

원형 봉의 비틀림 진동에 의한 유체 점도 측정 연구

전 한 용* · 김 진 오†

(2001년 5월 26일 접수, 2002년 4월 1일 심사완료)

A Study on the Measurement of the Fluid Viscosity by Using the Torsional Vibration of a Circular Rod

Han Yong Chun and Jin Oh Kim

Key Words: Torsional Vibration(비틀림 진동), Viscosity(점도), Perturbation(섭동), Mechanical Impedance(역학적 임피던스)

Abstract

This paper deals with the measurement of the fluid viscosity by using the torsional vibration of a circular rod excited by a torsional vibrator at one end. The effect of an adjacent viscous fluid on the torsional vibration of the rod has been studied theoretically and expressed in terms of the mechanical impedance. The theoretically-obtained trend that the mechanical impedance is proportional to the square root of the viscosity times the density of the fluid has been confirmed by the impedance measurement. The paper demonstrates that a torsionally-vibrating rod can be used as a sensor to measure the viscosity of a fluid.

1. 서 론

봉(rod)이나 축(shaft)이 유체에 잠겨 있을 때, 그 진동특성이 인접 유체에 의해 영향을 받는다. 특히 비틀림 진동은 인접 유체가 점성을 갖고 있으면, 고체의 운동이 인접 점성유체에 전단응력을 가하고 유체로부터 점성 저항을 받아 고유진동특성이 변화한다. 즉, 점성유체에 잠겨있지 않을 때에 비해 고유진동수가 감소하고 감쇠가 증가한다.⁽¹⁾ 이러한 현상을 응용하여 유체의 점도를 측정할 수 있다.

원형 봉에서 전파하는 비틀림 탄성파가 인접 점성유체와 상호작용을 하는 현상은 이미 연구된 바 있다.^(2,3) 그러한 연구에서의 해석에 의해, 비틀림 탄성파의 전파속도가 인접 점성유체로부터

받는 영향이 정량적으로 파악될 수 있게 되었다. 그에 따라 비틀림 탄성파를 이용한 유체점도 측정방법이 제시된 바 있다.⁽⁴⁾ 진행하는 파동을 이용하는 이런 방법은 전파속도 감소의 개념이 단순함에 비해, 실제 활용에서는 전파시간 측정이 번거로운 단점이 있다.

진행파 대신 정상파(standing wave), 즉 진동을 이용하면 좀더 편리한 방법을 강구할 수 있다. 실제로 초음파 주파수 범위의 비틀림 진동을 이용하는 점도계가 외국에서는 개발되어 있다.⁽⁵⁾ 그러나 이 장치의 원리를 뒷받침할 이론은 충분히 전개되지 않고, 단지 왕복 운동하는 평판이 점성 유체와 상호 작용하여 받는 영향이 제시되어 있을 뿐이다.

비틀림 진동을 이용한 초음파 점도계를 국산화함에 있어서, 외국제품보다 우수한 성능을 갖는 제품을 설계하기 위하여 본 연구를 시작하였다. 본 논문은 Fig. 1에 보인 바와 같이 단면이 원형인 균일한 봉을 대상으로 하며, 봉이 점성유체에 잠겨 있고 한쪽 끝에서 비틀림 진동이 가해지는 상황을 고려한다. 봉의 비틀림 진동과 인접 점성

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

† 책임저자, 회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과

E-mail : jokim@saint.ssu.ac.kr

TEL : (02)820-0662 FAX : (02)820-0668

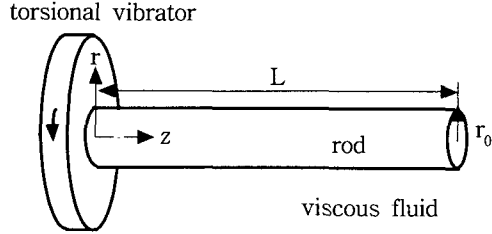


Fig.1 Schematic diagram of a circular rod submerged in a viscous fluid and twisted by a torsional vibrator

유체의 상호작용을 이론적으로 해석하기 위하여, 문제를 정식화 한 후 봉의 진동변위와 유체의 진동속도에 관한 해를 구한다. 해석 결과로부터, 유체의 점성저항을 정량적으로 나타내는 역학적 임피던스를 유도한다. 그리고 역학적 임피던스에 대응하는 전기적 임피던스를 측정하는 실험을 행하여 이론적 결과를 뒷받침한다.

2. 해석

Fig. 1에 보인 바와 같이 단면이 원형인 봉(rod)이 점성유체에 잠겨 있고, 왼쪽 끝의 가진기에 의해 비틀림 진동을 하고 있다. 봉의 전단탄성계수는 G 이고 밀도는 ρ_s 이며, 유체의 점도는 μ 이고 밀도는 ρ_f 이다. 봉의 길이 L 이 단면의 반지름 r_0 보다 상당히 크다고 전제하면, 오른쪽 끝면에서 점성유체와의 상호작용에 의한 영향은 매우 작기 때문에 무시할 만하다.

