

2축하중을 받는 직교이방성체내 경사균열진전의 해석

임 원 균[†] · 최 승 룡^{*}
(2001년 4월 9일 접수, 2002년 3월 5일 심사완료)

Analysis of Inclined Crack Extension in Orthotropic Solids Under Biaxial Loading

Won-Kyun Lim and Seung-Yong Choi

Key Words: Mixed-Mode Crack(혼합모드균열), Anisotropic Solid(이방성재료), Biaxial Load(2축하중), Crack Extension Angle(균열진전각도), Normal Stress Ratio Theory(수직응력비이론), Second Order Stress Term(응력2차항)

Abstract

The objective of this work is to develop the capability to analyze accurately the mixed-mode propagation of a crack in composite structures with elastic orthotropic material stiffness properties and anisotropic material strength characteristics. In order to develop the capability to fully analyze fracture growth and failure in anisotropic structures, we examined the fundamental problem of mixed mode fracture by carrying out the analysis on orthotropic materials with an inclined crack subject to biaxial loading. Our goal here is to include an additional term in the asymptotic expansion of the crack tip stress field and to show that the direction of crack initiation can be significantly affected by that term. We employ the normal stress ratio theory to predict the direction of crack extension. It is shown that the angle of crack extension can be altered by horizontal loads and the use of second order term in the series expansion is important for the accurate determination of crack growth direction.

1. 서 론

최근 이방성 복합재료는 항공기나 자동차 그리고 발전설비와 같은 구조시스템분야에 공업용 구조재료로서 효과적으로 쓰이고 있다. 이들 구조시스템의 안전과 신뢰성은 시스템 구성요소의 설계에 달려있다. 이들 요소들은 통상 복잡한 하중상태에 놓이게 되는데 2축방향으로의 하중을 받을 수 있다. 복합재료를 사용하는 이점은 특별한 설계하중에 적합하도록 재료의 강성과 강도를 만들 수 있다는 것이다. 대부분의 이방성 복합재료는 금속과 같이 연성이 적은 취성파괴의 성질을

나타내기때문에 이러한 복합재료 구조물의 거동을 이해해야 하며, 따라서 파손을 예측하기 위한 해석을 수행할 필요가 있다. 파괴역학의 체계 안에서 이방성재료 및 구조물의 파손해석은 초기결함의 균열개시와 성장에 기초를 둔다. 특히 사용하중 중에 균열을 내포하는 복합재료의 경우에 균열성장을 예측하는 문제는 경제적으로나 기술적으로 매우 중요한 과제이다. 인간이 만들어낸 이방성재료이든 자연상태로 존재하는 재료이든 이들 재료의 성질을 알기 위해서는 균열성장에 대한 해석이 이루어져야 한다. 이방성재료에서의 강도해석, 구조설계 또는 파괴에 대응한 설계에서 균열성장방향과 균열진전의 위치 그리고 임계하중의 예측은 이들 구조물의 안전을 위하여 필수적이다.

이방성재료에서의 파괴는 등방성재료에서 보다 상당히 복잡하며 균열의 전파하는 방향과 하중은 여러 변수의 함수로 표시된다. 이방성재료에

† 책임저자, 회원, 명지대학교 기계공학과

Email : limwk@mju.ac.kr

TEL : (031)330-6422 FAX : (031)321-4959

* 명지대학교 대학원

서 변화하는 재료강도는 균열의 성장방향과 가장 밀접히 연관되어 있으며, 균열성장방향과 하중 모두 균열주위의 응력과 균열각도 그리고 재료강도의 함수이다. 이러한 응력과 재료강도의 함수는 매우 복잡하여 균열이 성장하는 방향과 하중을 결정하는 일 또한 단순하지 않다. 일반적으로 이방성복합재료에서 재료주축과 평행하게 존재하는 모드 I 균열은 균열선과 평행하게 진행한다. 그러나 이는 균열선단에서의 응력분포를 응력확대계수라는 하나의 매개변수로서 나타내었을 경우이고 급수전개식에서 응력의 비특이항을 고려하는 경우에 균열의 전진각도는 이방성재료의 특성치에 따라서 균열선과 평행하지 않을 수도 있으며 더욱이 이는 2축하중에 매우 의존적임이 나타났다.^(1,2) 이러한 연구는 모드 I 균열에 대해서만 이루어졌다. 그러나 이방성복합재료에서의 균열이 일반적으로 혼합모드의 상태로 존재하고 있음을 고려할 때에 이에 대한 해석이 필요하다.

