

信賴性應用研究

제2권, 제2호, pp. 63-84, 2002

열화자료와 설명변수 정보를 고려한
사용현장 신뢰성 자료의 분석

서순근, 하천수

동아대학교 산업시스템공학과

Analysis of Field Reliability Data with Supplementary Information
on Degradation Data and Covariates

SunKeun Seo, ChenSoo Ha

Department of Industrial & Systems Engineering, Dong-A University

Abstract

Degradation data can provide more reliability information than traditional failure-time data, especially products with few or no failures. This paper is concerned with a method of estimating lifetime distribution from field data with supplementary information on degradation data and covariates.

When a distribution of degradation rate obtained by follow-up study for a portion of products that survive after-warranty follows a reciprocal-Weibull or lognormal distribution, a time-to-failure distribution of the product follows Weibull or lognormal

distribution, respectively.

A method of estimating lifetime parameters for this kind of data and their asymptotic properties are studied. Effects of after-warranty report probability, follow-up rate, and proportion of degradation data on pseudo maximum likelihood estimators of these parameters are investigated.

1. 서론

소비자의 다양한 요구를 고려한 고 신뢰도를 갖는 신제품의 개발과 제품의 신뢰성 향상과 같은 신뢰성 개선활동을 실시하기 위해서는 제품의 개발 및 설계 단계에서부터 제조 그리고 사용현장(field)에서 사용되어 폐기에 이르기까지 여러 가지 수명에 관련된 정확한 정보가 필요하다. 일반적으로 가장 이상적인 자료는 제품의 실제 사용현장에서 획득되는 자료지만, 시간과 비용 등의 경제적인 측면과 고장자료 취득의 어려움 그리고 사용현장에서 얻어지는 자료의 중요성에 대한 인식 부족 등의 이유로 인하여 사용현장에서 얻어지기보다는 실험실에서 실시되는 신뢰성 시험을 통하여 획득되는 것이 대부분이다. 그러나 실험실에서 행해지는 신뢰성 시험은 실제로 제품이 사용되는 환경과는 다르며, 특히 시험시간을 단축하기 위하여 실제 사용조건보다 더 열악한 조건이나 고 스트레스를 부과하여 수행하는 가속시험을 실시하는 것이 보통이므로 실험실에서 수행되는 신뢰성 시험을 통하여 얻어진 정보들은 사용환경에서의 제품 수명에 대한 정보를 왜곡하여 나타낼 수 있는 위험이 존재한다[4,8,14].

사용현장 자료의 분석에 관한 기존 연구로서 Suzuki(1985)는 제품의 보증기간이 달력시간(calendar time)이고 고장은 운영시간(operating time)을 따르며, 수명분포가 지수 혹은 Weibull 분포를 따를 때, 사용현장 자료와 총 판매 제품 중 일정비율로 단순 랜덤샘플하여 고장이 나지 않은 제품을 추적조사(follow-up)하여 얻은 관측중단 시간자료로부터 의사 우도함수(pseudo likelihood function)를 유도하여 의사 최우추정량을 구하였다. 또한 추정량의 점근적 성질을 규명하고 제품의 신뢰도를 추정하는 방법을 제시하였으며 의사 최우추정량이 총 시험제품 수가 커짐에 따라 고장나지 않은 모든 제품을 추적조사하여 얻은 추정량에 접근하는 일치추정량임을 보였다. Kalbfleisch & Lawless(1988)는 수명분포가 지수 혹은 Weibull 분포를 따르고 하나의 고장원인이 존재하는 경우에 제품의 수명에 영향을 주는 제품의 제조특성 및 환경특성과 같은 설명변수가 존재할 경우, 사용환경하에서 얻어지는 고장자료와 사용중에 있는 총 대상제품 중 고장이 발생하지 않은 제품의 일정비율을 추적조사하여 획득한 제품의 설명변수에 대한 자료를 이용하여 수명분포의 모수를 추정하였다. 국내의 연구로서 배도선 등(1995a)은 Suzuki(1985)와 Kalbfleisch & Lawless(1988)의 기존 연구를 고장원인이 다수인 경우로 확장하였으며 배도선 등(1995b)은 고장원인이 다수 개 있는 수리 가능한 제품의 경우로 확장하여 고장원인별 수명분포의 모수를 추정하는 문제를 다루었다. 오영석 등(1999)은 보증기간 이내에 얻은 사용현장 자료와 보증기간 이후 분석시점까지 추가적으로 얻어지는 사용현장 자료를 이용하여 제품 수명분포의 모수와 백분위수를 추정하는 연구를 수행하였다. 또한 Oh & Bai(2001)는 설명변수와 추적조사를 고려하지 않는 경우에

보고확률에 따른 보증기간 이후의 고장 자료를 추가로 이용하여 신뢰성을 평가하는 방법과 보고확률을 구하기 위한 EM Algorithm을 활용하는 연구를 수행하였다.

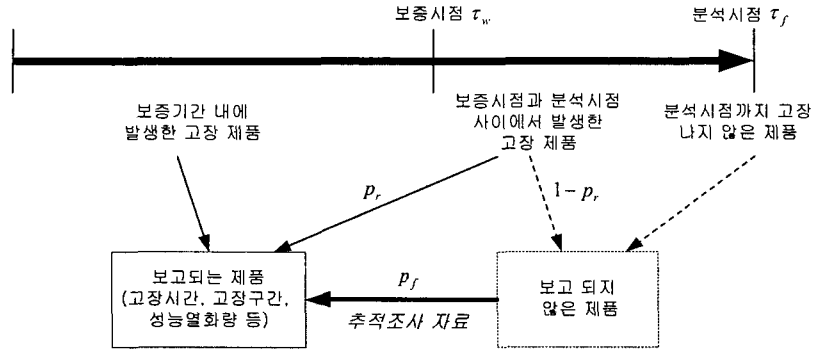
고 신뢰도 제품의 증대로 인해 보증 및 분석시점까지 수집할 수 있는 사용현장 고장 정보는 매우 부족하므로, 본 연구에서는 추적조사시 성능 또는 열화량에 관한 보충정보를 획득할 수 있는 경우로 확장하고자 한다. 또한 이와 더불어 추적조사시 수명정보를 수집하더라도 정확한 고장시간을 파악하기 힘들므로, 고장이 발생한 구간 정보를 얻을 수 있는 경우가 포함되도록 문제상황을 보다 일반화하고자 한다. 즉, 보증기간 동안에 수집된 수명자료 뿐만 아니라 보증 기간 이후에 추가적으로 획득할 수 있는 사용현장 열화자료 및 구간고장에 관한 정보를 이용한 적절한 통계적 분석방법을 제시하고자 한다.

따라서 먼저 본 연구에서 분석하고자 하는 신뢰성 분석 모형을 제시하고 단순 확률계수 모형하에서 열화율이 Reciprocal-Weibull(이하 R-Weibull), 대수정규분포를 따를 때 제품의 수명이 Weibull, 대수정규분포를 따르는 점을 반영하여 추적조사시 열화정보인 열화율을 이용한 수명분포의 모수를 추정할 수 있도록 정식화 한 후, 이와 설명변수 정보를 보충한 신뢰성 평가 방법을 제시하고자 한다. 또한 수치예를 통하여 제시한 방법의 유용성을 입증하고 보고확률과 추적조사 비율, 열화 및 구간고장 정보획득 비율 등에 따른 수치실험을 실시하여 이에 따른 통계적 효율도 조사하고자 한다.