2.1 문제의 정식화

봉에서 원주방향의 변위 $u_\theta(r, z, t)$ 와 점성유체에서 원주방향의 속도 $v_\theta(r, z, t)$ 로 표현되는 운동방정식^(6,7)과 경계조건은 선행연구보고⁽¹⁾에서 기술한 바와 같다. 다만, 봉의 왼쪽 끝($z = 0$)에서는 가진이 주파수 ω_θ 로 시간 t 에 따른 조화함수 형태이며 원주방향 변위 진폭이 U_θ 이므로, 양끝에서의 경계조건이 다음과 같다.

$$u_\theta = U_\theta \exp(-i\omega_\theta t) \text{ at } z = 0 \text{ \& } r = r_0 \quad (1)$$

$$\sigma_{z\theta} (= G \frac{\partial u_\theta}{\partial z}) \approx 0 \text{ at } z = L \quad (2)$$

지배방정식과 경계조건들을 길이 r_0 , 속도 $c_0 = (G/\rho_s)^{1/2}$, 시간 r_0/c_0 로써 무차원화 하면, 고체봉의 무차원 변위 u 와 점성유체의 무차원 속도 v 및 무차원 변수 $\xi (= r/r_0)$, $\zeta (= z/r_0)$, $\tau (= t c_0/r_0)$ 로써 표현되는데,⁽¹⁾ 부록 A에 실어 놓았다. 여기서 $\rho = \rho_f/\rho_s$, $R = \rho_f r_0 c_0/\mu$, $\omega = \omega_\theta r_0/c_0$, $U_0 = U_\theta/r_0$ 이고, $l = L/r_0$ 이다. R 은 Reynolds수와 같이 정의된 상수로서 점도에 반비례한다.

부록 A의 식 (A1), (A2)의 해는 다음과 같은 형태를 취한다.

$$u(\xi, \zeta, \tau) = U(\xi) \{ C_1 \exp[i(k+ih)\zeta] + C_2 \exp[-i(k+ih)\zeta] \} e^{-i\omega\tau} \quad (3)$$

$$v(\xi, \zeta, \tau) = V(\xi) \{ C_1 \exp[i(k+ih)\zeta] + C_2 \exp[-i(k+ih)\zeta] \} e^{-i\omega\tau} \quad (4)$$

여기서 $k (= \tilde{k} r_0)$ 와 $h (= \tilde{h} r_0)$ 는 각각 단위 거리당 파동수(wave number) \tilde{k} 와 감쇠(attenuation) \tilde{h} 의 무차원 표현이다.

2.2 엄밀해

식 (3), (4)를 식 (A1), (A2)와 경계조건 (A5)-(A8)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$U'' + \frac{1}{\xi} U' - (p^2 + \frac{1}{\xi^2}) U = 0 \quad (5)$$

$$V'' + \frac{1}{\xi} V' - (q^2 + \frac{1}{\xi^2}) V = 0 \quad (6)$$

$$U(0) = 0 \quad (7)$$

$$(U' - \frac{U}{\xi}) \Big|_{\xi=1} = \frac{\rho}{R} (V' - \frac{V}{\xi}) \Big|_{\xi=1} \quad (8)$$

$$-i\omega U(1) = V(1) \quad (9)$$

$$V(\infty) \rightarrow 0 \quad (10)$$

여기서

$$p = \sqrt{(k+ih)^2 - \omega^2}, \quad q = \sqrt{(k+ih)^2 - i\omega R}$$

이다.

식 (5), (6)의 해는 복소 변수의 제1종 및 제2종의 변형 Bessel함수로 표현되는데, 경계조건 (7), (10)을 만족하는 해는 각각 다음과 같다.

$$U(\xi) = B_1 I_1(p\xi) \tag{11}$$

$$V(\xi) = B_2 K_1(q\xi) \tag{12}$$

여기에서 경계조건 (8), (9)를 적용하면 다음과 같이 k 와 h 의 고유치 문제를 얻는다.

$$F(k, h) = \frac{pI_2(p)}{I_1(p)} - \frac{i\omega\rho}{R} \frac{qK_2(q)}{K_1(q)} = 0 \tag{13}$$

복소방정식 (13)은 주어진 ω 값에 대하여 (k, h)와 (R, ρ)의 관계, 즉 $k = k(R, \rho)$ 와 $h = h(R, \rho)$ 를 제공한다. 식 (13)의 해는 Mathematica⁽⁸⁾ 등의 수치해석 프로그램을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

한편, 식 (11), (12)에 사용된 계수 B_1 과 B_2 는 경계조건 (9)를 만족시키기 위해 다음의 관계를 갖는다.

$$B_2 = -i\omega \frac{I_1(p)}{K_1(q)} B_1 \tag{14}$$

식 (11), (12)를 식 (3), (4)에 대입하였을 때, 경계조건 (A3), (A4)를 만족시키기 위한 C_1 과 C_2 및 B_1 과 B_2 를 구한다. 이 상수값을 대입하면 비틀림 진동을 하는 봉의 진동변위와 점성유체의 진동속도에 대한 해는 다음과 같다.

$$u(\xi, \zeta, \tau) = U_0 \frac{I_1(p\xi)}{I_1(p)} X(\zeta) e^{-i\omega\tau} \tag{15}$$

$$v(\xi, \zeta, \tau) = -i\omega U_0 \frac{K_1(q\xi)}{K_1(q)} X(\zeta) e^{-i\omega\tau} \tag{16}$$

여기서

$$X(\zeta) = \frac{e^{i(k+ih)(l-\zeta)} + e^{-i(k+ih)(l-\zeta)}}{e^{i(k+ih)l} + e^{-i(k+ih)l}}$$

이다.