본 연구에서는 2축하중을 받는 이방성 복합재료 내 혼합모드 균열문제를 취급한다. 경사균열을 내포하는 이방성평판에서 가로축과 평행하게 작용하는 수평하중이 균열전진각도에 미치는 영향을 정량적으로 제시하는데 있다. 이를 위하여 2축하중을 받는 경사균열선단부근의 응력상태의 특성을 이론적으로 조명해 보고 응력식에서 수평하중과 연관되어 있는 비특이항의 산출을 유도한다. 아울러 이의 성분이 균열선단부근에서의 원주응력분포와 초기균열전진각도에 미치는 영향에 대해서도 검토해 보고자 한다.

2. 이방성체의 기본 방정식

이방성재료를 거시적으로 보아 균질 이방성탄성체라고 생각할 때 2차원 평면응력상태에서 Hooke의 법칙은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\tau_{xy} \\ \epsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 a_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)는 컴프라이언스계수이다. Airy의 응력함수 $U(x, y)$ 로 나타낸 적합방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$- 2a_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (2)$$

응력함수 $U(x, y)$ 를 $U(x, y) = e^{x+sy}$ 라고 가정하면 식 (2)는 다음과 같은 상미분방정식의 형태로 된다.

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (3)$$

한편 탄성대칭인 완전직교이방성체인 경우에는 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식 (3)은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$a_{11}s^4 + (2a_{12} + a_{66})s^2 + a_{22} = 0 \quad (4)$$

이 때 특성방정식인 상기식 (4)의 복소근은 다음과 같이 주어진다.⁽³⁾

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}} = \alpha_1 + i\beta_1 \\ s_2 &= -\sqrt{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}} = \alpha_2 + i\beta_2 \\ s_3 &= \alpha_1 - i\beta_1, \quad s_4 = \alpha_2 - i\beta_2 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 α_0, β_0 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}, \\ \beta_0 &= \frac{1}{a_{11}} \left(\frac{a_{66}}{2} + a_{12} \right) = \frac{E_{11}}{2\mu_{12}} - \nu_{12} \end{aligned} \quad (6)$$

상기식에서 E_{11}, E_{22} 는 각각 주축인 x, y 방향으로의 탄성계수이고, ν_{12} 는 포아송비 그리고 μ_{12} 는 xy 면에서의 전단탄성계수이다.

결과적으로 응력함수 $U(x, y)$ 는 식 (4)과 식 (5)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$U(x, y) = 2 \operatorname{Re} [U_1(z_1) + U_2(z_2)] \quad (7)$$

여기서 $z_1 = x + s_1 y, z_2 = x + s_2 y$ 이다. 식 (7)에서 응력함수 $U_j(z_j)$ ($j=1, 2$)의 첨자변환을 피하기 위하여 다음과 같은 새로운 해석함수 $\phi(z_1) = dU_1(z_1)/dz_1$ 과 $\psi(z_2) = dU_2(z_2)/dz_2$ 을 도입하고 이를 응력성분들과 관련된 응력함수식에 대입하면 다음과 같이 $\phi(z_1)$ 과 $\psi(z_2)$ 로 표시된 응력성분식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \phi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_{yy} &= 2 \operatorname{Re} [\phi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [s_1 \phi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

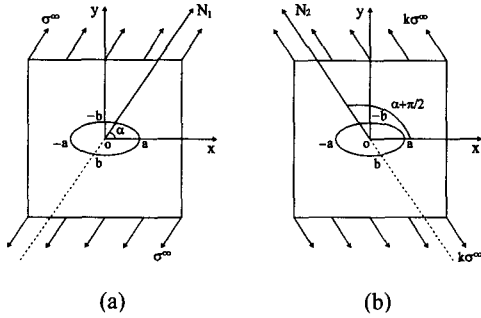


Fig. 1 Anisotropic plate with an inclined elliptical hole under tension

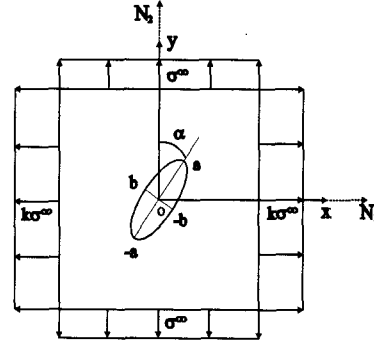


Fig. 2 Inclined elliptical hole in anisotropic plate under biaxial load

여기서 $\phi'(z_1)$ 과 $\psi'(z_2)$ 는 각각 z_1 과 z_2 에 대하여 미분한 것이다. 아울러 변위식들은 식 (8)을 식 (1)에 대입하여 적분을 수행하여 얻을 수 있는데, 이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2\text{Re} [p_1 \phi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] \\ v(x, y) &= 2\text{Re} [q_1 \phi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] \end{aligned} \quad (9)$$