2. 사용현장 열화자료의 신뢰성 평가 모형

2.1 사용현장 자료의 유형

본 연구의 신뢰성 평가 모형으로서 <그림 1>과 같은 사용현장 자료가 획득되는 경우를 고려한다. 먼저, 보증기간 내에 정확하게 고장이 보고되는 경우의 자료, 두 번째 보증기간 (τ_w)과 분석시점(τ_f)에서 발생한 고장중 일부가 특정확률(p_f)로 보고되는 경우, 그리고 보고되지 않은 제품 중에서 추적조사되는 경우로 구분된다. 특히 추적조사시에는 다음 세 가지 경우 중에서 하나의 자료가 획득된다고 가정한다. 즉 (1) 보고되지 않은 제품 중 일부는 정확한 고장시간이 관측되는 경우, (2) 보고되지 않은 제품 중 일부는 사용자가 제조업체의 서비스센터 선택여부 및 고장보고 지연 등으로 인하여 구간자료로 측정되는 경우, (3) 고장이 발생되지 않은 제품에 대해서는 성능열화량이 측정되는 경우의 정보로 구성되며 이와 같이 수집된 사용현장 자료를 이용하여 제품의 수명분포의 모수 등을 추정하는 분석방법을 제시하고자 한다.



<그림 1> 본 연구의 사용현장 자료 취득과정

먼저 취득되는 사용현장 자료를 고려하여 우도함수를 구하고, 이로부터 최우추정량과 점근분산을 구하며 이 결과를 수명분포 중 가장 널리 쓰이며 location-scale form으로 변환할 수 있는 Weibull과 대수정규분포인 경우에 적용하고자 한다[11]. 또한 추적조사가 이루어지는 제품은 제품의 품질특성상 고장유무의 판정보다는 고장이 아니더라도 제품이 가지는 성능 정보를 취할 수 있는 경우(예를 들면, 자동차 브레이크 패드, 반도체, 극소전자공학, 전자 부품, 베어링 등)로 성능열화량의 측정이 가능하고 이렇게 측정된 열화자료로부터 기준 열화량에 도달할 때까지의 수명분포를 추정할 수 있다.

2.2 수명분포와 열화율 분포의 관계

추적조사시 획득되는 측정된 성능열화량의 정보를 수명 추정에 활용하기 위하여 본 연구의 제품수명 분포로서 Weibull, 대수정규분포를 따를 경우에 단순 확률계수 모형하에서 열화율 분포는 각각 R-Weibull, 대수정규분포를 따른다는 점을 반영하고자 한다. 먼저 시각 τ_D 에서 측정된 제품의 열화량이 열화율 Θ 로 표현되는 단순 확률계수 모형을 다음 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다[3,9,10].

$$\eta(\tau_D) = \phi + \Theta \cdot \tau_D \tag{1}$$

단, $\eta(\tau_D)$: 시각 τ_D 에서 측정된 열화량.

ϕ : 시각 0에서 열화량, $\eta(0)$. Θ : 열화율(확률변수).

2.2.1 열화율이 Reciprocal Weibull 분포를 따를 경우

열화율 Θ 가 척도모수 α_D 와 형상모수 β_D 를 가지는 R-Weibull 분포를 따를 때 확률밀도함수는 식 (2)으로 표현할 수 있다[5,6].

$$g_{\theta}(\theta) = \frac{\beta_D}{\theta} \left(\frac{1}{a_D \theta} \right)^{\beta_D} \exp \left[- \left(\frac{1}{a_D \theta} \right)^{\beta_D} \right] \quad (2)$$

시험제품의 측정된 열화량이 고장으로 판정할 수 있는 기준 열화량(critical degradation) ξ 를 초과하면 고장이라고 판정하며 시험제품의 시험시작 전의 열화량은 무시할 수 있다고 가정한다면, $\phi=0$ 가 되어 식 (1)에 대입하면 고장시간을 $T = \xi/\theta$ 로 나타낼 수 있다.

따라서 수명 T 의 분포함수를 구하면 식 (3)과 같이 되므로 열화율이 R-Weibull 분포를 따를 경우(G 는 θ 의 누적분포함수)에 식 (4)와 (5)의 관계를 이용하여 수명분포의 모수를 추정할 수 있다[3].

$$F_T(t) = \Pr \left(T = \frac{\xi}{\theta} \leq t \right) = \Pr \left(\theta \geq \frac{\xi}{t} \right) = 1 - G_{\theta} \left(\frac{\xi}{t} \right) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{a_D \xi} \right)^{\beta_D} \right] \quad (3)$$

식 (3)으로부터 수명 T 가 가장 널리 쓰이는 Weibull ($a_D \xi, \beta_D$)를 따름을 알 수 있으므로, 여기서 수명 T 가 Weibull (α, β)를 따른다고 한다면 수명과 열화율의 분포 모수 관계를 다음 식으로 정리할 수 있다.

$$\alpha_D = \frac{\alpha}{\xi}, \quad \beta_D = \beta \quad (4)$$

$$\theta = \frac{\eta(t)}{t} \sim \text{R-Weibull} \left(\frac{\alpha}{\xi}, \beta \right) \quad (5)$$

2.2.2 열화율이 대수정규분포를 따를 경우

열화율 θ 가 대수정규분포($LN(\mu_D, \sigma_D^2)$)를 따르는 누적분포함수와 확률밀도함수는 식 (6)과 (7)과 같다.

$$G_{\theta}(\theta) = \Phi \left(\frac{\log \theta - \mu_D}{\sigma_D} \right) \quad (6)$$

$$g_{\theta}(\theta) = \frac{1}{\sigma_D \theta} \phi \left(\frac{\log \theta - \mu_D}{\sigma_D} \right) \quad (7)$$

단, $\Phi(\cdot)$, $\phi(\cdot)$: 표준정규분포의 누적분포함수, 확률밀도함수.

따라서 열화율이 대수정규분포를 따르면 수명 T 의 분포함수는 식 (8)이 된다[3].

$$F_T(t) = \Phi \left(\frac{\ln t - [\ln(\xi - \phi) - \mu_D]}{\sigma_D} \right) \quad (8)$$

$\phi=0$ 이면, 식 (8)의 누적분포함수로부터 수명 T 도 $LN(\ln\xi - \mu_D, \sigma_D^2)$ 을 따르고 있으므로 수명분포가 $LN(\mu, \sigma^2)$ 라고 할 때 식 (9)과 (10)과 같이 열화율과 수명분포의 모수 관계를 이용하여 대응되는 모수를 추정할 수 있다.

$$\mu_D = \ln\xi - \mu, \sigma_D^2 = \sigma^2 \tag{9}$$

$$\Theta = \frac{\eta(t)}{t} \sim LN(\ln\xi - \mu, \sigma^2) \tag{10}$$

3. 의사 우도함수와 모수의 추정

본 연구에서 사용되는 기호와 가정은 다음과 같다.

