

## 자유표면 근처에서의 구형 셸과 충격파의 비정상 유체-구조물 상호작용 해석

이 민 형<sup>†</sup> · 이범헌\* · 이승엽\*\*  
(2001년 9월 12일 접수, 2002년 3월 4일 심사완료)

### Interactions of Spherical Acoustic Shock Waves with a Spherical Elastic Shell near a Free-Surface

Minhyung Lee, Beom-Heon Lee and Seung-Yop Lee

**Key Words :** Shock Waves(충격파), Fluid-Structure Interactions(유체-구조물 상호작용), Free-Surface(자유표면), Incident Wave(입사파)

#### Abstract

This paper analyses the transient response of a spherical elastic shell located near free surface and impinged by spherical step-exponential acoustic shock waves. The problem is solved through extension of a method (Huang, 1969) previously formulated for the excitation in an infinite domain, which employs the classical separation of variables, series solutions, and Laplace transform technique. The effect of the free surface reflection is taken into account using the image source method. The reflection of the incident wave has been treated by the same image formulation. If the reflection of the pressure field scattered and radiated by the shell is considered, the problem becomes that of multiple scattering by two spheres. However, this is in general negligible considering errors inherent from other sources and that the scattered and radiated pressure waves emanating from the shell are small. Thus, the problem is reduced to that of a structure immersed in an infinite fluid and impinged upon the origin and the image incident.

기호설명	
<p><math>a</math> : 구형 셸의 반지름</p> <p><math>c</math> : 파의 전달속도</p> <p><math>d</math> : 소스와 셸과의 거리</p> <p><math>E</math> : Young's modulus</p> <p><math>F</math> : 임의의 함수</p> <p><math>h</math> : 구형 셸의 두께</p> <p><math>K</math> : 운동에너지</p> <p><math>l</math> : 파의 전파거리</p> <p><math>p</math> : 압력</p>	<p><math>r</math> : 반경</p> <p><math>t</math> : 시간</p> <p><math>u</math> : 반경방향 변형속도</p> <p><math>V</math> : 위치에너지</p> <p><math>v</math> : 법선방향 변형속도</p> <p><math>z</math> : 자유표면으로부터의 깊이</p> <p style="text-align: center;">그리스문자</p> <p><math>\alpha</math> : 다중소스의 위치각도</p> <p><math>\delta_r</math> : 셸의 반경방향 변형</p> <p><math>\delta_\theta</math> : 셸의 접선방향 변형</p> <p><math>\theta</math> : 측정각도</p> <p><math>v</math> : 푸아송 비</p> <p><math>\rho</math> : 유체 밀도</p> <p><math>\rho_s</math> : 탄성 셸의 밀도</p>

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 세종대학교 기계항공우주공학부  
E-mail : mlce@sejong.ac.kr  
TEL : (02)3408-3282 FAX : (02)3408-3333

\* 서강대학교 대학원 기계공학과

\*\* 회원, 서강대학교 기계공학과

1. 서론

충격파의 가진에 의한 잠겨진 탄성 셀의 비정상 진동해석은 응용문제의 다양성 때문에 현재까지 많은 연구가 이루어져왔다.<sup>(1-4)</sup> 평면단위계단파 또는 지수감소 입사파에 의한 탄성 구형 셀의 진동특성이 1969 년도에 Huang 에 의해 엄밀해가 제시되었고 1971 년도에는 구형단위계단파에 대한 해가 얻어졌다. 또한 같은 입사파에 대한 탄성 실린더 셀의 해가 얻어졌다.<sup>(5)</sup> 1990 년대에 와서는 실질적인 복잡한 구조물의 진동특성을 얻기 위하여 시뮬레이션의 필요성이 야기되었으며 이에 따라 본 엄밀해가 여러 종류의 수치해석 코드들의 검증 자료로 활용이 된다.<sup>(6,7)</sup>

본 논문에서는 구형 단위입사파의 가진에 의한 자유표면 근처에 잠겨져 있는 탄성구형의 진동특성을 연구하였다 (Fig. 1). 접근방법은 변수분리법 (Separation of Variables)과 Laplace Transformation 을 사용하여 시리즈합으로 해를 구하는 Huang<sup>(2)</sup>의 방법을 개선하는 것이다. 본 해를 구하기 위하여 우선 구조물에서 일정한 거리에 위치한 다중소스로부터 입사하는 다중입사파에 대한 구조물의 진동해석을 수행하였다. 입사파의 강도를 모두 일정하게 유지하여 특히 여러 곳에 분포한 다중소스하중에 의한 입사각도의 영향을 조사함을 목적으로 하였다.

