의사스펙트럴법을 이용한 원형 Mindlin 평판의 동적특성 해석

이 진 희*

(2001년 11월 6일 접수, 2002년 3월 2일 심사완료)

Eigenvalue Analysis of Circular Mindlin Plates Using the Pseudospectral Method

Jinhee Lee

Key Words: Mindlin Plate(민들린 평판), Eigenvalue Problem(고유치 문제), Pseudospectral Method (의사스펙트럴법), Chebyshev Polynomial(체비셰프 다항식)

Abstract

A study of free vibration of circular Mindlin plates is presented. The analysis is based on the pseudospctral method, which uses Chebyshev polynomials and Fourier series as basis functions. It is demonstrated that rapid convergence and accuracy as well as the conceptual simplicity could be achieved when the pseudospectral method was applied to the solution of eigenvalue problems. Numerical examples of circular Mindlin plates with clamped and simply supported boundary conditions are provided for various thickness-to-radius ratios.

기호설명

$\kappa^2 = \pi^2/12$: 전단보정계수
λ_{pq}^2 : 무차원화된 고유진동수
ρ : 밀도
ν : 포아송비
Ψ_r, ψ_r : 방사방향 굽힘각
Ψ_θ, ψ_θ : 원주방향 굽힘각
A_k, B_k, C_k : 방사방향 기저함수
D : 휨강성
F_l : 원주방향 기저함수
G : 전단강성
h : 평판두께
R : 반지름
T_k : 제1종 Chebyshev다항식
W, w : 횡방향 변위

* 회원, 홍익대학교 기계정보공학과
E-mail : jinhlee@wow.hongik.ac.kr
TEL : (041)860-2589 FAX : (041)863-0559

1. 서 론

평판의 진동에 관한 지식은 기계, 토목, 항공 등 많은 공학 분야에서 매우 중요하다. 평판의 두께가 무시할 수 있을 정도로 얇지 않은 경우 고전평판 이론에 의하여 계산된 고유진동수는 높은 진동모우드에서 부정확하다고 알려져 있다. 고전평판이론은 전단응력의 영향을 고려하여 Mindlin 평판이론으로 발전되었고, 이 이론에 근거하여 많은 연구가 수행되어 왔으나 대부분의 평판에 대한 연구는 유한요소법 등의 수치해석법을 이용한 연구에 편

중되어 있으며 해석적이거나 준해석적인 방법을 사용한 평판의 동적특성연구에서는 주로 축대칭 진동모드에 대한 연구가 수행되어 왔다.[1~13]

의사스펙트럴법(pseudospectral method)은 스펙트럴법의 일종으로 실공간에서 함수값의 평가(collocation)를 이용하여 스펙트럴 계수를 결정한다. 의사스펙트럴법은 식의 전개가 간단하며 실공간상에서 평가점(collocation point)의 밀도를 높임으로서 해의 수렴속도를 지수함수적으로 가속시킬 수 있어 이를 이용한 계산결과가 엄밀해에 버금가는 근사해를 산출하는 것으로 알려져 있어 대기과학을 포함한 유체역학 연구분야에서 많이 사용되고 있지만,[14,15] 구조역학분야에서는 거의 소개가 되어 있지 않은 실정이다. Soni와 Amba-Rao[5]나 Gupta와 Lal[9]은 의사스펙트럴법을 사용하여 축대칭 원형평판과 축대칭 환상평판의 자유진동에 관한 연구를 수행하였고, Mattei[16]는 유체속에 잠긴 평판이 진동할 경우 평판을 둘러싼 유체의 유동을 의사스펙트럴법을 사용하여 연구하였다. 또 L자형상의 Reissner-Mindlin 평판의 정적해석에도 의사스펙트럴요소법이 사용되었다.[17]

본 연구에서는 준해석적 방법인 의사스펙트럴법을 사용하여 원형평판의 동적특성 해석을 수행하고자 한다.