원형 봉의 비틀림 진동에 대한 인접 점성유체의 저항을 나타내는 파라미터로서, 고체봉과 인접 유체의 경계면에서의 역학적 임피던스를 택하였다. 역학적 임피던스는 응력과 입자속도의 비로써 정의된다.⁽⁶⁾ 점성유체로 인한 전단응력 $\sigma_{r\theta}$ 는 선행연구보고⁽¹⁾에 표현된 바와 같은데, 이로부터 무차원화 한 전단응력 $\sigma (= \sigma_{r\theta}/G)$ 는 식 (A6)의 표현과 같으므로, 식 (16)을 식 (A6)의 우변에 대입하여 다음 식을 얻는다.

$$\sigma = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi} \right) = -\frac{\rho}{R} \frac{K_2(q\xi)}{K_1(q\xi)} v(\xi, \zeta, \tau) \tag{17}$$

따라서 경계면 ($\xi = 1$)에서의 역학적 임피던스는 다음과 같이 표현된다.

$$Z_E = \frac{\sigma}{v} \Big|_{\xi=1} = \frac{\rho}{R} \frac{qK_2(q)}{K_1(q)} \tag{18}$$

엄밀해로부터 유도한 무차원 역학적 임피던스 Z_E 를 계산하려면, 식 (13)에서 R 과 ρ 의 함수로 구해지는 k 와 h 를 대입하여 q 를 얻은 후, 이를 식 (18)에 대입하는 번거로운 과정을 거쳐야 한다. 밀도비 ρ 를 0.1, 0.5, 1.0으로 하고 Z_E 를 R 의 함수로 구한 결과를 Fig. 2에 기호로 나타내었다. 이 결과를 다음절에서 근사해로 구한 결과와 비교한다.

식 (18)의 역학적 임피던스는 무차원 표현이므로 차원을 환원할 필요가 있다. $\sigma = \sigma_{r\theta}/G$ 이고 $v = v_\theta/c_0$ 임을 감안할 때 $\sigma_{r\theta}/v_\theta = \rho_s c_0 \sigma/v$ 의 관계가 있다. 따라서 차원을 회복한 역학적 임피던스 Z_e 는 다음과 같다.

$$Z_e = \rho_s c_0 Z_E \tag{19}$$

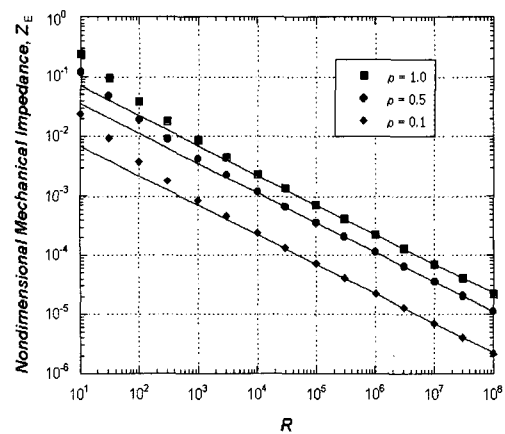


Fig. 2 Nondimensional mechanical impedances obtained from the exact (symbols) and approximate (solid lines) solutions

이 절에서 구한 엄밀해로부터 물리적 현상을 설명하기 위해서는 식 (13)으로 표현된 고유치 문제의 해를 필요로 한다. 따라서 봉의 진동변위 (15)와 유체의 진동속도 (16), 그리고 역학적 임피던스 (18)은 유체 점도의 영향을 외연적으로 보여 주지 않는다. 그러므로 근사해를 구하여 엄밀해의 단점을 보완한다.

2.3 근사해

엄밀해로부터 역학적 임피던스를 계산하는 과정은 앞 절에서 설명한 바와 같이 번거롭다. 또한 유체점도의 영향이 역학적 임피던스에 외연적으로 표현되지 않는 단점이 있다. 따라서 엄밀해의 단점을 보완하기 위하여 근사해를 구한다. 현실적으로는 $R \gg 1$ 이므로, R 의 역수에 해당하는 새로운 변수 $\varepsilon = R^{-1/2}$ 을 정의하면 $\varepsilon \ll 1$ 이어서, 섭동(perturbation)법⁽⁹⁾에 의한 근사해를 구할 수 있다.

선행연구보고⁽¹⁾에서 사용한 섭동 급수 전개 방법을 부록 B에 요약하였다. 이런 과정으로 구한 해⁽¹⁰⁾가 다음과 같다.

$$u(\xi, \zeta, \tau) = \left[\xi + \frac{\varepsilon(1+i)\rho}{2} \sqrt{\frac{\omega^3}{2}} \xi^3 + \frac{i\varepsilon^2}{4} \left\{ (3\omega\rho + \frac{1}{3}\omega^3\rho^2)\xi^3 + (\frac{1}{4}\omega^3\rho^2)\xi^5 \right\} + O(\varepsilon^3) \right] U_0 X(\zeta) e^{-i\omega\tau} \quad (20)$$

$$v(\eta, \zeta, \tau) = \left[-i\omega + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ (1-i)\rho\sqrt{\frac{\omega^3}{2}} + i\omega\eta \right\} + O(\varepsilon^2) \right] U_0 e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2}}\eta} X(\zeta) e^{-i\omega\tau} \quad (21)$$

$$k = \omega + \varepsilon\rho\sqrt{2\omega} + O(\varepsilon^2) \quad (22)$$

$$h = \varepsilon\rho\sqrt{2\omega} + \varepsilon^2 \left(3\rho - 2\rho^2 + \frac{1}{3}\rho^2\omega^2 \right) + O(\varepsilon^3) \quad (23)$$

이 근사해는 급수해의 일부이므로, 유효한 R 값의 범위가 제한된다. 유효범위는 뒤에서 확인한다.