기 호

- N 사용현장에 판매된 총 제품의 수
- γ 수명분포의 모수 벡터
- x_i 제품 i 의 설명변수 벡터 $(1, x_{i1}, \dots, x_{ik})$
- δ 설명변수의 계수벡터 $(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k)$
- $n, (n^c)$ 집합 $D, (D^c)$ 에 속한 제품의 수
- $g_\theta(\theta)$ 열화율(θ)의 확률밀도함수
- $G_\theta(\theta)$ 열화율의 누적분포함수
- $\eta(\tau_{Dk})$ k 번째 제품에 대해 τ_{Dk} 에서 열화 정보가 획득된 경우의 열화량
- ξ 기준 성능열화량
- $f(t_i | x_i; \gamma), F(t_i | x_i; \gamma), S(t_i | x_i; \gamma)$ 제품 i 의 설명변수가 x_i 일 때 수명 (T_i)의 확률밀도함수, 누적분포함수, 신뢰도함수
- τ_w 제품의 보증시점
- τ_f 제품의 추적조사 시점
- $(\tau_{j1}, \tau_{j2}]$ 추적조사시 구간정보가 관측되는 j 번째 제품의 고장이 발생한 구간 p_j 추적조사 비율
- p_r τ_w 와 τ_f 에서 고장난 제품 중 보고되는 제품비율
- D_1 보증기간 동안 고장난 제품 집합
- D_1^c 보증기간 동안 고장나지 않은 제품 집합

- D_2 τ_w 와 τ_f 사이에 보고된 고장난 제품 집합
- D_2^c τ_f 까지 보고되지 않은 제품 집합
- D_3 τ_f 까지 보고되지 않은 제품 중 추적조사되는 제품 집합
- D_{31} D_3 에서 추적조사시 정확한 고장시간이 알려진 제품 집합
- D_{32} D_3 에서 추적조사시 고장난 구간만 파악되는 제품 집합
- D_{33} D_3 에서 추적조사시 고장은 발생하지 않았지만 성능열화량이 측정되는 제품 집합

기본가정

- (1) 제품의 보증시간과 수명의 시간척도는 동일하다.
- (2) 보증기간 τ_w 이전에 고장난 제품은 모두 보고되며 고장시간과 설명변수 정보를 정확히 파악할 수 있다.
- (3) 보증기간 τ_w 와 τ_f 사이에 고장난 제품 중 일부분만 보고되며 그 비율인 p_r 은 추정 가능하다.
- (4) 추적되는 조사 제품은 랜덤하게 선택되며 설명변수 정보를 파악할 수 있다.
- (5) 보고되지 않은 고장난 제품이 추적조사되면 정확한 고장시간을 알거나 고장난 구간을 파악할 수 있다.
- (6) 추적조사되는 제품 중 고장나지 않는 단위는 성능열화량을 측정할 수 있다.

3.1 의사 우도함수

추적조사된 '부분적인 정보를 가지고 추적조사되지 않은 제품에 대한 정보를 추정하므로 일반적인 우도함수보다 의사 우도함수로 정식화 할 수 있다.

분석시점 τ_f 까지 모든 제품에 대하여 고장시간 t_i 와 전체 제품의 설명변수 \mathbf{x}_i 를 파악할 수 있다면 우도함수는 식 (11)과 같다[4,7].

$$L_F = \prod_{i: t_i \leq \tau_f} f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \prod_{i: t_i > \tau_f} S(\tau_f | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \tag{11}$$

또한, 설명변수 \mathbf{x}_i 들은 모두 파악할 수 있지만 보고된 제품에 대해서만 고장시간을 파악할 수 있을 경우 우도함수는 식 (12)와 같다[4].

$$L_O = \prod_{i \in D_1} f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \prod_{i \in D_2} p_r f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \times \prod_{i \in D_3} \{ (1 - p_r) S(\tau_w | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) + p_r S(\tau_f | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \} \tag{12}$$

그러나 모든 제품에 관하여 설명변수 등을 파악할 수 있는 경우는 현실적으로 드물다. 본

연구에서는 고장난 제품이 보고되거나 추적조사되는 제품에 대해서만 고장시간, 고장구간, 그리고 성능열화량과 설명변수를 알 수 있다고 가정한다.

보증시점 이후에 보고되지 않은 제품에 대하여 추적조사를 하여 구한 정확한 고장시간 자료의 우도함수에 대한 기여는 $(1-p_r)f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma})$ 가 되며 고장이 발생하지 않는 경우는 $S(\tau_f | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma})$ 가 된다. 즉 D_{31} 에 속하는 제품은 $(1-p_r)f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma})$, 그리고 D_{32} 에 속하는 제품은 $(1-p_r)[S(\tau_{j1} | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) - S(\tau_{j2} | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma})]$, D_{33} 에 속하는 제품은 단순 확률계수 열화모형을 이용하여 열화량이 기준 열화량 ξ 에 도달하는 데까지 수명(T)의 분포를 전술된 수명과 열화율 분포의 관계로부터 구할 수 있으므로 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \prod_{i \in D_{31}} (1-p_r)f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \\ & \times \prod_{j \in D_{32}} (1-p_r)\{S(\tau_{j1} | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) - S(\tau_{j2} | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma})\} \\ & \times \prod_{k \in D_{33}} (1-p_r)g_{\Theta}(\tau_{Dk} | \mathbf{x}_k; \boldsymbol{\gamma}) \end{aligned} \quad (13)$$

따라서 추적조사되지 않은 제품의 경우는 추적조사를 통하여 얻은 제품의 설명변수 \mathbf{x}_i 를 이용하면 우도함수의 기여는 식 (14)로 추정할 수 있으며 식 (14)의 $\frac{1-p_f}{p_f}$ 는 $\frac{n_2^c - n_{31} - n_{32} - n_{33}}{n_{31} + n_{32} + n_{33}}$ 으로 고장이 보고되지 않고 추적조사도 되지 않은 제품의 수와 추적조사된 제품 수의 비를 나타낸다.

$$\left[(1-p_r)S(\tau_w | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) + p_r S(\tau_f | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \right]^{\frac{1-p_f}{p_f}} \quad (14)$$

식 (14)와 같이 추적조사된 부가적인 정보를 이용하여 추적조사되지 않은 나머지 제품들에 대한 정보를 보충하고 식 (15)와 같이 우도함수를 구하면 일반적인 우도함수가 아닌 의사 우도함수가 된다[13]. 따라서 대수 의사우도함수를 f, S, g 의 기호를 단순화하여 식 (16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} L_p(\boldsymbol{\gamma}) &= \prod_{i \in D_1} f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \prod_{i \in D_2} p_r f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \\ & \times \left[\prod_{i \in D_{31}} (1-p_r)f(t_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \right. \\ & \times \prod_{j \in D_{32}} (1-p_r)\{S(\tau_{j1} | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) - S(\tau_{j2} | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma})\} \\ & \times \prod_{k \in D_{33}} (1-p_r)g_{\Theta}(\tau_{Dk} | \mathbf{x}_k; \boldsymbol{\gamma}) \\ & \left. \times \prod_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \left[(1-p_r)S(\tau_w | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) + p_r S(\tau_f | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\gamma}) \right]^{\frac{1-p_f}{p_f}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \ln L_p(\boldsymbol{\gamma}) &= \sum_{i \in D_1} \ln f(t_i) + \sum_{i \in D_2} [\ln p_r + \ln f(t_i)] \\
 &+ [\sum_{i \in D_{31}} \ln f(t_i) + \sum_{j \in D_{32}} \ln \{S(\tau_{j1}) - S(\tau_{j2})\} \\
 &+ \sum_{k \in D_{33}} \ln g_{\theta}(\tau_{Dk})] + \sum_{i \in D_3} \ln(1 - p_r) \\
 &+ \left(\frac{1 - p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \ln \{ (1 - p_r)S(\tau_w) + p_r S(\tau_f) \}
 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 D_{33} 에 속하는 제품이 수명분포의 우도함수에 기여하는 부분을 2.2절의 수명분포와 열화율 분포의 관계를 이용하면 관련모수를 추정할 수 있도록 변환할 수 있다.

3.2 의사 최우추정량과 추정량의 점근 성질

식 (15)의 의사 우도함수 식을 $\boldsymbol{\gamma}$ 의 각 모수에 대하여 일차 편미분한 식이 0이 되도록 하는 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 를 구하면 이때의 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 는 의사 최우추정량이 되며, $\boldsymbol{\gamma}^*$ 는 다음의 성질을 갖는다[4,7].