직교이방성체의 경우 $p_j, q_j (j=1, 2)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}s_1^2 + a_{12}, \quad p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12} \\ q_1 &= \frac{a_{12}s_1^2 + a_{22}}{s_1}, \quad q_2 = \frac{a_{12}s_2^2 + a_{22}}{s_2} \end{aligned} \quad (10)$$

3. 2축하중을 받는 무한이방성체내 경사균열의 해석함수 유도

Fig. 1(a)와 같이 타원공을 내포한 무한이방성 평판이 주축 N_1 과 x 축 사이의 각도 α 인 경사하중을 받는 경우의 해석함수 $\phi^{(a)}, \psi^{(a)}$ 는 Savin⁽⁴⁾에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi^{(a)}(z_1) &= \phi_0^{(a)}(z_1) + B^{*(a)}z_1 \\ \psi^{(a)}(z_2) &= \psi_0^{(a)}(z_2) + (B'^{*(a)} + iC'^{*(a)})z_2 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $\phi_0^{(a)}(z_1), \psi_0^{(a)}(z_2), B^{*(a)}, B'^{*(a)}$ 그리고 $C'^{*(a)}$ 는 외부하중과 이방성재료특성치에 따라서 결정되는 값으로서 이는 각각 다음과 같다.

$$\phi_0^{(a)}(z_1) = -\frac{i\sigma^\infty(a - is_1b)}{4(s_1 - s_2)} \left\{ \frac{b(s_2 \sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{ia(2s_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right\} \\ \psi_0^{(a)}(z_2) &= \frac{i\sigma^\infty(a - is_2b)}{4(s_1 - s_2)} \left\{ \frac{b(s_1 \sin 2\alpha - 2\cos^2 \alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right. \\ & \left. + \frac{ia(2s_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right\} \quad (12) \\ B^{*(a)} &= \sigma^\infty \frac{\cos^2 \alpha + (a_2^2 + \beta_2^2) \sin^2 \alpha + a_2 \sin 2\alpha}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ B'^{*(a)} &= \sigma^\infty \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - 2a_1 a_2] \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - a_2 \sin 2\alpha}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ C'^{*(a)} &= \sigma^\infty \left\{ \frac{(a_1 - a_2) \cos^2 \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right. \\ & \left. + \frac{[a_2(a_1^2 - \beta_1^2) - a_1(a_2^2 - \beta_2^2)] \sin^2 \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right. \\ & \left. + \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - (a_2^2 - \beta_2^2)] \sin \alpha \cos \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

마찬가지로 Fig. 1(b)와 같이 주축 N_2 와 x 축 사이의 각이 $\alpha + \pi/2$ 인 경사하중을 받는 경우의 해석함수 $\phi^{(b)}, \psi^{(b)}$ 는 식 (12)와 식 (13)에서 각각 σ^∞ 에 대신에 $k\sigma^\infty$ 를 그리고 각도 α 에 대신에 90° 만큼 회전한 $\alpha + \pi/2$ 를 대입하여 얻을 수 있다. 따라서 Fig. 2와 같이 경사진 타원공을 내포한 무한평판이 x 축으로 수평하중 $k\sigma^\infty$ 그리고 y 축으로 수직하중 σ^∞ 의 2축하중을 받는 경우의 해석함수는 Fig. 1(a)와 (b)의 해석함수를 중첩하여 얻을 수 있으며 이는 다음과 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= \phi^{(a)}(z_1) + \phi^{(b)}(z_1) \\ &= \phi_0^{(a)}(z_1) + \phi_0^{(b)}(z_1) + [B^{*(a)} + B'^{*(b)}]z_1 \\ \psi(z_2) &= \psi^{(a)}(z_2) + \psi^{(b)}(z_2) \\ &= \psi_0^{(a)}(z_2) + \psi_0^{(b)}(z_2) \end{aligned}$$