2. 원형 Mindlin 평판

균질하고 등방성인 재질을 갖는 원형 평판의 운동방정식은 다음과 같다.[1,2]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial M_r}{\partial r}+\frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta}+\frac{M_r-M_\theta}{r}-Q_r=\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial M_\theta}{r\partial\theta}+\frac{2M_{r\theta}}{r}-Q_\theta=\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{\partial Q_\theta}{r\partial\theta}\frac{+Q_r}{r}=\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

위 식의 M_r, M_θ, $M_{r\theta}$, Q_r, Q_θ는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
M_r&=D\left\{\frac{\partial\Psi_r}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\left(\Psi_r+\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta}\right)\right\}\\
M_\theta&=D\left\{\frac{1}{r}\left(\Psi_r+\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta}\right)+\nu\frac{\partial\Psi_r}{\partial r}\right\}\\
M_{r\theta}&=\frac{D(1-\nu)}{2}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta}-\Psi_\theta\right)+\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial r}\right\}\\
Q_r&=\chi^2 Gh\left(\Psi_r+\frac{\partial W}{\partial r}\right)\\
Q_\theta&=\chi^2 Gh\left(\Psi_\theta+\frac{\partial W}{r\partial\theta}\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Ψ_r, Ψ_θ, W가 아래와 같이 단순조화운동을 한다고 가정하고

$$
\begin{aligned}
\Psi_r(r,\theta,t)&=\psi_r(r,\theta)\cos\omega t\\
\Psi_\theta(r,\theta,t)&=\psi_\theta(r,\theta)\sin\omega t\\
W(r,\theta,t)&=w(r,\theta)\cos\omega t
\end{aligned}
\tag{3}
$$

식 (2)를 (1)에 대입하고 정리하면

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2}+\frac{\partial\psi_r}{r\partial r}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_r}{r^2\partial\theta^2}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\chi^2 Gh}{D}\right)\psi_r+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{r\partial\theta\partial r}\\
&\quad-\frac{3-\nu}{2}\frac{\partial\psi_\theta}{r^2\partial\theta}-\frac{\chi^2 Gh}{D}\frac{\partial w}{\partial r}=-\omega^2\frac{\rho h^3}{12D}\psi_r\\
&\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_r}{r\partial\theta\partial r}+\frac{3-\nu}{2}+\frac{\partial\psi_r}{r^2\partial\theta}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi_\theta}{r^2\partial\theta^2}\\
&\quad+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\psi_\theta}{r\partial r}-\left(\frac{1-\nu}{2r^2}+\frac{\chi^2 Gh}{D}\right)\psi_\theta-\frac{\chi^2 Gh}{D}\frac{\partial w}{r\partial\theta}=-\omega^2\frac{\rho h^2}{12D}\psi_\theta\\
&\frac{\partial\psi_r}{\partial r}+\frac{\psi_r}{r}+\frac{\partial\psi_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial r^2}=-\omega^2\frac{\rho}{\chi^2 G}w
\end{aligned}
\tag{4}
$$

을 얻는다.

3. 지배방정식과 의사스펙트럴법

수식의 표현에 극좌표계를 사용하는 대부분의 경우에 독립변수의 범위를 $0\leq r\leq R$ 과

$0\leq\theta\leq 2\pi$ 로 하는 것이 일반적이지만, 아래와 같은 방법으로 원주방향의 2π-주기성(periodicity)을 만족시켜줄 경우

$$\begin{aligned}\psi_r(-r,\theta)&=\psi_r(r,\theta+\pi)\\ \psi_\theta(-r,\theta)&=\psi_\theta(r,\theta+\pi)\\ w(-r,\theta)&=w(r,\theta+\pi)\end{aligned}\qquad(5)$$

독립변수의 범위를 $-R\leq r\leq R$과 $0\leq\theta\leq\pi$ 로 할 수 있다. Boyd[15]는 극좌표계에서 사용가능한 의사스펙트럴법의 기저함수로서 shifted Chebyshev polynomials of quadratic argument, unshifted Chebyshev polynomials of appropriate parity, one-sided Jacobi polynomials 등을 제시하고 있는데, 독립변수의 범위를 $-R\leq r\leq R$과 $0\leq\theta\leq\pi$ 로 할 경우 unshifted Chebyshev polynomial을 기저함수로 사용하여 의사스펙트럴법을 적용할 수 있다. 원점으로부터의 거리 r을 다음과 같이 규준화하면