(1) 의사 최우추정량 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 는 모수 $\boldsymbol{\theta}$ 의 일치추정량이다.

(2) N 이 커짐에 따라 $\sqrt{N}(\boldsymbol{\gamma}^* - \boldsymbol{\gamma})$ 는 평균이 0이고 공분산 행렬이 $V(\boldsymbol{\gamma}) = A(\boldsymbol{\gamma})^{-1} + A(\boldsymbol{\gamma})^{-1}C(\boldsymbol{\gamma})A(\boldsymbol{\gamma})^{-1}$ 인 다변량 정규분포를 따른다. 여기서 행렬 $A(\boldsymbol{\gamma})$ 와 $C(\boldsymbol{\gamma})$ 의 원소 $A(\boldsymbol{\gamma})_{rs}$ 와 $C(\boldsymbol{\gamma})_{rs}$ 는 다음 식 (17)과 (18)과 같다.

$$A(\boldsymbol{\gamma})_{rs} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[- \frac{\partial^2 \ln L_p(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_r \partial \gamma_s} \right] \tag{17}$$

$$C(\boldsymbol{\gamma})_{rs} = \frac{1 - p_f}{p_f} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \left[\frac{n_2^c}{n_{31} + n_{32} + n_{33} - 1} \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} (m_{ir} - \bar{m}_r)(m_{is} - \bar{m}_s) \right] \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \text{여기서, } m_{ir} &= \frac{\partial \ln M_i}{\partial \theta_r}, \quad \bar{m}_r = \frac{\sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} m_{ir}}{n_{31} + n_{32} + n_{33}}, \\
 M_i &= (1 - p_r)S(\tau_w) + p_r S(\tau_f).
 \end{aligned}$$

$A(\boldsymbol{\gamma})_{rs}$ 와 $C(\boldsymbol{\gamma})_{rs}$ 대신 다음에 정의되는 $A(\boldsymbol{\gamma}^*)_{rs}$ 와 $C(\boldsymbol{\gamma}^*)_{rs}$ 를 대입하면 $V(\boldsymbol{\gamma})$ 의 일치 추정량 $V_M(\boldsymbol{\gamma}^*)$ 를 구할 수 있으며 각각 다음 식 (19)와 (20)과 같다.

$$A_M(\boldsymbol{\gamma}^*)_{rs} = - \frac{1}{N} \frac{\partial^2 \ln L_p(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_r \partial \gamma_s} \tag{19}$$

$$C_M(\boldsymbol{\gamma}^*)_{rs} = \frac{n_2^c(1 - p_f)}{N p_f (n_{31} + n_{32} + n_{33} - 1)} \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} (m_{ir} - \bar{m}_r)(m_{is} - \bar{m}_s) \tag{20}$$

4. 특정 수명분포에 따른 의사 최우추정량

제시된 신뢰성 평가 모형의 사용현장 자료로부터 수명 분포를 고려하여 3절에서 유도된 의사 우도함수를 도출하고, 이로부터 의사 최우추정량과 점근적 분산을 구하기 위하여 제품의 수명 분포가 Weibull과 대수정규분포인 경우에 적용하고자 한다.

4.1 제품의 수명이 Weibull 분포일 경우

사용현장에서 사용되는 제품의 수명 T 가 Weibull 분포를 따르고 척도모수 α 가 설명변수 x_i 와 대수선형관계($\alpha = e^{\delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k}$)를 가지며, 형상모수 β 를 갖는 경우에 제품의 누적분포함수와 확률밀도함수는 다음 식 (21)과 (22)와 같다.

$$F(t_i; x_i, \delta, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_i}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta\right], t_i > 0 \quad (21)$$

$$f(t_i; x_i, \delta, \beta) = \frac{\beta}{e^{x_i \delta}} \left(\frac{t_i}{e^{x_i \delta}}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t_i}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta\right], t_i > 0 \quad (22)$$

추적조사시 열화정보가 획득되는 k 번째 제품의 사용시간을 τ_{Dk} 라고 하자. 이때 이 사용시간까지의 열화량은 $\eta(\tau_{Dk})$ 이며, 고장이 발생되지 않은 제품에 대한 이러한 열화정보가 우도함수에 기여량은 2.2절에 제시된 수명과 열화율 분포의 관계를 이용하여 열화율 분포의 누적분포함수와 확률밀도함수를 다음 식 (23)과 (24)와 같이 구할 수 있다.

$$\Theta = \frac{\eta(\tau_{Dk})}{\tau_{Dk}} \sim \text{reciprocal Weibull} \left(\frac{e^{x_i \delta}}{\xi}, \beta \right)$$

$$G_\Theta(\theta_i) = 1 - F_T(\theta_i) = \exp\left[-\left(\frac{\xi}{e^{x_i \delta} \theta_i}\right)^\beta\right] \quad (23)$$

$$g_\Theta(\theta_i) = \frac{\beta}{\theta_i} \left(\frac{\xi}{e^{x_i \delta} \theta_i}\right)^\beta \exp\left[-\left(\frac{\xi}{e^{x_i \delta} \theta_i}\right)^\beta\right] \quad (24)$$

그러므로 제품 사용시간과 열화 정보를 가지고 식 (16)을 이용하여 <그림 1>과 같은 경우의 대수 의사우도함수를 구하면 다음 식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\ln L_p(e^{x,\delta}, \beta) &= \text{상수항} + \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left\{ \ln \left(\frac{\beta}{e^{x,\delta}} \right) + (\beta-1) \ln \left(\frac{t_i}{e^{x,\delta}} \right) - \left(\frac{t_i}{e^{x,\delta}} \right)^\beta \right\} \\
&+ \sum_{j \in D_{32}} \ln \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{e^{x,\delta}} \right)^\beta \right] - \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{e^{x,\delta}} \right)^\beta \right] \right\} \\
&+ \sum_{i \in D_{33}} \left\{ \ln \left(\frac{\beta}{\theta_i} \right) + \beta \ln \left(\frac{\xi}{e^{x,\delta} \theta_i} \right) - \left(\frac{\xi}{e^{x,\delta} \theta_i} \right)^\beta \right\} \\
&+ \left(\frac{1-p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \ln \left\{ (1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{e^{x,\delta}} \right)^\beta \right] + p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{e^{x,\delta}} \right)^\beta \right] \right\}
\end{aligned} \tag{25}$$

대수 의사우도함수 식 (25)의 모수 ($\alpha = e^{\delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k}$, β)에 일차 편미분을 하면 다음과 같다. 단, 식 (26)부터 식 (31)의 $e^{x,\delta}$ 는 α 로 표기하여 식을 정리한다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L_p}{\partial \delta_r} &= \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left[\beta x_r \left\{ \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - 1 \right\} \right] \\
&+ \sum_{j \in D_{32}} \left\{ \frac{\beta x_r \left\{ \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \right] - \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}}{\exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \right] - \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \right]} \right\} \\
&+ \sum_{i \in D_{33}} \beta x_r \left\{ \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right)^\beta - 1 \right\} + \left(\frac{1-p_f}{p_f} \right) \\
&\times \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \left\{ \frac{\beta x_r \left\{ \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta (1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] + \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}}{(1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] + p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right]} \right\}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L_p}{\partial \beta} &= \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left\{ \frac{1}{\beta} + \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) - \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \right\} \\
&+ \sum_{j \in D_{32}} \left\{ \frac{- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right) \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \right] + \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right) \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \right]}{\exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \right] - \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \right]} \right\} \\
&+ \sum_{i \in D_{33}} \left\{ \frac{1}{\beta} + \left\{ 1 - \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right)^\beta \right\} \ln \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right) \right\} + \left(\frac{1-p_f}{p_f} \right) \\
&\times \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \left\{ \frac{- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right) (1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] - \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right) p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right]}{(1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] + p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right]} \right\}
\end{aligned} \tag{27}$$

식 (26)과 (27)를 동시에 0으로 하는 α, β 의 의사 최우추정량은 쉽게 구할 수 없으므로 Newton-Raphson 방법과 같은 수치해석적 방법을 이용하여 구할 수 있다.