$$+ [B^{*(a)} + B^{*(b)} + i(C^{*(a)} + C^{*(b)})]z_2 \quad (14)$$

각각의 항들을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= -\frac{i\sigma^\infty(a - is_1b)}{4(s_1 - s_2)} \\ &\left\{ \frac{b[(1-k)s_2 \sin 2\alpha + 2(\cos^2 \alpha + k \sin^2 \alpha)]}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ia[2s_2(\sin^2 \alpha + k \cos^2 \alpha) + (1-k)\sin 2\alpha]}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right\} \\ &+ B^* z_1 \\ \psi(z_2) &= \frac{i\sigma^\infty(a - is_2b)}{4(s_1 - s_2)} \\ &\left\{ \frac{b[(1-k)s_1 \sin 2\alpha - 2(\cos^2 \alpha + k \sin^2 \alpha)]}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ia[2s_1(\sin^2 \alpha + k \cos^2 \alpha) + (1-k)\sin 2\alpha]}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right\} \\ &+ (B^* + iC^*)z_2 \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^* &= \frac{\sigma_x^{(\infty)} + (a_2^2 + \beta_2^2)\sigma_y^{(\infty)} + 2a_2\tau_{xy}^{(\infty)}}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ B^* &= \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - 2a_1a_2]\sigma_y^{(\infty)} - \sigma_x^{(\infty)} - 2a_2\tau_{xy}^{(\infty)}}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ C^* &= \frac{(a_1 - a_2)\sigma_x^{(\infty)} + [a_2(a_1^2 - \beta_1^2) - a_1(a_2^2 - \beta_2^2)]\sigma_y^{(\infty)}}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ &+ \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - (a_2^2 - \beta_2^2)]\tau_{xy}^{(\infty)}}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \quad (16) \end{aligned}$$

여기서 $\sigma_x^{(\infty)} = \sigma^\infty \cos^2 \alpha + k\sigma^\infty \sin^2 \alpha$, $\sigma_y^{(\infty)} = k\sigma^\infty \cos^2 \alpha + \sigma^\infty \sin^2 \alpha$ 그리고 $\tau_{xy}^{(\infty)} = \sigma^\infty(1-k)\sin \alpha \cos \alpha$ 이다. 따라서 Fig. 3과 같이 2축 하중을 받는 무한이방성평판내 경사균열에 대한 해석함수는 타원공을 평면균열화시켜 얻을 수 있다. 경사균열에 대한 해석함수와 이의 1차 도함수는 각각 다음과 같다.

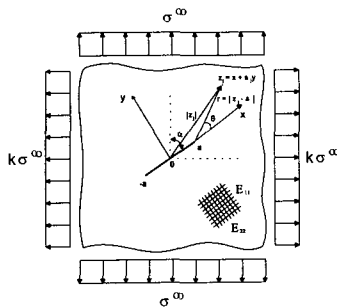


Fig. 3 Inclined crack in orthotropic plate under biaxial load

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= \frac{s_2\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} [z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2}] + \Gamma_1 z_1 \\ \psi(z_2) &= -\frac{s_1\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} [z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2}] + \Gamma_2 z_2 \\ \phi'(z_1) &= \frac{s_2\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right] + \Gamma_1 \\ \psi'(z_2) &= -\frac{s_1\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} \right] + \Gamma_2 \quad (17) \end{aligned}$$

여기서 $\Gamma_1 = B^*$ 이고 $\Gamma_2 = (B^* + iC^*)$ 이다.

4. 균열선단주위의 응력식에서 2차항 유도

균열선단지역만을 집중적으로 나타내도록 하기 위하여 다음과 같은 균열선단에서 시작하는 새로운 극좌표 ζ_j 를 도입한다.(Fig. 3)

$$\begin{aligned} z_j - a &= \zeta_j = r(\cos \theta + s_j \sin \theta), \\ z_j &= x + s_j y \quad (j=1, 2) \quad (18) \end{aligned}$$

따라서 식 (17)의 해석함수들은 복소변수 ζ_j ($j=1, 2$)의 항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_1) &= \frac{s_2\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} [(\zeta_1 + a) - \sqrt{\zeta_1^2 + 2\zeta_1 a}] \\ &+ \Gamma_1(\zeta_1 + a) \\ \psi(\zeta_2) &= -\frac{s_1\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} [(\zeta_2 + a) - \sqrt{\zeta_2^2 + 2\zeta_2 a}] \\ &+ \Gamma_2(\zeta_2 + a) \\ \phi'(\zeta_1) &= \frac{s_2\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[1 - \frac{(\zeta_1 + a)}{\sqrt{(\zeta_1^2 + 2a\zeta_1)}} \right] + \Gamma_1 \\ \psi'(\zeta_2) &= -\frac{s_1\sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[1 - \frac{(\zeta_2 + a)}{\sqrt{(\zeta_2^2 + 2a\zeta_2)}} \right] + \Gamma_2 \quad (19) \end{aligned}$$

여기서 $0 < |\zeta_j| = r \ll 1$, ($j=1, 2$)이다. 상기식을 단순화시키기 위해서 먼저 1차도함수에서 우변 괄호내 둘째항을 급수전개시키고 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi'(\zeta_1) &= \mp \frac{\sigma^\infty}{2(s_1 - s_2)} \left\{ \frac{C_j}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\zeta_j}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \left(\frac{\zeta_j}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{32} \left(\frac{\zeta_j}{a} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right] + \left(\Gamma_j \pm \frac{\sigma^\infty}{2(s_1 - s_2)} C_j \right) \left(\frac{\zeta_j}{a} \right)^0 \right\}_{j=1,2} \quad (20) \end{aligned}$$