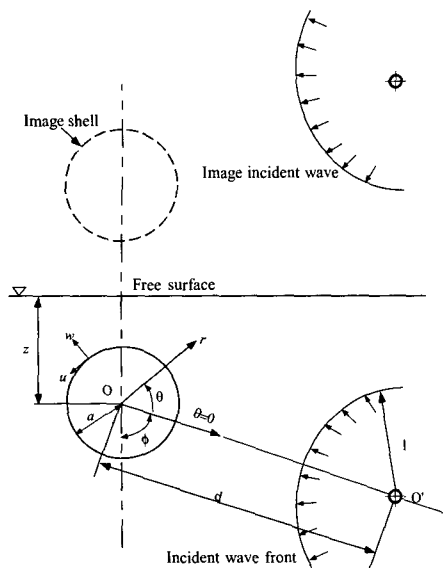


Fig. 1 Geometry of the shell and acoustic waves near a free surface

2. 다중소스 가진

우선 완전히 잠겨진 구조물에 여러 각도에서 동시에 입사하는 다중소스의 경우를 고려하자. Fig. 2 에 나타난 것과 같이 반지름이  $a$  인 구형 탄성셀이 구형 입사파의 소스 중앙으로부터  $d$  라는 거리에 놓여있다고 가정한다. 본 해석은 Huang<sup>(2)</sup>이 제시한 단일소스에 의한 진동해석 이론을 확대하여 구한다.

주위 유체는 밀도  $\rho$ 와 파의 전달속도  $c$  로 표시되는 균일한 유체로 가정한다. 입사 충격파는 충분히 작아서 선형 음파이론으로 기술이 가능하다고 본다. 잠겨진 구조물은 등방성의 탄성 구형 셀이며 셀의 물성은 : 반지름  $a$ , 두께  $2h$ , Young's modulus  $E$ , Poisson's ratio  $\nu$ , 밀도  $\rho_s$ 로 표시된다.  $\delta_r$ 과  $\delta_\theta$ 는 각각 구형 셀의 반경방향 그리고 접선방향 변형을 나타낸다. 다중소스 해석을 위하여 입사파들의 입사각도를 항상 셀의 각도  $\theta$  지점에 입사하도록 좌표변환을 사용하였다. 일관성을 유지하기 위하여 Huang<sup>(2)</sup>의 논문에서의 기호와 같은 다음의 무차원화가 이루어졌다.

$$w = \frac{\delta_r}{a}, u = \frac{\delta_\theta}{a}, T = \frac{ct}{a}, R = \frac{r}{a}, L = \frac{l}{a}, D = \frac{d}{a}$$

$$C^2 = \frac{E}{[\rho_s(1-\nu)c^2]}, M = \frac{\rho a}{2h\rho_s}, \Pi = \frac{p}{\rho c^2} \quad (1)$$

셀의 탄성운동 그리고 강제운동은 입사파에 의해 이루어지는데 입사파는 또한 구조물에 의해 반사되어진다. 그리고 구조물 자체의 운동에 의하여 방사파가 방출된다. 결국 구조물에 영향을 미치는 전체압력( $\Pi$ )은 구조물 주위의 유체영역에서의 입사압력( $\Pi^{inc}$ ), 그리고 반사 및 방사압력( $\Pi^{sra}$ )으로 이루어진다.