2.2절에서 엄밀해로부터 역학적 임피던스 Z_E 를 구한 것과 같은 원리로, 근사해로부터 역학적 임피던스 Z_A 를 구할 수 있다. 우선 전단응력은

다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \left(\varepsilon \frac{dv}{d\eta} - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon\eta} v \right) \\ &= \rho\varepsilon \left[i\omega \left((1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left((1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left((1-i)\rho\sqrt{\frac{\omega^3}{2}} + i\omega\eta \right) \right] U_0 e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2}}\eta} \\ &\quad \times X(\zeta) e^{-i\omega\tau} \end{aligned} \quad (24)$$

따라서 근사해로부터 유도한 무차원 역학적 임피던스 Z_A 는 다음과 같이 된다.

$$Z_A = \frac{\sigma}{v} \Big|_{\eta=0} = (i-1)\rho\sqrt{\frac{\omega}{2}} \varepsilon - \frac{3\rho}{2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (25)$$

엄밀해와의 비교를 위하여, 식 (25)로부터 Z_A 를 계산하여 Fig. 2에 실선으로 나타내었다. 이 비교를 토대로 근사해가 허용오차 범위에서 사용될 R 의 범위를 추정할 수 있다.

식 (25)의 무차원 역학적 임피던스의 차원을 환원할 필요가 있다. 식 (25)는 복소 임피던스로 표현되는데 실수부만이 임피던스를 나타내므로 차원을 회복한 역학적 임피던스는 다음과 같다.

$$Z_a = \frac{\sqrt{\omega\theta}}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho_f \cdot \mu} + \frac{3}{2r_0} \mu \quad (26)$$

봉의 진동이 비교적 높은 주파수 범위에서 가해지는 경우 식 (26)의 우변의 둘째항은 첫째항에 비해서 상당히 작아 무시될 수 있다. 가령 $\omega\theta = 2\pi \times (13.5 \times 10^3 \text{ Hz})$, $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.1 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, $r_0 = 0.0035 \text{ m}$ 이면 첫째항은 $2060 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$, 둘째항은 $40 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$ 이다. 따라서 식 (26)은 다음과 같이 간략화 된다.

$$Z_a \approx \frac{\sqrt{\omega\theta}}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho_f \cdot \mu} \quad (27)$$

역학적 임피던스는 인접 유체의 밀도와 점도의 곱의 제곱근에 비례한다. 이 원리에 따라, 교체봉과 인접 유체의 경계면에서의 역학적 임피던스 측정으로부터 유체의 점도를 알아낼 수 있다. 근사화를 거쳐 유도한 결과가 타당한지 여부는 뒤에서 실험을 통해 비교 검토한다. 실험과의 비교

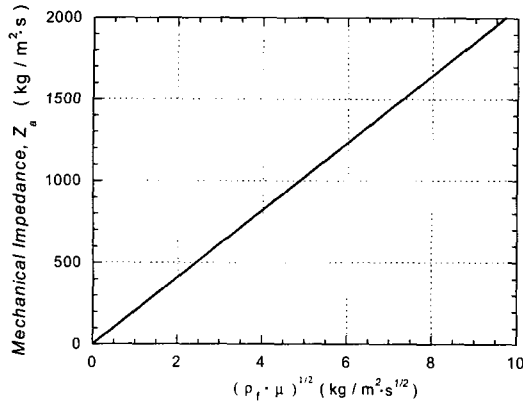


Fig. 3 Mechanical impedance calculated for the frequency $\omega_\theta = 2\pi \times (13.5 \times 10^3 \text{ Hz})$ and depicted as a function of $(\rho_f \cdot \mu)^{1/2}$

를 위하여 식 (27)을 $\omega_\theta = 2\pi \times (13.5 \times 10^3 \text{ Hz})$ 인 경우에 그래프로 나타낸 것이 Fig. 3이다.

2.4 끝면의 영향

봉의 단면적이 원주면 면적에 비해 매우 작으면, 봉의 끝면이 유체로부터 받는 점성저항을 무시할 수 있다. 그렇지 않으면 끝면의 영향을 고려해야 한다. 이를 판단하는 기준 설정을 위하여, 추가적인 해석을 하였다.

점성유체에 접한 평판이 면내 진동할 때의 점성유체의 운동은 'Rayleigh의 문제'라고 불리는 것으로서, 이미 해석되어 있다.⁽¹¹⁾ 그러나 본 논문에서는 단면이 원형인 고체봉의 비틀림 회전 진동을 다루므로, 끝면에 해당하는 원형 평판이 원주 방향으로 회전 진동하는 경우의 유체 운동을 해석한다. 2.2절에서 엄밀해로 구한 고체봉의 비틀림 진동변위 식 (15)에서 반경방향 좌표 ξ 에 대한 식을 경계조건으로 사용한다. 따라서, 부록 A에서 보인 점성유체의 진동속도를 나타내는 식 (A2)에서 무차원 변수 ξ 에 대한 항에 Bessel 방정식의 정의를 적용하면, 점성유체의 원주방향 운동속도 v_e 로 표현된 운동방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial v_e}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_e}{\partial \xi^2} + p^2 v_e \right) \quad \xi \geq l \quad (28)$$

여기서 $p = \sqrt{(k + ih)^2 - \omega^2}$ 이다. 그리고 경계조건은 다음과 같다.

$$v_e = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad \text{at} \quad \xi = l \quad (29)$$

$$v_e \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (30)$$

여기서 u 는 식 (15)로 유도된 고체봉의 원주방향 진동변위이다.