여기서 C_j ($j=1, 2$)는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} C_1 &= s_2(\sin^2 \alpha + k \cos^2 \alpha) + (1-k)\sin \alpha \cos \alpha \\ C_2 &= s_1(\sin^2 \alpha + k \cos^2 \alpha) + (1-k)\sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

식 (20)에서 $\zeta^{-1/2}$ 항과 복소변수와 무관한 ζ^0 인 비특이항만 유지하고 나머지 고차항들을 생략하면 해석함수식의 미분식은 다음과 같이 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \phi'(\zeta_1) \\ \psi(\zeta_2) \end{aligned} \right\} \cong \mp \frac{\sigma^\infty C_j}{2\sqrt{2}(s_1 - s_2)} \left[\left(\frac{\zeta_j}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(r_j \pm \frac{\sigma^\infty C_j}{2(s_1 - s_2)} \right) \right]_{j=1,2} \quad (21)$$

따라서 균열선단에서의 응력성분들은 해석함수로 표시된 식 (8)에 극좌표변수인 식 (21)을 대입하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_2^2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_1^2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ &+ \sigma^\infty \operatorname{Re} [(\cos \alpha + s_1 \sin \alpha)(\cos \alpha + s_2 \sin \alpha) + k(\sin \alpha - s_1 \cos \alpha)(\sin \alpha - s_2 \cos \alpha)] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

여기서 $K_I = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} [(1+k) - (1-k) \cos 2\alpha]$, $K_{II} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} (1-k) \sin 2\alpha$ 이고 α 는 y 축과 균열축이 이루는 각도이다. 직각좌표로 표시한 균열선단주위의 응력식에서 2차항은 x 방향의 응력성분에만 나타남을 알 수 있다.

5. 초기균열진전각도의 결정

이방성체내 초기균열이 진전각도의 결정을 위하여 Buczek 와 Herakovich⁽⁵⁾에 의하여 제안된 수직응력비이론을 적용하였다. 이는 등방성체에 적용된 최대원주응력이론을 이방성체의 적용을 위하여 수정한 것으로서 각도에 따라 변화하는 이방성체의 강도함수 $T_{\theta\theta}$ 를 정의하여 원주응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 를 강도함수로 무차원화시킨 수직응력비 $R_0(\theta)$ 를 이용하는 것으로써, 이의 값이 최대가 되는 방향으로 균열이 진행한다고 가정한다. 즉, 이 기준은 균열선단으로부터 미소거리 r_0 에서 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$R_0(r_0, \theta) = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_0, \theta)}{T_{\theta\theta}} \cdot \left[\frac{\partial R_0}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} = 0, \left[\frac{\partial^2 R_0}{\partial \theta^2} \right]_{\theta_0} < 0 \quad (23)$$

여기서 θ_0 는 균열진전각도이고, $T_{\theta\theta}$ 는 강도함수로서 다음과 같이 정의한다.

$$T_{\theta\theta} = X_T \sin^2 \theta + Y_T \cos^2 \theta \quad (24)$$

여기서 X_T 와 Y_T 는 각각 이방성체에서의 섬유주축방향 및 횡방향으로의 인장강도이다. 한편 직각좌표계의 응력성분으로 표시한 원주응력은 다음과 같다.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (25)$$

윗 식에 직각좌표계로 표시한 경사균열주위의 응력성분인 식 (22)를 대입하면 다음과 같은 비특이항이 내포된 원주응력식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &\cong \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ A_1 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_1 \varphi_2^{3/2} - s_2 \varphi_1^{3/2}) \right] \right. \\ &+ B_1 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (\varphi_2^{3/2} - \varphi_1^{3/2}) \right] \left. \right\} \\ &+ \sigma^\infty \operatorname{Re} [(\cos \alpha + s_1 \sin \alpha)(\cos \alpha + s_2 \sin \alpha) + k(\sin \alpha - s_1 \cos \alpha)(\sin \alpha - s_2 \cos \alpha)] \sin^2 \theta \quad (26) \end{aligned}$$

여기서 $\varphi_j = \cos \theta + s_j \sin \theta$ ($j=1,2$) 이고, 첨자상수 A_1, B_1 은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= k + (1-k) \sin^2 \alpha \\ B_1 &= (1-k) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

따라서 수직응력비 $R_0(\theta)$ 는 균열주위의 원주응력인 식 (26)과 이방성강도함수인 식 (24)를 식 (23)

에 대입하여 얻을 수 있다. 균열진전각도의 결정은 이의 값이 최대값을 만족하도록 하는 각도 θ_0 를 구하는 것이 된다.