이러한 유체-구조물 상호작용은 유체와 구조라는 두 매질을 다루기 때문에 서로 다른 두 종류의 방정식을 동시에 연립하여 풀어야 한다. 두 가지의 방정식은 라그랑즈(Lagrange) 방정식과 파 방정식 (Wave equation)을 의미한다. 여기서 고려하는 시스템의 라그랑즈 방정식은 다음과 같이 표시 가능하다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{w}} - \frac{\partial K}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial u} = \Pi_i, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial w} = 0 \quad (3)$$

여기서  $K, V$ 는 각각 운동에너지와 포텐셜에너지를 나타낸다. 식 (2)와 (3)에서 사용되는 셀의 변형과 입사파는 물리적으로 연속적이어야 하므로 다음과 같이 Legendre 시리즈 함수로 전개가 가능하다.

$$w(\theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(T) P_m(\cos \theta) \quad (4)$$

$$u(\theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(T) \frac{d}{d\theta} P_m(\cos \theta) \quad (5)$$

$$\Pi(R, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m(R, T) P_m(\cos \theta) \quad (6)$$

방정식 (2)에 사용되는 일반화된 하중은 실제로 입사파에 의해 셀에 가한 일을 의미한다. 따라서 입사파의 좌표를 변화시켜 시간  $T = 0$  에 항상 입사파가 셀에 입사하도록 설정하면 임의의 입사파를 수학적으로 다음과 같이 표현한다.

$$\Pi^{inc}(L, T) = \Omega_0 \frac{F(T-L+D-1)}{L} H(T-L+D-1) \quad (7)$$

여기서  $H$  는 단위계단과함수를 그리고  $\Omega_0$  는 입사파의 강도를 나타낸다. 지수감소함수는 다음과 같이 표시가능하며,  $F(T-L+D-1) = \exp[-\beta(T-L+D-1)]$ , 만약  $\beta = 1$  이면 결국 단위계단과함수로 귀착 된다. 방사파 또한 다음과 같은 과방정식을 만족시켜야 한다,  $\Pi_{rr} = \nabla^2 \Pi$ . 구형 과방정식의 방사파해는 3종의 변형된 구형 Bessel 함수<sup>(8)</sup>와 Legendre 함수의 형태로 주어진다. 방사파의 해를 라그랑즈 방정식에 대입하여 Laplace 변환을 취하면 구형 셀의 진동특성을 구할 수 있다.

마지막으로 요구되는 해석과정은 유체-구조물 경계에서 수직방향 속도성분의 연속이라는 경계조건 처리이며 이는 수학적으로 다음과 같이 처리하면 된다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial R} = -\frac{\partial^2 w}{\partial T^2}, \quad R = 1 \quad (8)$$

다중 입사파의 해석은 선형의 중첩원리(Linear-Superposition)를 적용하였다. 단일 입사파와의 비교를 위하여 총 입사파들의 강도 합을 단일소스에 의한 입사파의 강도와 같은 조건으로 설정하였다. 또한 다중 소스들과 셀과의 거리를 일정하게 유지하였기 때문에 소스들은 원주상에 놓이게 되며 따라서 같은 시간에 모두 다른 각도로 구조물에 입

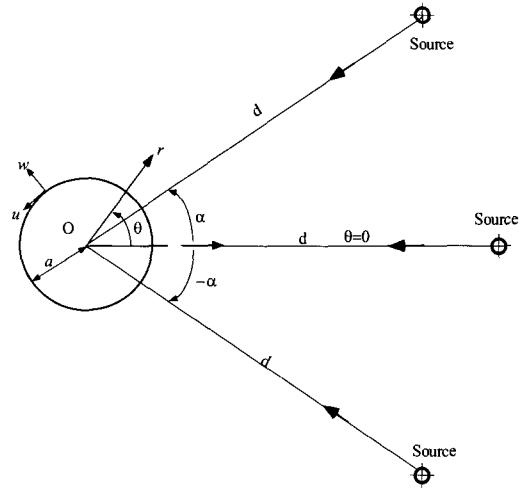


Fig. 2 Geometry of the shell and multiple sources in an infinite fluid. The total strength of the sources remains constant

사하는 경우가 된다. 여기서는 3 개의 소스를 각각  $\alpha = -\pi/12, 0, \pi/12$  에 설치한 예제 계산을 수행하였다. 비교하는 단일소스경우는 언급하였듯이  $\alpha = 0$  에 놓이게 된다. 또한 비교를 위하여  $\alpha = -\pi/4, 0, \pi/4$  에 소스가 위치한 경우도 해석을 수행하여 결과를 제시하였다.