또한, 의사 최우추정량의 점근적 분산을 구하기 위해 식 (19)과 (20)으로부터 $NA_N(\alpha^*, \beta^*)$ 와 $NC_N(\alpha^*, \beta^*)$ 의 원소를 구하면 다음 식 (28)에서 (31)과 같다.

$$\begin{aligned}
NA_M(\alpha^*, \beta^*)_{r,s} &= -\frac{\partial^2 \ln L_p}{\partial \delta_r \partial \delta_s} = \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left\{ \beta^2 x_r x_s \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right\} \\
&\quad - \sum_{j \in D_{22}} \left(\frac{A_{j\delta, \delta} A_j - A_{j\delta, \delta} A_{j\delta}}{A_j^2} \right) \\
&\quad + \sum_{i \in D_{33}} \beta^2 x_r x_s \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right)^\beta \\
&\quad - \left(\frac{1-p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{22} \cup D_{33}} \left(\frac{B_{i\delta, \delta} B_i - B_{i\delta, \delta} B_{i\delta}}{B_i^2} \right)
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
NA_M(\alpha^*, \beta^*)_{r,k+1} &= -\frac{\partial^2 \ln L_p}{\partial \delta_r \partial \beta} = \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left[x_r - x_r \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \left\{ 1 + \beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \right\} \right] \\
&\quad - \sum_{j \in D_{22}} \left(\frac{A_{j\delta, \beta} A_j - A_{j\delta, \beta} A_{j\beta}}{A_j^2} \right) \\
&\quad + \sum_{i \in D_{33}} \left[x_r - x_r \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right)^\beta \left\{ 1 + \beta \ln \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right) \right\} \right] \\
&\quad - \left(\frac{1-p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{22} \cup D_{33}} \left(\frac{B_{i\delta, \beta} B_i - B_{i\delta, \beta} B_{i\beta}}{B_i^2} \right)
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
NA_M(\alpha^*, \beta^*)_{k+1, k+1} &= -\frac{\partial^2 \ln L_p}{\partial \beta^2} = \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left\{ \frac{1}{\beta^2} + \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^2 \right\} \\
&\quad - \sum_{j \in D_{22}} \left(\frac{A_{j\beta\beta} A_j - A_{j\beta}^2}{A_j^2} \right) \\
&\quad + \sum_{i \in D_{33}} \left\{ \frac{1}{\beta^2} + \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right)^\beta \ln \left(\frac{\xi}{\alpha \theta_i} \right)^2 \right\} \\
&\quad - \left(\frac{1-p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{22} \cup D_{33}} \left(\frac{B_{i\beta\beta} B_i - B_{i\beta}^2}{B_i^2} \right)
\end{aligned} \tag{30}$$

$$NC_M(\alpha^*, \beta^*)_{r,s} = \frac{n_2^2(1-p_f)}{p_f(n_{31} + n_{32} + n_{33} - 1)} \sum_{i \in D_{31} \cup D_{22} \cup D_{33}} (m_{ir} - \bar{m}_r)(m_{is} - \bar{m}_s) \tag{31}$$

$$\text{단, } A_j = \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \right] - \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \right]$$

$$A_{j\delta, \delta} = \frac{\partial A_j}{\partial \delta_r} = \beta x_r \left\{ \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \right] - \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}$$

$$A_{j\beta} = \frac{\partial A_j}{\partial \beta} = - \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right) \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j1}}{\alpha} \right)^\beta \right] + \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right) \exp \left[- \left(\frac{\tau_{j2}}{\alpha} \right)^\beta \right]$$

$$B_i = (1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] + p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right]$$

$$B_{i\delta, \delta} = \frac{\partial B_i}{\partial \delta_r} = \beta x_r \left\{ \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta (1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] + \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}$$

$$B_{i\beta} = \frac{\partial B_i}{\partial \beta} = - \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right) (1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] - \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right) p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right]$$

$$m_{ir} = \frac{\partial \ln B_i}{\partial \delta_r} = \frac{\beta x_r \left\{ \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta (1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] + \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}}{(1-p_r) \exp \left[- \left(\frac{\tau_w}{\alpha} \right)^\beta \right] + p_r \exp \left[- \left(\frac{\tau_f}{\alpha} \right)^\beta \right]}$$

$$A_{j\delta,\delta_s} = \frac{\partial A_{j\delta_s}}{\partial \delta_s}, \quad A_{j\delta,\beta} = \frac{\partial A_{j\delta_s}}{\partial \beta}, \quad A_{j\beta\beta} = \frac{\partial A_{j\beta}}{\partial \beta}$$

$$B_{i\delta,\delta_s} = \frac{\partial B_{i\delta_s}}{\partial \delta_s}, \quad B_{i\delta,\beta} = \frac{\partial B_{i\delta_s}}{\partial \beta}, \quad B_{i\beta\beta} = \frac{\partial B_{i\beta}}{\partial \beta}$$

여기서, $A_{j\delta,\delta_s}$, $A_{j\delta,\beta}$, $A_{j\beta\beta}$, $B_{i\delta,\delta_s}$, $B_{i\delta,\beta}$, $B_{i\beta\beta}$ 는 다음 식을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

$$\frac{\partial (\tau/\alpha)^\beta}{\partial \delta_i} = -\beta x_i \left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta, \quad \frac{\partial (\tau/\alpha)^\beta}{\partial \beta} = \ln\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta$$

$$\frac{\partial \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\partial \delta_i} = \beta x_i \left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

$$\frac{\partial \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\partial \beta} = -\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

따라서 식 (28)~(31)과 식 (19)~(20)을 이용하면 의사 최우추정량의 점근적 분산을 구할 수 있다.

4.2 제품의 수명이 대수정규분포일 경우

사용현장에서 사용되는 제품의 수명 T 가 대수정규분포를 따르고 위치모수 μ 가 설명변수 x_i 와 선형관계 ($\mu = \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k$)를 가지며, 척도모수 σ 를 갖는 경우에 제품의 누적분포함수와 확률밀도함수는 다음 식 (32)와 (33)과 같다.

$$F(t_i; x_i, \delta, \sigma) = \Phi_{nor}\left(\frac{\ln t_i - x_i \delta}{\sigma}\right) \quad (32)$$

$$f(t_i; x_i, \delta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t_i}} \exp\left[-\frac{(\ln t_i - x_i \delta)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma t_i} \phi_{nor}\left(\frac{\ln t_i - x_i \delta}{\sigma}\right) \quad (33)$$

k 번째 제품의 추적조사시 사용시간을 τ_{Dk} 라고 하자. 이때 이 사용시간까지의 열화량은 $\eta(\tau_{Dk})$ 이며, 고장이 발생되지 않은 제품에 대한 이러한 열화정보가 우도함수에 기여하는 부분은 2.2절의 수명과 열화율 분포의 관계를 이용하면 다음과 같다.