6. 해석결과 및 고찰

6.1 원주응력분포의 해석

이방성체내 혼합모드균열의 응력식에서 2차항이 균열선단주위의 원주응력분포에 미치는 영향을 분석하기 위해서 Fig. 3과 같이 2축하중을 받는 직교이방성체내 중앙경사균열에 대한 해석을 수행하였다. 이때 직교이방성재료의 특성치들은 $\alpha_0=1.2$ 그리고 $\beta_0=1.0$ 으로 하였으며 균열선단으로부터의 거리 $r_0/a=0.01$ 로 놓았다.

먼저 Fig. 4(a)에서는 균열각 $\alpha=15^\circ$ 일 때에 외부수평하중비 k 의 변화에 따른 균열선단주위의 원주응력분포를 무차원화된 값으로 나타내었다. 그림에서 실선은 균열선단주위 응력식에서 특이응력성분만을 고려하여 해석한 결과이고 점선은 응력식에서 2차항까지를 고려한 해석결과이다. 그림에서 보듯이 원주응력분포는 모두 균열선인 $\theta=0^\circ$ 에서 서로 일치하고 있으나 이 부근을 벗어나 갈 수록 두 해석결과는 차이를 보이기 시작한다. 이러한 현상은 수평하중비의 값이 1보다 작아지거나 커질 수록 더욱 뚜렷하게 나타난다. 그러나 $k=1$ 의 동일 인장-인장하중하에서 두 해석결과는 거의 일치함을 보이며 2차항의 영향이 아주 작다. 따라서 균열의 진전각도가 균열선과 많이 벗어나는 경우에는 이에 미치는 2차항의 영향이 나타날 수 있음을 예측할 수 있다. 이 경우는 균열에서 모드 II의 성질이 활발히 나타내고 있을 때라고 생각할 수 있다. Fig. 4(b)는 균열각 $\alpha=45^\circ$ 일 때의 원주응력분포를 나타낸다. 여기에서 두 해석결과는 거의 일치함을 보이는데 2차항의 영향이 매우 적게 나타난다. 이와 같은 현상은 모든 수평하중비에서 일어난다. 따라서 이의 균열각에서는 특이항만으로서도 균열주위의 응력분포를 정확히 나타내는 것이 가능하다. 이와 같은 수평하중비에 상관없이 2차항의 영향을 가장 적게 받는 경사균열각은 이방성재료의 특성치에 따라서 달라질 수 있다. 다음으로 균열각 $\alpha=75^\circ$ 인 경우의 응력분포를 Fig. 4(c)에 나타내었다. 그림에서 보듯이 두 해석결과는 다시 큰 차이를 보인다. 이의 해석결

과는 $\alpha=15^\circ$ 에서의 것과 유사하다.

이상의 결과로부터 균열주위의 원주응력분포는 균열각과 수평하중비에 따라 다르게 나타나며 수평하중이 수직하중보다 커질 수록 2차항의 영향을 고려하는 것이 필요함을 알 수 있다. 이러한 원주응력분포의 정확한 계산은 균열선단주위의 응력을 기초로 하는 균열진전각도의 결정에 있어서도 큰 영향을 미칠 수 있음을 예견할 수 있다.

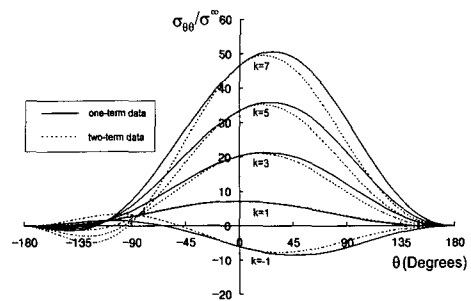


Fig. 4(a) Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ for the inclined crack when $\alpha=15^\circ$

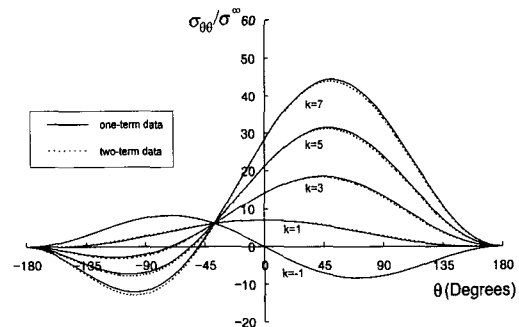


Fig. 4(b) Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ for the inclined crack when $\alpha=45^\circ$