Fig. 3 에 셀의  $\theta = 0, \pi/2, \pi$  위치에서 시간에 따른 얻어진 무차원화된 반경방향 속도를 나타내었다. 여기서는 다중 소스들을 무차원화된 거리  $D = 10$  에 설치하였으며  $\beta = 1$  인 경우이다. 비교를 위하여 단일 소스 ( $\alpha = 0$ )에서의 입사파에 대한 결과도 나타내었다. 대체로 구형 셀의 반응은 진동하는 경향을 보이며, 특히 다중소스의 경우 각각 다른 각도로 입사하므로  $\theta = 0$  에서의 구조물의 최대 변형 속도값이 단일소스와 비교하여 감소함을 알 수 있다. 특히  $\alpha = \pm \pi/12$  에 설치된 하중의 경우, 단일소스에 비교하여 최대속도 값이 약 80%로 줄어들었다. 대체로 최대 속도를 보인 이후의 반응은 같은 경향을 보임을 알 수 있다. 또한  $\alpha = \pm \pi/4$  에 설치된 다중소스 하중의 경우에는 속도의 진폭이 매우 줄어들음을 알 수 있다.

결론적으로 같은 크기를 가지며 다른 각도로 입사하는 다중소스의 영향은 단일소스와 비교하여 전체적으로 구조물의 진동이 감소함을 알 수 있다. 본 결과는 분포되어(distributed) 입사하는 다중소스에 의한 구조물의 반응특성을 잘 나타내고 있다.

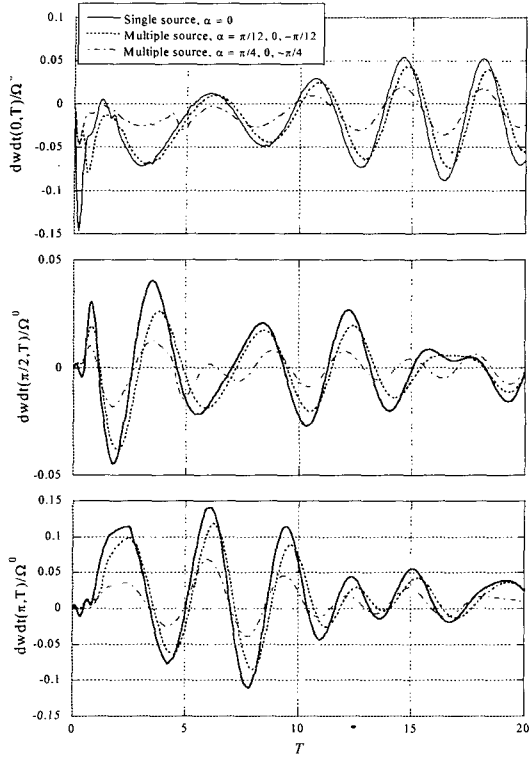


Fig. 3 Time history of radial velocity of shell for  $D=10$ ,  $\beta=1$ , spherical wave. Single source of strength  $\Omega_0$  and multiple sources of the same strength are compared

3. 자유표면근처에서의 상호작용

Fig. 4에 나타난 것과 같이 반지름이  $a$ 인 구형 탄성셀이 자유표면으로부터 깊이  $Z$ 에 놓여 있는 경우를 고려하자. 소스는 셀과의 거리  $D$ 이며 임의의 깊이에 위치한다. 초기 생성된 충격파에 의한 자유표면에서의 'pressure-release' 경계조건을 만족시키기 위하여 자유표면의 반대위치에 이미지 셀과 이미지 소스를 각각 설치한다. 여기서 중요한 사실은 구조물이 잠겨져 있는 경우 자유표면에서의 반사는 초기 입사파와 구조물에 의해 방사된 방사파의 반사에 의해 각각 발생 가능하다. 앞의 반사파는 일반적으로 이미지 소스를 설치함에 의해 고려가 된다. 하지만 방사파에 의한 반사를 고려하게 되면 실제로 두 구형 셀 사이의 다중 방사파의 문제로 귀착되어진다. 하지만 일반적으로 구형셀이 자유표면으로부터 구형셀 지름의 1 배 이상 깊이에 잠겨져 있는 경우 이러한 방사파는 무시 가능한 것으로 알려져 있다. 결국 구조물의