경계조건 (29)와 (30)을 만족하는 식 (28)의 해는 다음과 같다.

$$v_e(\xi, \zeta, \tau) = -2i\omega U_0 \frac{I_1(p\xi)}{I_1(p)} \frac{Y(\zeta)}{Y(l)} \times \frac{e^{-i\omega\tau}}{e^{i(k+ih)l} + e^{-i(k+ih)l}} \quad (31)$$

여기서

$$Y(\zeta) = \exp \left[- \left(\sqrt{\frac{1}{2} \{ D + (\omega^2 + h^2 - k^2) \}} - i \sqrt{\frac{1}{2} \{ D - (\omega^2 + h^2 - k^2) \}} \right) \zeta \right] \quad (32)$$

$$D = (\omega^4 + h^4 + k^4 + 2\omega^2 h^2 + 2h^2 k^2 - 2\omega^2 k^2 + \omega^2 R^2 + 4\omega k h R)^{1/2}$$

이다.

식 (31)로부터 끝면 $\xi = l$ 에서 점성 저항으로 인한 전단응력을 유도하고, 면적에 대해 적분하여 고체봉의 끝면에서 토크(torque)를 유도하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{\rho}{R} \int_0^l 2\pi \xi^2 \left(-\frac{\partial v_e}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=l} d\xi = \frac{4i\pi\rho\omega U_0}{R} \frac{I_2(p)}{pI_1(p)} \frac{Y'(l)e^{-i\omega\tau}}{e^{i(k+ih)l} + e^{-i(k+ih)l}} \quad (33)$$

한편, 무차원화 된 봉의 길이 l 에 걸쳐 원주면($\xi = 1$)이 점성 저항으로 인해 받는 토크를 식 (16)으로부터 유도하면 다음과 같다.

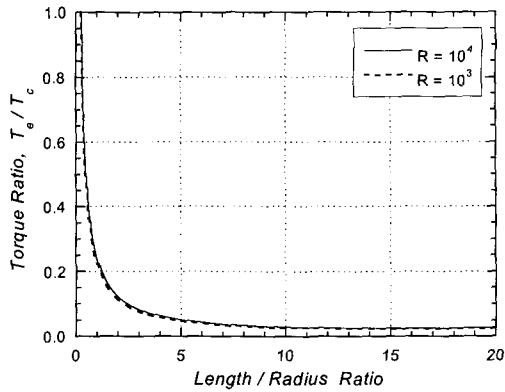


Fig. 4 Ratio of the torques at the end surface (T_e) and the circumferential surface (T_c) of a rod depicted as a function of the length/radius ratio l for $\rho=0.1$ and various R

$$T_c = \frac{\rho}{R} \int_0^l 2\pi\xi^2 \left(-\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi} \right) \Big|_{\xi=1} d\xi$$

$$= -\frac{2\pi\rho\omega U_0}{(k+ih)R} \frac{qK_2(q)}{K_1(q)} \times \frac{e^{i(k+ih)l} - e^{-i(k+ih)l}}{e^{i(k+ih)l} + e^{-i(k+ih)l}} e^{-i\omega t}$$
(34)

비틀림 진동하는 고체봉이 인접 유체로부터 받는 저항력을 토크로 표현할 때, 끝면에서의 토크 T_e 와 원주면에서의 토크 T_c 를 각각 식 (33)과 (34)에서 계산하여 그 비를 구한다. 가령 $R = 1000$ 또는 10000 이고 $\rho = 0.1$ 일 때 토크 비 T_e / T_c 를 봉의 무차원 길이 l , 즉 길이/반경의 함수로 구한 결과가 Fig. 4이다. 이 그래프에서 보인 바와 같이 봉의 단면 반경에 비해서 길이가 증가할수록 끝면의 영향이 급격히 감소한다. 봉의 길이가 단면 반경의 10배 이상이면 끝면의 영향은 3% 이내이므로, 이 정도의 오차를 감수한다면 끝면의 영향은 무시할 수 있다.

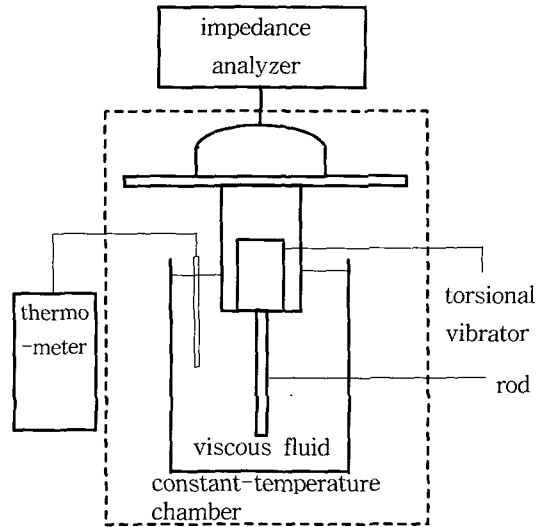


Fig. 5 Experimental apparatus including a torsional vibrator and a circular rod submerged in a viscous fluid

3. 실험

앞에서 해석한 결과 식 (27)에 나타난 바와 같이, 비틀림 진동을 하는 고체봉과 점성유체의 경계면에서의 역학적 임피던스가 $(\rho_f \cdot \mu)^{1/2}$ 에 비례한다. 이론적으로 밝힌 이러한 경향을 확인하기 위하여 실험을 행하였다. 실험에서는 역학적 임피던스에 대응하는 전기적인 임피던스를 측정하여 유체 점도와의 관계를 보인다.