$$x=\frac{r}{R}\in[-1,1]\qquad(6)$$

식 (4)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2\psi_r}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi_r}{x\partial x}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_r}{x^2\partial\theta^2}\right)\\&-\left(\frac{1}{R^2x^2}+\frac{x^2Gh}{D}\right)\psi_r+\frac{1+\nu}{2R^2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{x\partial\theta\partial x}\\&-\frac{3-\nu}{2}\frac{\partial\psi_\theta}{R^2x^2\partial\theta}-\frac{x^2Gh}{DR}\frac{\partial w}{\partial x}\\&=-\omega^2\frac{\rho h^3}{12D}\psi_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R^2}\Big(\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_r}{x\partial\theta\partial x}+\frac{3-\nu}{2}\frac{\partial\psi_r}{x^2\partial\theta}\\&+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_\theta}{x^2\partial\theta^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\psi_\theta}{x\partial x}\Big)\\&-\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{R^2x^2}+\frac{x^2Gh}{D}\right)\psi_\theta-\frac{x^2Gh}{DR}\\&=-\omega^2\frac{\rho h^3}{12D}\psi_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x}+\frac{\psi_r}{x}+\frac{\partial\psi_\theta}{x\partial\theta}\right)\\&+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{x\partial x}+\frac{\partial^2w}{x^2\partial\theta^2}\right)\\&=-\omega^2\frac{\rho}{x^2G}w\end{aligned}$$

(7)

편의를 위하여 ψ_r, ψ_θ, w이 각각 같은 개수의 항으로 방사방향과 원주방향으로 전개되는 것으로 설정하여 고유함수를 다음과 같이 표현할 수 있는데,

$$\begin{aligned}\psi_r&=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}a_{kl}\,A_k(x)F_l(\theta)\\ \psi_\theta&=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}b_{kl}\,B_k(x)F_l(\theta)\\ w&=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}c_{kl}\,C_k(x)F_l(\theta)\end{aligned}\qquad(8)$$

이를 지배방정식 (7)에 대입하여 아래와 같은 스펙트럴방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\Big[a_{kl}\Big\{\frac{1}{R^2}\Big(A_k''F_l+\frac{1}{x}A_k'F_l\\&+\frac{1-\nu}{2x^2}A_kF_l^{**}\Big)-\Big(\frac{1}{R^2x^2}+\frac{x^2Gh}{D}\Big)A_kF_l\Big\}\\&+b_{kl}\Big(\frac{1+\nu}{2R^2}\frac{1}{x}B_k'F_l^{*}-\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{R^2x^2}B_k'F_l\Big)\\&-c_{kl}\frac{x^2Gh}{DR}C_k'F_l\Big]=-\omega^2\frac{\rho h^3}{12D}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}a_{kl}A_kF_l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\Big[a_{kl}\frac{1}{R^2}\Big(\frac{1+\nu}{2x}A_k'F_l^{*}+\frac{3-\nu}{2x^2}A_kF_l^{*}\Big\}\\&+b_{kl}\Big\{\frac{1}{R^2}\Big(\frac{1-\nu}{2}B_k''F_l+\frac{1}{x^2}B_kF_l^{**}\\&+\frac{1-\nu}{2x}B_k'F_l\Big)-\Big(\frac{1-\nu}{2R^2x^2}+\frac{x^2Gh}{D}\Big)B_kF_l\Big\}\\&-c_{kl}\frac{x^2Gh}{DRx}C_kF_l^{*}\Big]=-\omega^2\frac{\rho h^3}{12D}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}b_{kl}B_kF_l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\Big\{\frac{a_{kl}}{R}\Big(A_k'F_l+\frac{1}{x}A_kF_l\Big)+\frac{b_{kl}}{Rx}B_kF_l^{*}\\&+\frac{c_{kl}}{R^2}\Big(C_k''F_l+\frac{1}{x}C_k'F_l+\frac{1}{x^2}C_kF_l^{**}\Big)\Big\}\\&=-\omega^2\frac{\rho}{x^2G}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}c_{kl}C_kF_l\end{aligned}$$

(9)

위 식에서 A_k', B_k', C_k'와 A_k'', B_k'', C_k''는 각각 $A_k(x)$, $B_k(x)$, $C_k(x)$의 x에 대한 1차 도함수와 2차도함수를, F_l^{*}와 F_l^{**}는 $F_l(\theta)$의 θ에 대한 1차도함수와 2차도함수를 뜻한다. 다음과 같은 KL개의 Gauss- Chebyshev grid point (x_i,θ_j)에서

$$x_i = -\cos\frac{\pi(2i-1)}{2K}, \quad i=1,\cdots,K \quad (10)$$
$$\theta_j = \frac{j\pi}{L}, \quad j=1,\cdots,L$$