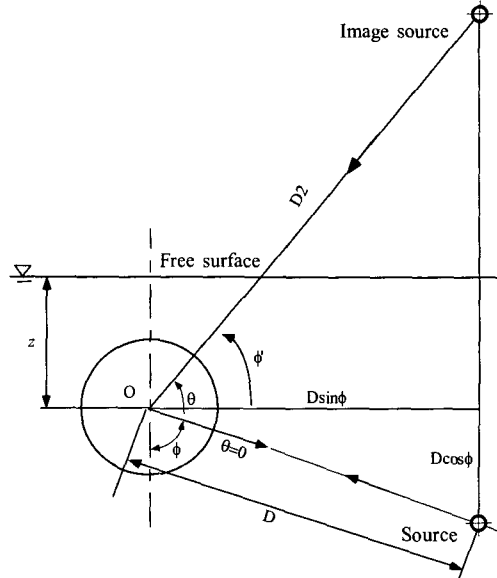


Fig. 4 Geometry of the source and image source

진동특성만이 고려 대상인 경우에는 무한 유체속에 잠겨진 두 개의 셀 (이미지 셀 포함)과 초기 입사파의 상호작용 문제로 귀속하게 된다.

이미지 입사파 문제는 입사파와 셀의 거리 (direction factor)와 입사시간을 고려하게 되면 결국 같은 절차로 해석이 가능하지만 거리의 증가로 인한 입사파의 강도 감소를 고려하여야만 한다. 이 경우 구조물의 진동은 두개의 입사파의 선형 중첩 (linear superposition)으로 얻어진다. Fig. 4에서 소스와 이미지 소스의 형태상에서 입사파는 자유표면 반사이후 (또는 이미지 소스로부터 출발이후) 셀에 다음과 같은 시간에 도달하게 된다.

$$T_{id} = [D^2 + 4z(z + D \cos \phi)]^{0.5} - D \tag{9}$$

또한 자유표면 반사파의 구조물 입사각도는 다음과 같다.

$$\theta = \pi/2 - \phi + \phi', \quad \phi' = \tan^{-1}[(2z + D \cos \phi)/D \sin \phi] \tag{10}$$

각도  $\phi$ 로 입사하는 파에 의한 셀의  $\theta = 0$ 에서의 해를 구하는 경우를 예를 들어 중첩원리를 기술해 보자. 즉 이미지 입사파의 시간지연,  $T_{id}$ 과 이미지 파에 의한  $\theta = \pi/2 - \phi + \phi'$ 에서의 해를 초기 직접 입사파와 중첩하면 전체반응이 구하여진다.

해석 예를 제시하기 위하여 구형 탄성셀이 자유표면으로부터 깊이 1.5 되는 위치에 경우에 대해 결과를 얻었다. 이 경우 자유표면과 셀의 가장

까운 곳은 셸의 지름만큼의 깊이에 위치하게 된다. 무차원 거리  $D=10$  그리고  $\phi=\pi/3$  로 설정하면  $T_{id}=2$  가 된다. 계산된 셸의 각 지점에서의 무차원화된 반경방향 속도성분을 Fig. 5 에 나타내었다. 자유표면이 없는 경우의 해를 비교를 위하여 제시하였다. 그림에 나타난 것과 같이 반사파가 도달 전에는 동일한 결과를 보이며 반사파의 도달 이후 셸의 반응은 조금씩 달라진다. 하지만  $\theta=0, \pi$ 에서의 해들은 큰 차이를 보이지 않고있다. 반면에  $\theta=\pi/2$ 에서의 해는 반사파의 도달 이후 상당한 차이를 나타낸다. 이유는 이 지점이 반사파의 첫 입사위치에 가깝기 때문에 큰 하중이 작용하기 때문이다. 이러한 지점의 위치는  $D, \phi$ 와 같은 변수들에 의해 결정되어진다.

마지막으로, 자유표면 근처에서는 입사파와 자유표면 반사파인 팽창파의 합으로 음압이 발생하는데 이를 케비테이션 (cavitation) 현상이라고 한다. 본 연구에서는 이러한 비선형 현상을 고려하지 않았는데 실제로 해석적인 방법으로는 케비테이션의 고려가 거의 불가능한 실정이다.

