Irregular boundary area computation by Simpson's 3/8 rule", J. Surveying Engrg., ASCE, 113(3), 1987, pp. 127-132.
8. Farin, G., "Curves and surfaces in computer aided geometric design", Academic press inc., 1988.
9. Gerald, C. F. and Wheatly, P. O., "Applied Numerical Analysis. Addison-Wesley", Menlo Park, Calif., 1984, pp. 248-256.
10. Hoffman, L. D., "Applied Calculus. McGraw-Hill", New York, N. Y., 1983, pp. 265-268.
11. Lyche, T. and Morken, K., "Spline methods", draft.
12. Schmidt, M. O. and Wong, K. W., "Fundamentals of Surveying. PWS", Boston, Mass., 1985, pp. 377-385.
13. 박운용, 문두열, 차성열, "비선형해석에 의한 부등간격의 토공량에 계산에 관한 연구", 한국측지학회지, 제9권, 제2호, 1991, pp. 19-36.
14. 문두열, "스플라인 보간법을 이용한 토공량 결정에 관한 연구", 한국측량학회지, 제18권, 제3호, 2000, pp. 305-313.

(2001년 12월 5일 원고접수)