3.1 실험장치 및 방법

실험에 사용된 장치는 Fig. 5에 개략적으로 보인 바와 같이 봉에 결합된 비틀림 진동 변환기와 임피던스 분석기(Hewlett Packard, HP 4194A)로 구성되어 있다. 봉과 변환기의 결합체는 일본 富士超音波工業(株)의 초음파 점도 측정장치(Fuji, FUV-101)에서 분리한 것이다. 봉은 점성유체에 잠기고 이들은 항온조(Heraeus Vötsch, HC 7020) 안에 놓여 특정 온도를 유지할 수 있다. 유체의 온도를 정확히 측정하기 위해 온도계(Fluke, 50S)의 열전대(K형)를 유체 안에 배치하였다. 변환기는 전기적인 신호와 역학적 진동간의 상호변환을

일으켜 주는 요소이다. 실험에 사용한 변환기는 랑주방(Langevin)형 압전 비틀림 변환기로서, 이에 관해서는 다른 문헌⁽¹²⁾에 자세히 설명되어 있다.

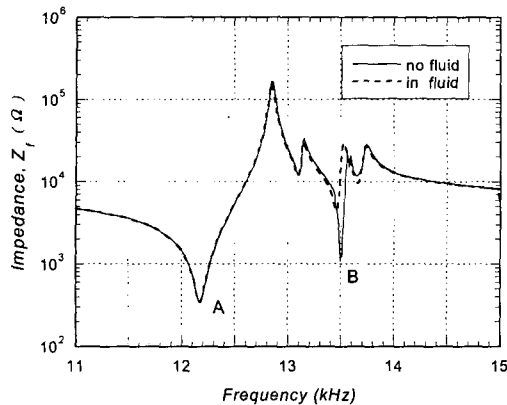


Fig. 6 Impedance curve of the transducer-rigid system measured as a function of the frequency

변환기는 자체의 공진 주파수에서 진동을 효율적으로 발생시킨다. 임피던스 분석기를 사용하여 변환기의 임피던스를 주파수의 함수로 측정한 예가 Fig. 6에 보여있다. 이 그래프에서 임피던스가 극소값을 갖는 위치 A의 주파수 12.1 kHz, B의 주파수 13.5 kHz등이 변환기와 붕이 결합된 센서의 공진 주파수이다. 다음절의 실험 결과에서 관찰되듯이, 붕을 점성유체에 담글 때 B 극소값의 변화가 크다. 이는 위치 B가 주로 붕의 공진 모드에 의한 것이고, 위치 A는 주로 압전 변환기의 공진 모드에 의한 것임을 의미한다.

그리고 이때의 임피던스는 붕이 결합된 변환기가 갖고 있는 임피던스 Z_0 이다. 변환기의 가진에 의해 비틀림 진동을 하는 고체붕이 점성유체에 잠기면, 유체의 점성 저항이 변환기 임피던스에 더해져 전체 임피던스 Z_f 가 된다. 따라서 유체의 점성 저항에 해당하는 임피던스 Z_v 를 다음과 같이 구별해 낼 수 있다.

$$Z_v = Z_f - Z_0 \tag{35}$$

Z_v 는 전기적 임피던스로서 역학적 임피던스 Z_a 와는 다른 차원의 파라미터이지만, 유체 점성 저항과의 관계에서 서로 대응하므로 비교 대상으로 택하였다.

Table 1 Liquid properties and measured impedance

liquid & temperature (°C)		KS100							KS20					KS2.5			water
		20	24	27	30	34	37	40	20	25	30	35	40	20	30	40	40
liquid properties	ρ_f (kg/m ³)	868	865	863	862	859	857	855	867	864	861	857	854	777	769	762	992
	$\mu \times 10^3$ (kg/m · s)	97.1	76.2	64.4	55.4	45.2	39.4	34.7	17.7	14.3	11.8	9.82	8.28	1.85	1.52	1.27	0.653
	$\sqrt{\rho_f \cdot \mu}$ (kg/m ² · s ^{1/2})	9.18	8.12	7.46	6.91	6.24	5.82	5.40	3.92	3.52	3.18	2.90	2.66	1.20	1.08	0.98	0.81
measured impedance of A (Ω)	average	36.7	34.5	30.2	28.2	26.2	24.1	22.5	15.0	13.7	11.4	10.5	9.03	.	.	.	2.78
	standard deviation	0.2	0.7	0.6	0.3	0.8	0.2	0.9	0.7	0.4	0.7	0.5	0.6	.	.	.	0.5
measured impedance of B (kΩ)	average	3.63	3.34	3.17	2.96	2.73	2.53	2.37	1.83	1.63	1.48	1.32	1.19	0.61	0.55	0.45	0.39
	standard deviation	0.03	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.0
	frequency(kHz)	13.362	13.386	13.398	13.402	13.415	13.417	13.424	13.456	13.462	13.467	13.478	13.486	13.498	13.503	13.512	13.521

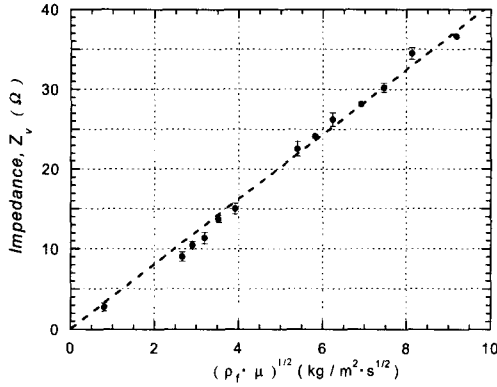


Fig. 7 Electrical impedance measured at the frequency $\omega_\theta = 2\pi \times (12.1 \times 10^3 \text{ Hz})$ and depicted as a function of $(\rho_f \cdot \mu)^{1/2}$