$$\Theta = \frac{\eta(\tau_{Dk})}{\tau_{Dk}} \sim LN(\ln \xi - x_i \delta, \sigma^2)$$

$$G_\Theta(\theta_i) = 1 - F_T(\theta_i) = 1 - \Phi_{nor}\left(\frac{\ln \theta_i - (\ln \xi - x_i \delta)}{\sigma}\right) \quad (34)$$

$$g_\Theta(\theta_i) = -\frac{1}{\sigma \theta_i} \phi_{nor}\left(\frac{\ln \theta_i - (\ln \xi - x_i \delta)}{\sigma}\right) \quad (35)$$

열화정보와 설명변수를 고려한 <그림 1>과 같은 경우의 대수 의사우도함수는 식 (36)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\ln L_p(\mathbf{x}_i, \delta, \sigma) &= \text{상수항} + \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\sigma t_i} \right) - \frac{(\ln t_i - \mathbf{x}_i \delta)^2}{2\sigma^2} \right\} \\
&+ \sum_{j \in D_{32}} \ln \left\{ \Phi_{nor} \left(\frac{\ln \tau_{j2} - \mathbf{x}_j \delta}{\sigma} \right) - \Phi_{nor} \left(\frac{\ln \tau_{j1} - \mathbf{x}_j \delta}{\sigma} \right) \right\} \\
&- \sum_{i \in D_{33}} \ln \left\{ \frac{1}{\sigma \theta_i} \phi_{nor} \left(\frac{\ln \theta_i - (\ln \xi - \mathbf{x}_i \delta)}{\sigma} \right) \right\} + \left(\frac{1 - p_f}{p_f} \right) \\
&\times \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \ln \left[(1 - p_r) \left\{ 1 - \Phi_{nor} \left(\frac{\ln \tau_w - \mathbf{x}_i \delta}{\sigma} \right) \right\} + p_r \left\{ 1 - \Phi_{nor} \left(\frac{\ln \tau_f - \mathbf{x}_i \delta}{\sigma} \right) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{36}$$

식 (36)을 식 (37)과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\ln L_p(\mathbf{x}_i, \delta, \sigma) &= \text{상수항} + \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left\{ -\ln \sigma - \frac{1}{2} Z_i^2 \right\} + \sum_{j \in D_{32}} \ln E_j \\
&+ \sum_{i \in D_{33}} \left\{ \ln \sigma + \frac{1}{2} Z_{\theta_i}^2 \right\} + \left(\frac{1 - p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \ln F_i
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\text{단, } Z_i &= \frac{\ln t_i - \mathbf{x}_i \delta}{\sigma}, \quad Z_{j1} = \frac{\ln \tau_{j1} - \mathbf{x}_j \delta}{\sigma}, \quad Z_{\theta_i} = \frac{\ln \theta_i - (\ln \xi - \mathbf{x}_i \delta)}{\sigma} \\
E_j &= \Phi(Z_{j2}) - \Phi(Z_{j1}), \quad F_i = (1 - p_r) \{1 - \Phi(Z_w)\} + p_r \{1 - \Phi(Z_f)\}
\end{aligned}$$

식 (36)을 δ , σ 에 대해 각각 편미분하여 식 (38)과 (39)를 0으로 하는 모수의 의사 최우 추정량은 수치해석적 방법으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L_p}{\partial \delta_r} &= \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \left(\frac{x_r}{\sigma} Z_i \right) + \sum_{j \in D_{32}} \left(\frac{E_{j\delta_r}}{E_j} \right) \\
&- \sum_{i \in D_{33}} \left(\frac{x_r}{\sigma} Z_{\theta_i} \right) + \left(\frac{1 - p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \left(\frac{F_{i\delta_r}}{F_i} \right)
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L_p}{\partial \sigma} &= \sum_{i \in D_1, D_2, D_{31}} \frac{1}{\sigma} (Z_i^2 - 1) + \sum_{j \in D_{32}} \left(\frac{E_{j\sigma}}{E_j} \right) \\
&- \sum_{i \in D_{33}} \frac{1}{\sigma} (Z_{\theta_i}^2 - 1) + \left(\frac{1 - p_f}{p_f} \right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \left(\frac{F_{i\sigma}}{F_i} \right)
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\text{단, } E_{j\delta_r} = \frac{\partial E_j}{\partial \delta_r} = -x_r \{ \phi(Z_{j2}) - \phi(Z_{j1}) \} / \sigma$$

$$E_{j\sigma} = \frac{\partial E_j}{\partial \sigma} = - \{ Z_{j2} \phi(Z_{j2}) - Z_{j1} \phi(Z_{j1}) \} / \sigma$$

$$F_{i\delta_r} = \frac{\partial F_i}{\partial \delta_r} = x_r \{ (1 - p_r) \phi(Z_w) + p_r \phi(Z_f) \} / \sigma$$

$$F_{i\sigma} = \frac{\partial F_i}{\partial \sigma} = \{ (1 - p_r) Z_w \phi(Z_w) - p_r Z_f \phi(Z_f) \} / \sigma$$

Weibull 분포와 동일한 방법으로 의사 최우추정량의 점근적 분산을 구하기 위하여 식 (38)과 (39)를 이용하여 식 (19)와 (20)으로부터 $NA_M(\alpha^*, \beta^*)$ 와 $NC_M(\alpha^*, \beta^*)$ 의 원소를 구할 수 있다.

4.3 수치예

어떤 A 제품의 수명은 Weibull 분포를 따르며 사용환경을 두 가지로 구분할 수 있다고 한다(사용환경을 나타내는 설명변수 x_1 는 “0”과 “1”의 값을 갖는다). 총 분석제품 수(N)는 1,000개이며 이 중에서 500개는 설명변수가 “0”의 값을, 나머지는 설명변수가 “1”의 값을 가지며 x_i 가 주어졌을 때 A 제품의 누적분포함수는 다음 식 (40)과 같다.

$$F(t_i) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\exp(\delta_0 + \delta_1 x_i)}\right)^\beta\right], \quad t_i > 0 \tag{40}$$

여기서 $\beta=2.0$, δ_1 은 설명변수의 값이 “1”인 사용환경의 경우가 “0”인 경우에 비하여 고장률이 2배가 되도록 -0.3466 으로, δ_0 는 보증기간(1년=12개월)안에 전체 제품 중 고장나는 비율이 약 5%가 되도록 4.1712로 설정하였다. 즉, $\tau_w = 12$ (월), $\tau_f = 24$ (월), $p_r = 0.5$, $p_f = 0.1$ 로 설정하여 고장자료와 열화자료를 작성된 Fortran 프로그램으로부터 다음 <표 1>과 같이 자료를 획득하였으며 이 때 보증기간과 분석시점사이에 보고되지 않는 고장제품의 50%는 정확한 고장자료를, 나머지 50%는 구간자료의 정보를 갖도록 구성하였다. 또한 구간자료의 정보는 보증기간과 분석시점 사이에서 고장이 발생했다는 정보와 설명변수를 갖도록 하였다.