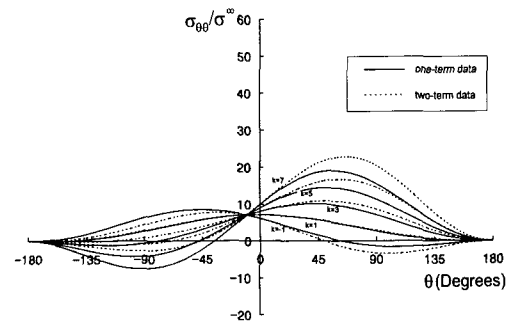


Fig. 4(c) Variation of $\sigma_{\theta\theta}$ for the inclined crack when $\alpha=75^\circ$

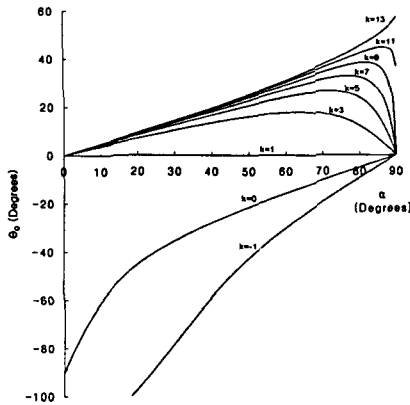


Fig. 5 Crack extension angle for the inclined crack under biaxial load($r_0/a=0.01$)

6.2 초기균열진전각도의 예측

앞서 얻어진 이방성재료내 균열선단주위의 원주응력식을 이용하여 균열각과 외부수평하중비의 변화에 따른 균열진전각도를 결정하였으며 2차항과 특이항을 고려한 결과도 함께 비교하였다. 이때 직방성재료의 인장강도비 $X_T/Y_T=2.0$ 으로 하였다. Fig. 5는 이방성평판에 작용하는 외부수평하중비가 균열진전각도에 미치는 영향을 나타낸 것으로서 균열각의 변화에 따라 도시하였다. 그림에서 보듯이 모든 균열각에 대하여 균열진전각도는 수평하중비가 증가함에 따라 균열선을 더욱 벗어남을 알 수 있다. 동일 인장-인장하중인 $k=1$ 의 경우에는 모든 균열각에 대하여 균열의 진전각도가 균열선과 평행으로 진행된다. 그러나 인장-압축인 $k=-1$ 의 하중조건에 균열각이 24° 이하인 경우에 균열진전각은 90° 보다도 크게 나타나는데 이는 균열의 진전이 균열의 중심으로 진행할 수 있다는 것을 의미한다. 균열진전각도는 수평하중비가 1보다 큰 값인 경우에는 균열경사각이 클수록 그리고 수평하중비가 1보다도 작은 값인 경우에는 균열경사각이 작을수록 수평하중비에 영향을 많이 받고 있음을 알 수 있다.

균열각에 따른 균열진전각도와와의 관계에 있어서 2차항의 영향을 명확히 나타내기 위해서 각 하중조건에 대하여 검토를 하였다. 먼저 Fig. 6은 하중조건이 인장-압축으로 $k=-1$ 인 경우의 해석결과이다. 그림에서 실선은 특이항만을 고려하여 해석한 결과이고, 긴선은 $r_0/a=0.01$ 로 취한 경우

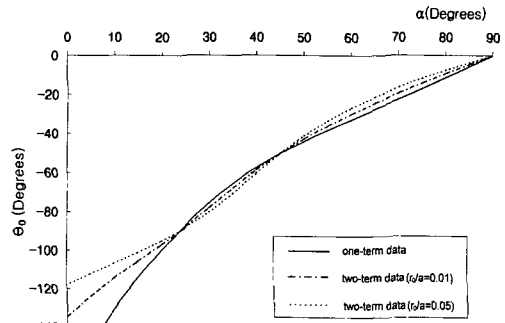


Fig. 6 Crack extension angle for the inclined crack in the case of $k=-1$

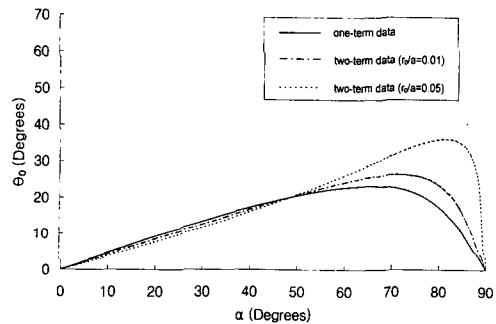


Fig. 7 Crack extension angle for the inclined crack in the case of $k=5$

의 해석결과, 그리고 점선은 $r_0/a=0.05$ 로 취한 경우의 해석결과를 나타낸다. 그림에서 보듯이 균열각이 작을수록 균열진전각도에 미치는 2차항의 영향이 크게 나타남을 알 수 있다. 더욱이 이때는 r_0/a 의 값에 따라서도 차이를 보인다. 그러나 균열각이 크면 균열진전각도에 미치는 2차항의 영향은 점차로 작아진다. $k=0$ 인 단축인장하중을 받는 수직균열의 경우 특이항만으로는 R_0 의 최대값이 나타나지 않아서 균열진전각도를 구할 수가 없었으나 2차항을 고려함으로써 예측이 가능함을 관찰할 수 있었다. 또한 하중조건이 동일 인장-인장하중인 $k=1$ 에서의 해석결과는 그림으로는 나타내지 않았으나 2차항의 영향이 거의 없으며 특이항만으로 해석이 충분함을 확인할 수 있었다.