식 (9)의 스펙트럴식을 만족시키는 의사스펙트럴 행렬식을 다음과 같이 만들 수 있는데,

$$\boldsymbol{Ad} = \omega^2 \boldsymbol{Bd} \quad (11)$$

위 식에서 벡터 $\boldsymbol{d}$는 다음과 같이 구성된다.

$$\boldsymbol{d} = \{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{KL}, b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{KL}, c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{KL}\}^T \quad (12)$$

4. 경계조건과 기저함수

4.1 고정단 경계조건

본 연구의 초기 단계에서는 Chebyshev polynomial을 각 변수의 방사방향 기저함수로 사용하고 고유값이 포함되지 않은 경계조건식을 추가하여 행렬식을 만들어 이로부터 고유값 ω를 계산하려고 노력했으나 계산된 고유값이 복소수로 나타나는 등의 어려움을 겪고 대안을 찾을 수 밖에 없었다. Zebib[18]는 유체유동 안정성에 관한 고유값 문제의 풀이과정에서 발생한 의사해(spurious root)를 Galerkin 스펙트럴법을 사용하여 제거할 수 있음을 보여주었고, Lee *et al*[19]은 Rayleigh 대류에서 나타나는 고유값 문제를 Galerkin 스펙트럴법과 의사스펙트럴법을 이용하여 각각 해를 구하고 그 결과를 비교하였다. 본 연구에서는 주어진 경계조건을 만족하도록 수정된 Chebyshev polynomial을 기저함수로 사용하였다. 식 (8)의 A_k, B_k, C_k를 다음과 같이 선택할 경우

$$A_{2n-1}(x) = B_{2n-1}(x) = C_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) - T_0(x)$$

$$A_{2n}(x) = B_{2n}(x) = C_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) - T_1(x) \quad (13)$$
$$(n=1,\cdots,(K+\mathrm{mod}(K,2))/2)$$

고정단 (clamped) 경계조건

$$w=0, \ \psi_r=0, \ \psi_\theta=0 \quad (x=\pm 1) \quad (14)$$

이 만족되기 때문에 식 (13)을 방사방향의 기저함수로 사용하였다. 원주방향의 기저함수 $F_l(\theta)$는 2π-주기성이라는 행태적 경계조건(behavioral boundary condition)을 만족시키는 Fourier 급수를 사용하였다.

$$F_l(\theta) = \cos(l-1)\theta, \quad (l=1,\cdots,L) \quad (15)$$

식 (13)과 식 (15)의 기저함수를 이용하여 식(11)의 행렬식을 만들고, Eispack GRR subroutine을 이용하여 고유치 ω_{pq}를 계산하고 이를 무차원화하여

$$\lambda_{pq}^2 = \omega_{pq}\frac{R^2}{\sqrt{D/\rho h}} \quad (16)$$

로 나타내었다. 진동모우드는 고유진동수가 산출된 이후 각각의 고유벡터를 도시하여 확인하였다. 먼저 의사스펙트럴법을 이용하여 산출한 해의 수렴성을 확인하기 위하여 두께비 $h/R=0.05$인 경우에 대하여 K와 L의 크기를 바꾸어 가며 고유값을 계산한 결과가 Table 1에 주어져 있다. 이 연구에서의 포아송비 ν는 0.3으로 가정하였다. Table 1을 보면 collocation point의 숫자가 $K\times L = 18\times 12$에서 $K\times L = 18\times 18$로 바뀌었을 때 계산된 고유값이 유효숫자 5자리까지 변화가 없는 것을 볼 수가 있는데, 이는 $L=12$또는 그 이하에서 원주방향의 수렴이 이루어 진 것이라 판단되어 이후의 계산에서는 K만을 변화시키며 해의 수렴여부를 관찰하였다. Table 1의 결과는 $K\times L = 28\times 12$와 $K\times L = 30\times 12$의 비교에서 그 결과가 유효숫자 4자리까지 일치하는 λ_{14}^2와 λ_{54}^2를 제외하고는 모두 유효숫자 5자리까지 일치함을 보였다. 비교를 위하여 Table 1에 Irie *et al*[8]의 결과가 함께 주어져 있다.