<표 1> 수치예의 자료

자료 구분	n_i	설명변수 “0”	설명변수 “1”
D_1	47	14	33
D_2	72	27	45
D_{31}	3	3	0
D_{32}	5	3	2
D_{33}	80	44	36

보증기간까지 A/S 센터에 들어온 제품의 수는 47개이고, 보증시점과 분석시점 사이에 고장났지만(145개) 보고확률에 의해서 72개만 A/S 센터에 들어왔으며 나머지 보고되지 않은 73개의 제품 중 50%는 정확한 고장자료를 가지며 50%는 구간자료가 되도록 랜덤샘플(보고 확률과 추적조사 비율에 따른 제품의 랜덤샘플은 Fortran 서브루틴 RNSRI를 이용)하였다. 분석시점 전에 고장났지만 보고되지 않은 제품과 실제로 분석시점까지 고장이 발생하지 않

은 제품의 수는 881개가 된다. 따라서 추적조사 비율 $p_f=0.1$ 에 따라 88개를 랜덤샘플하였으며 이중에는 정확한 고장시간 정보를 가진 제품 3개와 구간자료 정보를 가진 제품 5개, 나머지 80개는 열화자료와 각각의 설명변수의 정보를 획득하였으며, 고장정보와 추적조사 자료를 이용하여 Fortran 서브루틴 DNEQNF를 이용하여 구한 δ 의 의사 최우추정값과 $V(\gamma)$ 은 다음과 같다.

$$\hat{\delta}_0 = 4.1170, \quad \hat{\delta}_1 = -0.3506, \quad \hat{\beta} = 2.0341$$

$$V(\gamma) = \begin{bmatrix} 88.1481 & -17.2560 & 4.6190 \\ -17.2560 & 43.8401 & -24.2147 \\ 4.6190 & -24.2147 & 20.4781 \end{bmatrix}$$

총 판매제품 수가 1,000개이므로 의사 최우추정치에의 점근적 분산과 의사 최우추정량은 점근적으로 정규분포를 따르므로 각각에 대한 95% 신뢰구간을 구하면 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$Asvar(\hat{\delta}_0) = 0.0881, \quad Asvar(\hat{\delta}_1) = 0.0438, \quad Asvar(\hat{\beta}) = 0.0205$$

$$3.5351 \leq \delta_0 \leq 4.6989, \quad -0.7610 \leq \delta_1 \leq 0.0598, \quad 1.7536 \leq \beta \leq 2.3146$$

제품이 사용되고 있는 환경에 따른(설명변수 x_1 의 값) 제10백분위수의 추정치를 다음 식 (45)를 이용하여 구하여 이에 따른 결과는 다음 <표 2>에 정리하였는데, 추정값과 참값의 차가 크지 않음을 파악할 수 있다.

$$\hat{t}_{0.1}(x_i) = \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_i) \cdot (-\ln 0.9)^{1/\hat{\beta}} \tag{45}$$

<표 2> 설명변수에 따른 제10백분위수의 추정 (단위 : 월)

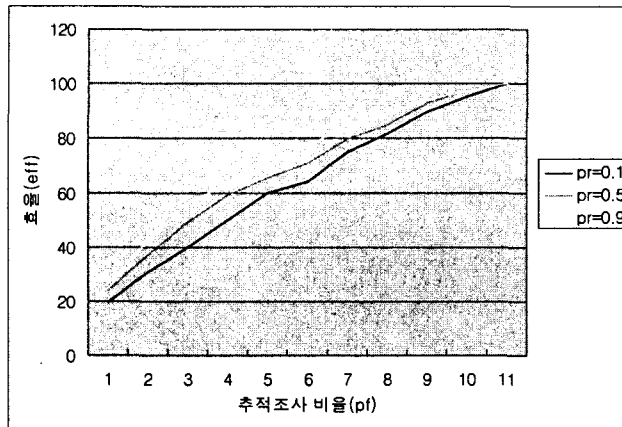
설명변수	$t_{0.1}$ (참값)	$\hat{t}_{0.1}$ (추정 값)
"0"	21.0314	20.3025
"1"	14.8710	14.2978

5. 수치실험

5.1 보고확률과 추적조사 비율에 따른 실험

보고확률과 추적조사 비율에 따른 의사 추정량의 통계적 성질을 조사하기 위하여 제품의 수명이 Weibull 분포인 경우, 수치예와 동일한 상황과 모수를 이용하여 $p_r = 0.1, 0.5, 0.9$

이상의 결과를 요약하면 보고확률과 추적조사 비율의 증가에 따라서 통계적 효율이 높다는 것을 알 수 있으며 보고확률보다는 추적조사 비율이 효율에 더 큰 영향이 있음을 알 수 있다. 두 가지 설명변수에 따른 효율이 유사하므로 <그림 2>에는 설명변수가 "0"일 경우 추적조사 비율에 따른 효율을 도시하였다.



<그림 2> 추적조사 비율에 따른 효율(설명변수 "0")

5.2 추적조사시 열화정보의 획득비율에 따른 실험

추적조사시 열화정보의 획득비율에 따른 통계적 효율을 조사하기 위하여 제품 수명분포가 Weibull 분포일 경우에 수치실험을 실시하였다. 추적조사시 열화 및 구간자료 정보의 비율을 따른 비교 기준을 위해서 열화정보 대신에 분석시점 이후의 모든 자료는 분석시점까지 고장이 발생하지 않았다는 정보 ($S(\tau_f | x_i, \gamma) = \exp\left[-\left(\frac{\tau_f}{x_i \delta}\right)^\beta\right]$)와 설명변수만을 알 수 있는 경우, 즉, 열화정보가 전혀 없이 설명변수만의 정보만 획득할 경우를 기준으로 열화정보의 획득비율에 따른 통계적 효율을 비교하고자 한다. 이 경우 식 (25)에서 열화량의 정보부분인 D_{33} 부분을 수정하여 대수 의사 우도함수를 구하면 다음 식 (42)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln L_p(e^{x_i \delta}, \beta) = & \text{상수항} + \sum_{i \in D_{11} \cup D_{21} \cup D_{31}} \left\{ \ln\left(\frac{\beta}{e^{x_i \delta}}\right) + (\beta - 1) \ln\left(\frac{t_i}{e^{x_i \delta}}\right) - \left(\frac{t_i}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta \right\} \\ & + \sum_{j \in D_{32}} \ln \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\tau_{j1}}{e^{x_j \delta}}\right)^\beta\right] - \exp\left[-\left(\frac{\tau_{j2}}{e^{x_j \delta}}\right)^\beta\right] \right\} - \sum_{i \in D_{33}} \left(\frac{\tau_f}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta \\ & + \left(\frac{1-p_f}{p_f}\right) \sum_{i \in D_{31} \cup D_{32} \cup D_{33}} \ln \left\{ (1-p_r) \exp\left[-\left(\frac{\tau_w}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta\right] + p_r \exp\left[-\left(\frac{\tau_f}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta\right] \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

여기서, 식 (42)를 모수에 대하여 일차 편미분하여 의사 최우추정량을 구할 때,

$I = \left(\frac{\tau_f}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta$ 라 두고, $\frac{\partial I}{\partial \delta_i} = -\beta x_i \left(\frac{\tau_f}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta$, $\frac{\partial I}{\partial \beta} = \left(\frac{\tau_f}{e^{x_i \delta}}\right)^\beta \ln\left(\frac{\tau_f}{e^{x_i \delta}}\right)$ 를 식 (26)과 (27)의 해당부분에 대체하면 된다.

분석시점 ($\tau_f=24$)까지 총 제품의 고장비율을 20%에서 60%까지 10%씩 증가시킬 경우 획득되는 정보를 <표 5>에 정리하였으며, 이때 수치예와 동일하게 $\beta=2.0$, $\delta_1=-0.3466$ 로 두고 총 제품의 고장비율에 따른 δ_0 를 구하였다. 또한 <표 5>와 같이 추적조사되는 제품의 자료 수집비율에 대하여 각 1,000번 반복하여 $\hat{t}_q(x_i; q=0.1)$ 의 MSE값과 식 (42)를 이용하여 열화정보 없이 분석시점까지 고장이 발생하지 않은 정보를 가진 경우의 MSE값을 <표 5>에 정리하였다. 여기서 보증기간과 분석시점사이에 고장난 제품의 비율이 전체 제품에 대하여 상대적으로 크지 않으므로 추적조사 비율이 클 경우에 획득되는 정확한 고장시간 및 구간자료에 비해 열화 정보의 양이 비현실적으로 크게 되는 경우가 초래될 수도 있어, 보고확률 $p_r=0.1$ 과 추적조사 비율 $p_f=0.1$ 의 조건에서 실험을 수행하였다.