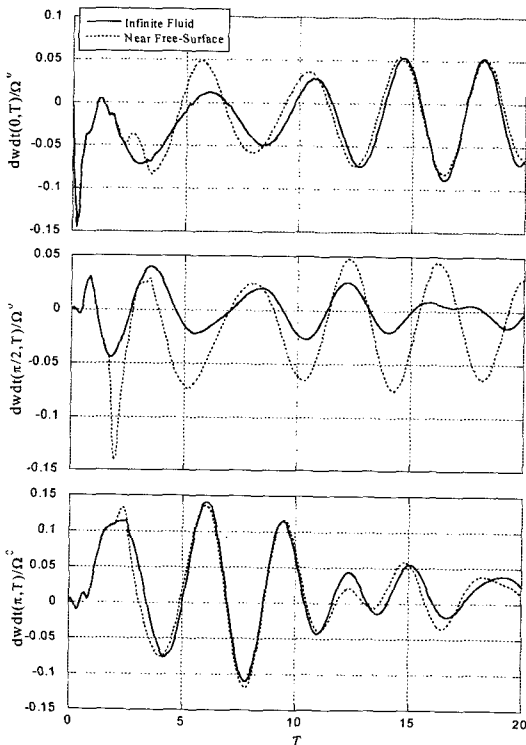


Fig. 5 Time history of radial velocities of shell, spherical wave, in an infinite fluid or near a free surface for  $\phi=\pi/3, z=1.5, D=10, \beta=1$

#### 4. 결론

자유표면 근처에 잠겨진 구형 탄성셸과 충격파의 상호작용에 의한 비정상 진동특성을 엄밀해를 구하여 알아보았다. 해석적인 방식은 단일소스에 대한 해를 구한 Huang<sup>(2)</sup>의 이론을 기초로 하여 확대하였다. 본 연구로부터 다음과 같은 몇가지 결론을 얻었다.

(1) 여러 각도로 입사하는 분포하중의 경우 같은 강도를 가진 단일 하중과 비교하여 구조물에 작은 진동을 유발시킨다.

(2) 자유표면 근처에 위치한 탄성셸의 해석은 단순화하여 이미지 셸과 이미지 소스를 설치하는 해석으로 대체하였다. 반사파의 입사각도 그리고 셸과의 거리 등의 변수에 따라 셸의 진동 특성은 상당히 차이를 보이므로 자유표면의 고려는 반드시 요구된다.

(3) 자유표면 반사파의 구조물 입사각도에 따라 구조물의 특정 위치에서 매우 다른 진동특성이 발생함을 제시하였는데 이는 초기 발생 충격파의 위치 추적이 가능하여 소나시스템에 활용이 가능하다.

#### 후기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(과제번호 1999-1-304-004-2)지원으로 수행되었으며 이에 감사 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Huang, H., 1969, "Transient Interaction of Plane Acoustic Waves with a Spherical Elastic Shell," *J. of the Acoustical Soc. of Amer.*, Vol. 45(3), pp. 661~670.
- (2) Huang, H., Lu, Y.P. and Wang, Y.F., 1971, "Transient Interaction of Spherical Acoustic Waves with a Spherical Elastic Shell," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 38, pp. 71~74.
- (3) Zhang, P., and Geers, T.L., 1993, "Excitation of a Fluid-filled, Submerged Spherical Shell by a Transient Acoustic Wave," *J. of the Acoustical Society of America*, Vol. 93(2), pp. 696~705.
- (4) Sprague, M.A., and Geers, T.L., 1999, "Response of Empty and Fluid-filled, Submerged Spherical Shells to Plane and Spherical, Step-exponential Acoustic Waves," *Shock and Vibration*, Vol. 6, pp. 147~157.
- (5) Geers, T.L. and Yen, C.L., 1989, "Inelastic Response of an Infinite Cylindrical Shell to Transient Acoustic Waves," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 900~909.
- (6) Huang, H. and Mair, H.U., 1996, "Neoclassical Solution of Transient Interaction of Plane Acoustic

- Waves with a Spherical Elastic Shell," *Shock and Vibration*, Vol. 3(2), pp. 85~98.
- (7) Lee, M. Lee, B. and Lee, S.Y., 2000, "On the Analysis Methods for Interactions of a Submerged Elastic Shell and Acoustic Shocks," Proceedings of the Fourth International Conference on Hydrodynamics: Theory and Applications, edited by Y. Goda, M. Ikehata and K. Suzuki, pp. 441~446.
- (8) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, U.S. Dep. Commerce, Nat. Bur. Stand., 1967.