Table 1 Convergence test of λ_{pq}^2 of circular Mindlin plates (clamped boundary condition, h/R=0.05, ν=0.3)

p	q	$K\times L$							Irie *et al*
		14x6	16x9	18x12	18x18	24x12	28x12	30x12	
0	0	10.145	10.145	10.145	10.145	10.145	10.145	10.145	10.145
	1	38.855	38.855	38.855	38.855	38.855	38.855	38.855	38.855
	2	84.785	84.979	84.994	84.994	84.995	84.995	84.995	84.995
	3	144.23	145.36	146.26	146.26	146.40	146.40	146.40	146.400
	4	269.01	222.59	218.28	218.28	220.72	220.73	220.73	
1	0	20.968	20.967	20.967	20.967	20.967	20.967	20.967	21.002
	1	58.771	58.779	58.779	58.779	58.780	58.781	58.781	58.827
	2	112.51	112.85	112.89	112.89	112.90	112.90	112.90	112.976
	3	179.01	179.54	180.79	180.79	181.09	181.09	181.09	181.210
	4	321.37	264.94	257.99	257.99	260.98	261.02	261.03	
2	0	34.143	34.145	34.145	34.146	34.146	34.146	34.146	34.258
	1	80.801	80.844	80.850	80.851	80.850	80.850	80.850	80.933
	2	142.90	142.33	142.60	142.60	142.65	142.65	142.65	142.684
	3	266.78	222.62	216.69	216.70	217.32	217.32	217.32	217.303
	4	383.69	402.97	322.29	322.29	302.47	302.63	302.63	
3	0	49.541	49.548	49.548	49.549	49.549	49.549	49.549	49.782
	1	104.79	104.87	104.88	104.88	104.88	104.88	104.88	105.028
	2	174.47	173.47	173.87	173.87	173.95	173.95	173.95	173.973
	3	314.54	261.65	253.84	253.85	254.67	254.67	254.67	254.556
	4	599.89	462.20	368.61	368.62	344.70	344.95	344.95	
4	0	67.014	67.029	67.034	67.036	67.034	67.034	67.034	67.420
	1	131.08	130.69	130.72	130.73	130.73	130.73	130.73	130.948
	2	217.62	209.78	206.75	206.76	206.68	206.68	206.68	206.693
	3	304.02	304.55	303.25	303.27	293.04	293.07	293.07	292.845
	4	747.31	433.14	395.22	395.25	388.17	387.93	387.95	
5	0	86.390	86.451	86.463	86.469	86.463	86.463	86.463	87.022
	1	158.78	158.19	158.23	158.24	158.24	158.24	158.24	158.532
	2	253.07	245.03	240.91	240.93	240.72	240.72	240.72	240.698
	3	349.04	347.12	345.64	345.68	332.36	332.40	332.40	332.051
	4	815.78	487.62	445.15	445.23	431.93	431.54	431.57	
6	0	-	107.68	107.70	107.72	107.70	107.70	107.70	108.445
	1	-	187.64	187.30	187.32	187.27	187.27	187.27	187.627
	2	-	276.44	277.34	277.39	275.92	275.92	275.92	275.853
	3	-	417.87	375.11	375.16	372.73	372.57	372.57	372.068
	4	-	502.60	551.67	551.83	478.64	475.78	475.72	

또한 Table 2에는 $K\times L=30\times 12$로 하고 고정단 경계조건에서 두께비를 바꾸어 가며 계산한 결과가 주어져 있다.

4.2 단순지지 경계조건

단순지지 (simply supported) 경계조건은 원형 평판의 가장자리 ($x=\pm 1$)에서

$$w=0,\quad M_r=0,\quad \phi_\theta=0 \tag{17}$$

이 만족될 것을 요구하는데, 이는 식 (13)의 기저함수를 수정하여

Table 2 Non-dimensionalized eigenvalue λ_{pq}^2 of circular Mindlin plates (clamped boundary condition, $K \times L = 30 \times 12$, ν=0.3)