<표 5> 열화정보의 획득비율에 따른 실험조건과 MSE 값

τ_f 까지의 총 제품의 고장 비율	D_1 비율	D_2 비율 (보고 비율)	D_3 비율	$p_f(=0.1)$ 의 구성비율			MSE (D_{33} :열화정보)		MSE (D_{33} :관측중단)	
				D_{31} 비율	D_{32} 비율	D_{33} 비율	설명 변수 "0"	설명 변수 "1"	설명 변수 "0"	설명 변수 "1"
20%	5.5%	14.5% (1.5%)	93%	7%	7%	86%	2.21364	0.87446	4.97689	1.32757
30%	8.7%	21.3% (2.1%)	89.2%	11%	11%	78%	1.13143	0.53063	1.92777	0.72580
40%	12%	28% (2.8%)	85.2%	15%	15%	70%	0.75562	0.34307	1.04649	0.44655
50%	16%	34% (3.4%)	80.6%	19%	19%	62%	0.51948	0.24636	0.64888	0.30665
60%	21%	39% (3.9%)	75.1%	23%	23%	54%	0.36301	0.18500	0.43268	0.21730

또한 보증기간 이후 분석시점사이에 보고되지 않은 제품 중에서 정확한 고장자료(D_{31})와 구간자료의 정보(D_{32}) 비율의 변화에 따른 효과를 조사한 실험의 일부로서, 분석시점까지의 고장비율이 20%, 40%일 경우에 한하여 <표 6>의 구성 비율하에서의 통계적 효율을 조사한 결과만 정리하였다. 즉, <표 6>에서는 추적조사되는 제품의 자료 수집비율에 대하여 각 1,000번 반복하여 수치실험을 실시한 $\hat{t}_q(x_i; q=0.1)$ 의 MSE값을 비교하였다.

<표 6> 구간자료의 획득비율에 따른 실험조건과 MSE값

τ_f 까지의 총 제품의 고장 비율	$p_f(=0.1)$ 의 구성비율			MSE	
	D_{31} 비율	D_{32} 비율	D_{33} 비율	설명 변수 "0"	설명 변수 "1"
20%	2%	12%	86%	2.21545	0.87512
	7%	7%		2.21364	0.87446
	12%	2%		2.21231	0.87105
40%	5%	25%	70%	0.75777	0.34401
	15%	15%		0.75562	0.34307
	25%	5%		0.75475	0.34252

<표 5>의 추적조사되는 제품 중 열화정보의 획득비율에 따른 결과와 <표 6>의 구간자료 획득비율에 따른 실험결과를 살펴보면 다음과 같다.

(1) 분석시점까지 고장이 발생하지 않은 제품 중 설명변수 정보만을 획득하는 경우보다 열화정보를 획득할 경우에 통계적 효율이 큼을 파악할 수 있다. 즉 추적조사 비율이 적고 전체 고장 제품에 비하여 상대적으로 열화정보의 비율이 적은 경우라 하더라도 열화정보의 획득이 중요함을 알 수 있다.

(2) 보증기간 이후 분석시점까지의 정확한 고장자료의 비율이 구간자료 정보의 비율보다 클수록 MSE 값이 조금 적게 도출됨을 알 수 있지만 통계적 효율의 차가 그리 크지 않으므로 노력과 비용 측면에서 유리한 구간정보의 유용성을 인식할 수 있다.

6. 결론

사용현장에서 획득된 수명자료를 이용한 신뢰성 평가시 열화자료의 중요성에 대한 인식 부족 등으로 인하여 이를 이용한 적절한 분석법이 개발되어 있지 않으므로 본 논문에서는 사용현장에서 추적조사를 통한 열화 및 구간고장 정보를 획득하여 사용환경 등을 나타내는 설명변수를 고려한 분석절차를 제시하였다. 즉 보증기간 이후 분석시점에서 불완전하게 획득되는 다양한 자료를 분석할 수 있도록 신뢰성 평가 모형을 설정하고 의사 우도함수를 유도하여 의사 최우추정량과 이의 점근성질을 조사하였다.

그리고 제품의 수명이 Weibull 분포일 경우 수치예를 대상으로 분석절차를 예증함으로써 사용현장의 신뢰성 자료를 이용하여 적절하게 신뢰성 평가를 수행하는 방법을 제시하였다. 또한 보고확률, 추적조사 비율 및 열화 및 구간자료 정보의 획득비율에 따른 효과를 조사하였는데, 추적조사 비율이 보고확률보다 더 큰 영향을 미치므로 사용현장 자료를 이용한 신뢰성 분석시 추적조사의 중요성을 규명하였다. 더불어 추적조사시에 비록 전체 대상에 비해 작은 비율이더라도 열화정보의 획득비율이 클수록 신뢰성 평가의 정확도가 상당히 높아짐을 파악하였다.

참고문헌

- [1] 배도선, 최인수, 황용근(1995), 고장 원인이 여럿인 제품의 사용현장 데이터 분석, 응용통계연구, Vol. 8, No.1 89-104.
- [2] 배도선, 윤희제, 최인수(1995), 수리 가능한 제품의 사용현장 데이터 분석, 응용통계연구, Vol. 8, No. 2, 133-145.
- [3] 서순근, 하천수(2002), 단순 확률계수 열화모형하에서 수명시험과 열화시험의 비교연구, 대한설비관리학회지, Vol. 7, No. 2, 53-69.
- [4] 오영석, 최인수, 배도선(1999), 설명변수를 고려한 불완전 사용현장데이터 분석, 대한산업공학회지, Vol. 25, No. 4, 510-516.
- [5] Drapella, A.(1993), The Complementary Weibull Distribution : Unknown or Just Forgotten?, *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 9. 383-386.
- [6] Jiang, R., Murthy, D. N. P., and Ji, P.(2001), Models Involving Two Inverse Weibull Distributions, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 73, 73-81.
- [7] Kalbfleisch, J. D. and Lawless, J. F.(1988), Estimation of Reliability in Field-Performance Studies, *Technometrics*, Vol. 30, No. 4, 365-378.
- [8] Lawless, J. F. and Kalbfleisch, J. D.(1992), Some Issues in the Collection and analysis of Field Reliability Data, *Survival Analysis : State of the Art* edited by Klein, J. P. & Goel, P. K., Kluwer, 141-152.
- [9] Lu, C. J. and Meeker, W. Q.(1993), Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution, *Technometrics*, Vol. 35, 161-174.
- [10] Lu, C. J., Meeker, W. Q., and Escobar, L. A.(1996), A Comparison of Degradation and Failure-Time Analysis Methods for Estimating a Time-to-Failure Distribution, *Statistical Sinica*, Vol. 6, 531-546.
- [11] Meeker, W. Q. and Escobar, L. A.(1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, Wiley.
- [12] Oh, Y. S. and Bai, D. S.(2001), Field data analyses with additional after-warranty failure data, *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 72, 1~8.
- [13] Suzuki, K.(1985), Estimation of Lifetime Parameters From Incomplete Field Data, *Technometrics*, Vol. 27, No. 3, 263~271.
- [14] Suzuki, K.(1995), Role of Field Performance Data and its Analysis, *In Recent Advances in Life-Testing and Reliability* edited by Balakrishnan, N., CRC Press.