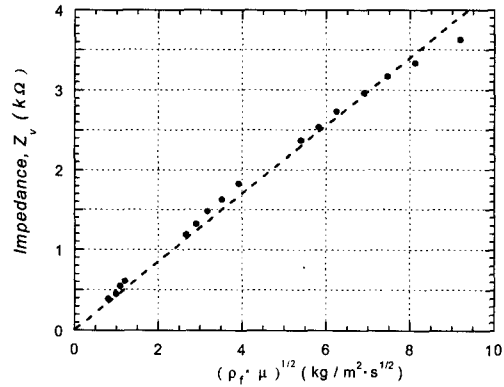


Fig. 8 Electrical impedance measured at the frequency $\omega_\theta = 2\pi \times (13.5 \times 10^3 \text{ Hz})$ and depicted as a function of $(\rho_f \cdot \mu)^{1/2}$

3.2 실험 결과

유체의 점도 값에 따른 임피던스 Z_v 를 측정하는 대상으로 점도표준액(KS100, KS20, KS2.5)과 물을 택하였다. 점도표준액⁽¹³⁾은 온도 20, 30 및 40℃에서 점도와 밀도 값이 제공되는 규격품이다. 실험 데이터를 좀더 많이 확보하기 위하여 20℃와 30℃ 사이, 30℃와 40℃ 사이의 온도에서도 측정을 하였다. 사이 온도에서의 밀도와 점도는 보간법(interpolation)으로 구하였는데, 밀도는 선형 보간으로 결정하였고 점도 보간에는 다음식⁽¹⁴⁾을 사용하였다.

$$\log \left[\log \left(\frac{\mu}{\rho_f} + 0.7 \right) \right] = M - N \log T \quad (36)$$

여기서 T 는 절대온도(K)이고, M 과 N 은 상수로서 20℃와 30℃ 또는 30℃와 40℃에서 각각 주어진 밀도와 점도값을 식 (36)에 대입하여 연립방정식을 풀어 결정한다. 물을 대상으로 할 때에는 40℃에서 측정을 행하였다.

각 온도에서 액체의 점도 관련 물성치와 임피던스 측정 결과를 Table 1에 나타내었다. 실험을 3번 반복한 결과의 평균을 취하였고, 이 실험 결과에 대한 그래프를 Fig. 7과 Fig. 8에 $(\rho_f \cdot \mu)^{1/2}$ 의 함수 형태로 나타내었다. 점선은 측정 데이터를 직선 맞춤하여 나타낸 것이다. Fig. 7과 Fig. 8에 보인 바와 같이 유체의 점성

저항을 나타내는 파라미터인 전기적 임피던스 Z_v 가 점도와 밀도의 곱의 제곱근 $(\rho_f \cdot \mu)^{1/2}$ 에 선형적으로 비례함을 알 수 있다. 이는 Fig. 3에서 이론적으로 밝힌 역학적 임피던스와 같은 경향을 보여준다.

역학적 임피던스와 전기적 임피던스가 서로 다른 단위를 갖고 있기 때문에, 다음과 같이 표현되는 비례상수 P 를 곱해야 정량적 관계식이 완성된다.

$$Z_v = P \sqrt{\rho_f \cdot \mu} \quad (37)$$

비례상수 P 의 값은 Fig. 7과 Fig. 8에 보인 그래프의 기울기에 해당하는 것으로서, 본 논문에서 사용된 장치에서는 $P_A = 4.1 \Omega / (\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}^{1/2})$, $P_B = 0.43 \text{ k}\Omega / (\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}^{1/2})$ 이다. Fig. 7과 Fig. 8의 그래프를 비교하면 B에서의 측정결과가 더 큰 기울기를 보이고 있다. 이는 Fig. 6에서 B부분이 주로 봉의 공진에 의한 것으로서, 점선으로 나타낸 바와 같이 점성 유체의 영향을 많이 받기 때문이다. 유체의 영향으로 공진주파수가 다소 저하되는데, Fig. 7과 Fig. 8의 점도 범위에서 최대 1%의 변화를 보이고 있어 무시할 수 있다.

식 (37)을 변형하여 점도에 관한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mu = \frac{Z_v^2}{\rho_f \cdot P^2} \quad (38)$$

따라서 표준점도액을 사용하여 비례상수 P_A 또는 P_B 의 값을 결정한 후, 밀도를 아는 유체에서 점성 저항에 대응하는 전기적 임피던스 Z_v 를 측정함으로써 유체의 점도를 알아낼 수 있다.

4. 결론

점성유체에 잠긴 원형 봉이 한쪽 끝에서 비틀림 진동을 받을 때, 인접 유체의 점성저항이 봉의 비틀림 진동에 주는 영향을 규명하였다. 점성유체로 인한 저항을 나타내는 파라미터로서 고체 봉과 인접 유체의 경계면에서의 역학적 임피던스를 택하였고, 엄밀해법과 근사해법을 병행하여 관계식을 유도하였다. 근사적으로 구한 해에서 봉과 유체의 경계면에서의 역학적 임피던스가 유체의 밀도와 점도의 곱의 제곱근에 비례함을 밝혔다. 엄밀해법으로 구한 해에서는 근사해가 유효한 범위를 확인하였다. 봉의 끝면이 유체와 접함으로써 받는 영향도 해석하였는데, 무시할 만한 영향임을 확인하였다.