p	q	h/R							
		0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
0	0	10.215	10.213	10.204	10.145	9.9408	9.6286	9.2400	8.8068
	1	39.762	39.733	39.620	38.855	36.479	33.393	30.211	27.253
	2	89.060	88.926	88.401	84.995	75.664	65.551	56.682	49.420
	3	158.05	157.65	156.08	146.40	123.32	102.09	85.571	73.054
	4	246.69	245.74	242.06	220.73	176.41	140.93	115.55	97.198
1	0	21.257	21.248	21.213	20.967	20.163	19.020	17.722	16.403
	1	60.807	60.742	60.484	58.781	53.797	47.890	42.297	37.448
	2	120.00	119.76	118.82	112.90	97.776	82.723	70.350	60.644
	3	198.84	198.21	195.76	181.10	148.52	120.68	99.989	84.704
	4	297.30	295.92	290.64	261.03	203.59	160.29	130.29	109.34
2	0	34.869	34.847	34.756	34.146	32.231	29.705	27.052	24.547
	1	84.542	84.422	83.945	80.850	72.293	62.898	54.568	47.688
	2	153.69	153.31	151.82	142.65	120.58	100.08	84.033	71.812
	3	242.41	241.50	237.95	217.32	174.16	139.36	114.36	96.225
	4	350.70	348.83	341.67	302.63	231.09	179.71	144.98	121.01
3	0	51.014	50.968	50.782	49.549	45.865	41.351	36.941	33.016
	1	110.95	110.75	109.95	104.88	91.645	78.137	66.819	57.823
	2	190.11	189.54	187.32	173.95	143.67	117.29	97.468	82.760
	3	288.75	287.47	282.54	254.67	199.71	157.71	128.44	108.26
	4	406.89	404.39	394.94	344.95	258.29	198.75	159.63	132.31
4	0	69.638	69.553	69.219	67.034	60.830	53.745	47.236	41.076
	1	140.00	139.69	138.45	130.73	111.71	93.553	79.032	67.821
	2	229.24	228.43	225.26	206.68	167.00	134.36	110.63	93.330
	3	337.83	336.10	329.48	293.07	225.19	175.73	142.06	118.21
	4	465.82	462.59	450.42	387.95	285.19	217.30	173.22	143.65
5	0	90.692	90.552	90.001	86.463	76.918	66.714	57.821	50.537
	1	171.65	171.18	169.35	158.24	132.36	109.10	91.209	77.716
	2	271.05	269.92	265.57	240.72	190.53	151.32	123.59	104.12
	3	389.62	387.34	378.68	332.41	250.62	193.51	155.34	128.71
	4	527.50	523.39	508.04	431.57	311.90	235.55	186.29	-
6	0	114.14	113.92	113.07	107.70	93.947	80.116	68.593	59.430
	1	205.85	205.18	202.60	187.27	153.47	124.71	103.31	87.493
	2	315.49	313.98	308.18	275.92	214.19	168.14	136.38	113.81
	3	444.09	441.16	430.09	372.57	275.97	211.06	168.53	141.11
	4	591.86	586.73	567.72	475.72	338.39	253.53	-	-

$$
\begin{aligned}
A_{2n-1}(x) &= T_{2n}(x) - T_0(x) - \frac{4n^2}{\nu} \\
B_{2n-1}(x) &= C_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) - T_0(x) \\
A_{2n}(x) &= T_{2n+1}(x) - T_1(x) - \frac{4n(n+1)}{1+\nu}x \\
B_{2n}(x) &= C_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) - T_1(x) \\
&(n = 1, \cdots, (K + \mathrm{mod}(K, 2))/2)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

로 할 경우 항상 만족시킬 수 있다. 식 (18)의 방사방향 기저함수를 이용하여 다시 식 (11)의 의사스펙트럴 행렬식을 만들고, Eispack GRR subroutine을 이용하여 무차원화된 고유값 λ_{pq}^2를 계산한 결과가 Table 3에 주어져 있다.