수평하중의 크기를 수직하중보다 크게 부여한 경우인 $k=5$ 의 해석결과를 Fig. 7에 나타내었다. 앞서의 해석결과와는 달리 균열각이 클수록 2차항의 영향이 뚜렷이 나타나기 시작한다. 더욱이

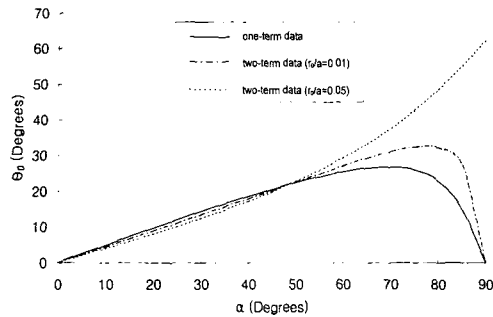


Fig. 8 Crack extension angle for the inclined crack in the case of $k=7$

이 부근에서는 r_0/a 의 값에 따라서 균열진전각도는 큰 영향을 받고 있으므로 이의 선택이 중요함을 보여준다. 그러므로 적절한 r_0/a 의 선택을 위해서는 실험이 동반되어야 할 것으로 생각된다. Fig. 8은 $k=7$ 인 경우의 해석결과이다. 큰 균열각에서 2차항의 영향이 더욱 커짐을 보여준다. 특히 균열각 $\alpha=90^\circ$ 인 수평균열의 해석결과에서는 비록 균열형상과 외부작용하중이 서로 대칭이라 하더라도 2차항을 고려한 균열진전각도는 균열선을 벗어나서 발생할 수 있음을 보여준다.

이상의 결과로부터 수평하중비가 1보다 작은 상태에서는 균열각이 작을 수록 그리고 수평하중비가 1보다 큰 경우는 균열각이 클 수록 2차항까지를 고려한 균열진전각도의 해석이 필요함을 알 수 있다. 일반적으로 균열의 진전각도가 균열선과 많이 벗어나는 경우 즉, 균열이 모드 II의 성질을 활발히 나타내고 있을 때에는 2차항의 영향이 커질 수 있음을 예측할 수 있다.

7. 결론

직교이방성체의 외부 경계에서 2축하중을 받는 혼합모드균열에 대하여 균열선단주위의 응력분포와 균열진전문제에 대한 해석을 수행하였다. 이

방성체내 2축하중을 받는 경사균열에 대한 해석 함수를 유도하고 이로 부터 균열선단부근에서의 응력의 급수전개식에서 2차항이 내포된 응력분포식을 산출하였다. 균열주위의 원주응력분포와 경사균열의 진전각도는 수평하중비와 2차항의 존재에 따라서 크게 변화함을 확인하였다. 균열진전각도의 결정에 있어서 2차항의 영향은 동일인장-인장하중에서는 모든 균열각에서 거의 나타나지 않으며 이의 진행방향은 균열선과 일치한다. 그러나 수평하중과 수직하중의 크기가 다른 경우는 2차항까지를 고려한 균열진전각도의 해석이 필요하며 이의 영향은 균열각에 따라서 다르게 나타난다. 일반적으로 균열에서 모드 II의 성질이 활발하게 일어나서 균열의 진전각도가 균열선과 많이 벗어나수록 2차항을 고려한 균열진전각도의 예측이 중요함을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) 임원균, 최승룡, 안현수, 2000, "비특이항을 고려한 균질이방성체내 수평균열의 해석," 대한기계학회논문집A, 제24권 제1호, pp. 69~78.
- (2) Lim, W.K., Choi, S.Y and Sankar, B.V, 2001, "Biaxial Load Effects on Crack Extension in Anisotropic Solids," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 68, No. 4, pp. 403~416.
- (3) Sih, G.C., 1981, *Mechanics of Fracture. 6 : Cracks in Composite Materials*, G.C. Sih ed., Martinus Nijthoff, Hague.
- (4) Savin, G.N., 1961, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, Oxford.
- (5) Buczek, M. B. and Herakovich, C. T., 1985, "A Normal Stress Criterion for Crack Extension Direction in Orthotropic Composite Materials," *J. Compos. Mater*, Vol. 19, pp. 544~553.