이론적으로 유도한 유체의 점도와 임피던스의 관계를 실험으로 검증하였다. 량주방형 압전 비틀림 변환기와 탄성봉이 결합된 센서를 사용하여 표준점도액에서 임피던스 측정을 한 결과, 유체 점성으로 인한 역학적 임피던스가 유체의 밀도와 점도의 곱의 제곱근에 비례함을 관찰하였고, 이론적 해석 결과를 입증하였다. 그리고 이 관계를 활용하여, 비틀림 진동을 하는 봉을 점도 측정 센서로 사용할 가능성을 제시하였다.

후 기

본 논문은 ISTECH(구, ㈜신창)이 주관한 산업기반기술개발사업의 위탁기술개발 과제를 수행하여 얻은 연구결과임.

참고문헌

- (1) 김진오, 전한용, 2000, "봉의 비틀림 고유진동에 대한 인접 점성유체의 영향," 한국소음진동 공학회지, 제10권, 제1호, pp. 168~173.
- (2) Kim, J. O., Wang, Y., Bau, H. H., 1991, "The Effect of an Adjacent Viscous Fluid on the Transmission of Torsional Stress Waves in a Submerged Waveguide," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 89, No. 3, pp. 1414~1422.
- (3) 김진오, 1999, "초음파 점도계용 고체 매질의 탄성파와 인접 점성유체 간의 상호작용," 한국음향학회지, 제18권, 제5호, pp. 28~34.
- (4) Bau, H. H., Kim, J. O., Lynnworth, L. C., Nguyen, T. H., 1990, "Torsional Wave Fluid Sensor and System," United States Patent 4,893,496.
- (5) 谷澤 公彦, 坂本 泰弘, 1995, "振り振動ランジュバン型超音波粘度計," *超音波TECHNO*, 2月号, pp. 23~27.
- (6) Achenbach, J. D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 241, p. 24.
- (7) Fox, R. W., McDonald, A. T., 1998, *Introduction to Fluid Mechanics*, 5th ed., John Wiley & Sons, New York, p. 709.
- (8) Wolfram, S., 1988, *Mathematica-A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, New York.
- (9) Nayfeh, A. H., 1981, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York.
- (10) 전한용, 2000, "봉의 비틀림 진동에 대한 인접 점성유체의 영향," *숭실대학교 석사학위 논문*, 제3장.
- (11) Yih, C.-S., 1979, *Fluid Mechanics*, West River Press, Michigan, pp. 321~324.
- (12) 권오수, 김진오, 2001, "량주방형 압전 비틀림 변환기의 진동특성," *대한기계학회논문집(A)*, 제25권, 제8호, pp. 1197~1205.
- (13) 한국공업표준협회, 1993, "점도계 교정용 표준액," *한국산업규격 KS A 5103*.
- (14) American Society for Testing and Materials, 1993, "Viscosity-Temperature Charts for Liquid Petroleum Products," *Annual Book of ASTM Standards*, D 341-89.

(1) 김진오, 전한용, 2000, "봉의 비틀림 고유진동

부 록

A. 무차원화된 지배방정식과 경계조건

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$$

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad (A1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$1 \leq \xi < \infty \quad (A2)$$

$$u = U_0 \exp(-i\omega\tau) \quad \text{at} \quad \zeta = 0 \quad \& \quad \xi = 1 \quad (A3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \approx 0 \quad \text{at} \quad \zeta = l \quad (A4)$$

$$u = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 0 \quad (A5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi} = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi} \right) \quad \text{at} \quad \xi = 1 \quad (A6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = v \quad \text{at} \quad \xi = 1 \quad (A7)$$

$$v \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (A8)$$

B. 근사해를 위한 섭동급수전개

상당히 작은 크기의 변수 ϵ 을 이용해 유체에 대하여 확장한 좌표를 $\eta = (\xi - 1)/\epsilon$ 로 정의하면 식 (5), (6)과 경계조건 (7)-(10)은 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2} U - [(k+ih)^2 - \omega^2] U = 0$$

$$(B1)$$

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon\eta} \frac{dV}{d\eta} - \frac{\epsilon^2}{(1+\epsilon\eta)^2} V - [\epsilon^2(k+ih)^2 - i\omega] V = 0$$

$$(B2)$$

$$U(0) = 0 \quad (B3)$$

$$\left(U' - \frac{U}{\xi} \right) \Big|_{\xi=1} = \rho \left(\epsilon V' - \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon\eta} V \right) \Big|_{\eta=0}$$

$$(B4)$$

$$V(0) = -i\omega U(1) \quad (B5)$$

$$V(\infty) \rightarrow 0 \quad (B6)$$

R 값이 무한대 (즉 ϵ 값이 0)로 되는 경우는 인접 유체가 없거나 인접유체가 비점성인 경우에 해당한다.

$R > 1$ (즉 $\epsilon < 1$)인 경우에 기본모드에 대한 근사해는 다음과 같은 급수 형태로 표현될 수 있다.

$$U(\xi) = U_0 \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(\xi) \quad (B7)$$

$$V(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n v_n(\eta) \quad (B8)$$

$$k = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n k_n \quad (B9)$$

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n h_n \quad (B10)$$

식 (B7)-(B10)의 급수를 식 (B1)-(B6)에 대입하고 ϵ 의 오름차순으로 정리하여, ϵ 의 차수별 지배방정식과 경계조건에 의해 단계적으로 해를 구한다.^(1,10)