Table 3 Non-dimensionalized eigenvalue λ_{pq}^2 of circular Mindlin plates (simply supported boundary condition, $K\times L=30\times 12$, ν=0.3)

p	q	h/R							
		0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
0	0	4.9350	4.9347	4.9335	4.9247	4.8938	4.8440	4.7773	4.6963
	1	29.716	29.704	29.655	29.323	28.240	26.715	24.995	23.254
	2	74.131	74.054	73.752	71.756	65.942	59.062	52.514	46.775
	3	138.23	137.96	136.92	130.35	113.57	96.775	82.766	71.603
	4	221.99	221.30	218.65	202.81	167.53	136.98	113.87	96.609
1	0	13.897	13.895	13.884	13.809	13.555	13.168	12.687	12.153
	1	48.468	48.435	48.304	47.422	44.692	41.163	37.519	34.109
	2	102.72	102.58	101.99	98.221	87.935	76.772	66.876	58.646
	3	176.66	176.22	174.51	164.05	139.15	116.05	97.779	83.716
	4	270.22	269.21	265.27	242.55	195.31	156.96	129.07	108.68
2	0	25.610	25.601	25.566	25.323	24.518	23.359	22.017	20.626
	1	70.095	70.027	69.760	67.986	62.760	56.471	50.400	45.020
	2	134.21	133.97	132.99	126.81	110.89	94.763	81.201	70.337
	3	217.98	217.33	214.78	199.53	165.29	135.38	112.66	95.634
	4	321.36	319.94	314.49	283.79	223.46	176.94	144.15	120.71
3	0	39.950	39.929	39.843	39.264	37.417	34.918	32.219	29.593
	1	94.508	94.387	93.907	90.777	82.015	72.194	63.270	55.722
	2	168.54	168.16	166.64	157.23	134.34	112.61	95.182	81.672
	3	262.17	261.23	257.59	236.38	191.42	154.32	127.15	106.99
	4	375.36	373.44	366.10	325.94	251.30	196.46	158.79	132.25
4	0	56.827	56.784	56.613	55.463	51.945	47.481	42.955	38.788
	1	121.64	121.44	120.65	115.61	102.21	88.161	76.045	66.175
	2	205.66	205.08	202.85	189.30	158.14	130.28	108.80	92.562
	3	309.17	307.87	302.87	274.46	217.51	172.86	141.11	118.37
	4	432.19	429.66	420.04	368.93	278.84	215.43	172.38	143.36
5	0	76.177	76.100	75.794	73.767	67.833	60.765	54.006	48.066
	1	151.41	151.11	149.90	142.30	123.14	104.26	88.704	76.423
	2	245.50	244.69	241.53	222.87	182.20	147.77	122.14	103.28
	3	358.94	357.20	350.54	313.65	243.56	191.09	154.66	129.21
	4	491.81	488.55	476.24	412.68	306.15	234.04	186.70	154.16
6	0	97.952	97.825	97.321	94.037	84.848	74.558	65.223	57.337
	1	183.80	183.34	181.57	170.68	144.63	120.39	101.21	86.473
	2	288.04	286.92	282.61	257.76	206.42	165.08	135.22	113.52
	3	411.45	409.18	400.51	353.81	269.50	209.02	165.94	139.52
	4	554.18	550.05	534.60	457.06	333.19	252.33	200.30	165.01

Table 2-3의 결과를 Irie *et al*[8]의 결과와 비교해보면 낮은 진동모우드에서는 두 연구의 결과가 일치하고 있으나 진동모우드가 높은 경우 약간씩 다르게 계산되었음을 알 수 있다. Irie *et al*[8]의 연구가 해의 수렴에 대한 정보를 결여하고 있기 때문에 현재의 시점에서 어떤 계산방법이 더 정확한 방식이라고 판단하기는 곤란하지만, 의사스펙트럴법을 사용한 본 연구에서는 Irie *et al*[8]의 연구에서는 계산이 되지 못했던 $h/R=0.25$인 경우의 λ_{33}^2, λ_{43}^2, λ_{53}^2, λ_{63}^2 등과 함께 $q=4$에 해당되는 높은 진동모우드의 고유값들을 계산할 수 있었다.

의사스펙트럴법의 단점으로는 식 (11)과 같은 표준적인 행렬식을 이용하여 고유값을 구하기 위해서는 경계조건을 만족시키는 기저함수를 사용해야 한다는 점을 들 수 있는데, 그렇지 못한 경우 고유값이 복소수 형태로 계산되거나 의사해가 발생하는 등의 어려움이 생길 수 있다는 점에 유의해야 한다.

5. 결 론

Chebyshev polynomial과 Fourier series를 이용한 의사스펙트럴법을 적용하여 원형 Mindlin 평판의 동적특성에 대한 연구를 수행하였다. 본 연구는 의사스펙트럴법이 간단한 수식전개를 통하여 평판의 동적해석이 수월하게 구현될 수 있으며, 해의 수렴이 빠름을 보여 주었다. 또한 주어진 경계조건을 만족시키는 기저함수를 사용할 경우 복소수 고유값이나 의사해 발생 등의 어려움을 극복할 수 있음을 보여 주었다. 앞으로 진동연구와 구조역학분야에서의 의사스펙트럴법의 많은 활용이 기대된다.

후 기

이 논문은 2002년도 홍익대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

(1) Mindlin, R. D., 1951, "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic, Elastic Plates," *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 31~38.

(2) Deresiewicz, H. and Mindlin, R. D., 1955, "Axially Symmetric Flexural Vibration of a Circular Disk," *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, Vol. 22, pp. 86~88.

(3) Deresiewicz, H., 1956 "Symmetric Flexural Vibration of a Clamped Disk," *J. Appl. Mech.*, Vol. 12, pp. 319.

(4) Chandrasekaran, K. and Kunukkasseril, V. X., 1974, "Frequency Spectra of Circular Plates," *J. Sound Vib.*, Vol. 33, pp. 376~378.

(5) Soni, S. R. and Amba-Rao, C. L., 1975, "On Radially Symmetric Vibrations of Orthotropic Non-uniform Disks Including Shear Deformation," *J. Sound Vib.*, Vol. 42, No. 1, pp. 57~63.

(6) Chandrasekaran, K. and Kunukkasseril, V. X., 1976, "Forced Axisymmetric Response of Circular Plates," *J. Sound Vib.*, Vol. 44, pp. 407~417.

(7) Iyengar, K. T. S. R. and Raman, P. V., 1978, "Free Vibration of Circular Plates of Arbitrary Thickness," *J. Acous. Soc. Amer.*, Vol. 64, pp. 1088~1092.

(8) Irie, T., Yamada, G. and Aomura, S., 1980, "Natural Modes and Natural Frequencies of Mindlin Circular Plates," *J. Appl. Mech.*, Vol. 47, pp. 652~655.

(9) Gupta, U. S. and Lal, R., 1985, "Axisymmetric Vibrations of Polar Orthotropic Mindlin Annular Plates of Variable Thickness," *J. Sound Vib.*, Vol. 98, No. 4, pp. 565~573.

(10) Weisensel, G. N., 1989, "Natural Frequency Information for Circular and Annular Plates," *J. Sound Vib.*, Vol. 133, No. 1, pp. 129~137.

(11) Liew, K. M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S., 1995, "Research on Thick Plate Vibration: a Literature Survey," *J. Sound Vib.*, Vol. 180, No. 1, pp. 163~176.

(12) Liu, C. F. and Chen, G. T., 1995, "A Simple Finite Element Analysis of Axisymmetric Vibration of Annular and Circular plates," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 37, pp. 861~871.

(13) Liew, K. M., Han., J. B. and Xiao, Z. M., 1997, "Vibration Analysis of Circular Mindlin Plates Using Differential Quadrature Method," *J. Sound Vib.*, Vol. 205, No. 5, pp. 617~630.

(14) Pyret, R. and Taylor, T. D., 1990, *Computational Method for Fluid Flow*, Springer-Verlag, pp. 227~247.

(15) Boyd, J. P., 1989, *Chebyshev & Fourier Spectral Methods*, Lecture Notes in Engineering 49, Springer-Verlag, pp. 213∼235.

(16) Mattei, P. O., 1996, "A 2-dimensional Chebyshev Collocation Method for the Study of the Vibration of a Baffled Fluid-loaded Rectangular Plate," *J. Sound Vib.*, Vol. 196, No. 6, pp. 407∼427.

(17) 이진희, 1998, "Pseudospectral 요소법을 사용한 Reissner-Mindlin 평판의 해석," 대한기계학회 논문집, 22권, 12호, pp. 2136∼2145.

(18) Zebib, A., 1987, "Removal of Spurious Modes Encountered in Solving Problems by Spectral Methods," *J. Comp. Phys.*, Vol. 70, pp. 521∼525.

(19) Lee, N. Y., Schultz, W. W. and Boyd, J. P., 1989, "Stability of Fluid in a Rectangular Enclosure by Spectral Method," *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 32, No. 3, pp. 513∼520.