

섭동법을 사용한 사각형 유체저장 탱크의 비선형 유동해석

Nonlinear Analysis of Sloshing in Rectangular Tanks by Perturbation Approach

진 영 선* 윤 정 방**
Choun, Young Sun Yun, Chung Bang

국문요약

사각형 유체저장 탱크내에 저장되어 있는 유체의 비선형 유동거동을 섭동법을 사용하여 해석하였다. 제시된 방법에 의한 비선형 해석결과는 기존의 연구결과와 잘 일치하였다. 지반특성과 탱크형상에 따른 유체 표면의 비선형 거동 특성을 분석하여 비선형 해석의 중요성을 입증하였다. 유체의 비선형 거동은 토사지반에서 크게 나타나며 특히 Broad Tank에서의 응답은 대단히 크게 나타났다. 일반적으로 유체표면 유동의 비선형 해석결과는 선형해석결과 보다 크게 나타났다. 유체저장탱크의 설계시 선형해석 만으로는 최대응답을 과소평가할 수 있으므로 비선형 해석을 반드시 수행할 필요가 있다.

주요어 : 유체 유동, 비선형 거동, 사각형 탱크, 섭동계수

ABSTRACT

For nonlinear analysis of sloshing of fluid in rectangular tanks, a new method using the perturbation approach is presented. The results by presented method show good agreement with results in previous study. The importance of nonlinear sloshing analysis is demonstrated by comparing nonlinear behaviors of sloshing in broad and tall tanks with different site conditions. In general, the results by nonlinear analysis are greater than those by linear analysis. Specially, the nonlinear behavior is significant in softer soil site and broad tank. Therefore, nonlinear behavior analysis has to be considered in the design of large liquid storage tanks.

Key words : sloshing, nonlinear behavior, rectangular tanks, perturbed parameter

1. 서 론

국내에서도 액체가스, 석유등을 저장하는 대형 액체저장탱크가 최근에 많이 건설되고 있지만 탱크의 수평 및 연직거동으로 인한 내부유체의 운동에 대해서는 크게 관심을 기울이지 않고 있는 실정이다. 자유표면을 갖는 탱크에 있어서 유체의 유동현상을 명확히 규명하는 것은 저장탱크를 설계하는데 있어서 대단히 중요하다. 그 이유는 유동이 크게 발생할 경우 탱크의 벽체 또는 지붕에 큰 충격하중이 작용하여 탱크의 손상을 유발할 수 있기 때문이다.⁽¹⁾

일반적으로 지반운동으로 인해 유발되는 탱크내 유체의 표면유동은 크지 않은 것으로 가정하여 선형이론에 근거한 유동해석 방법들이 제시되고 있으며 현재까지도 널리 사용되고 있다. 특히 Housner^(2,3)가 원통형 탱크와 사각형 탱크에 대하여 제시한 해석모델은 설계응답스펙트럼을 이용하여 탱크내 유체유동의 최대응답을 간단히 예측할 수 있으므로 가장 많이 사용되고 있다. 그러나 유체저장 탱크가 점차 대형화됨에 따라 유체의 깊이가 탱크의 직경이나 길이에 비하여 작아져서 미소진폭과 이론에는 포함되지 않은 비선형성이 나타나게 되었다.

비선형성을 고려한 유체유동에 관한 연구는 최근에 많이

진행되고 있다. 비선형 유동을 수학적으로 다루는 것은 대단히 복잡하고 난해하기 때문에 대부분이 유한요소법^(4,6), 유한차분법^(7,8), 경계요소법⁽⁹⁻¹¹⁾ 등의 수치적인 방법을 사용하여 비선형 해석을 하고 있다. 본 연구에서는 보다 간단한 비선형 해석기법으로 Faltinsen⁽¹²⁾, Hayama 등⁽¹³⁾에 의해서 제안된 섭동법(Perturbation approach)을 사용한 비선형 유동해석 기법을 개발하였다.

2. 지배방정식

그림 1과 같이 폭 a , 유체의 깊이 h 인 2차원 사각형 탱크에서 내부에 담겨져 있는 유체를 이상유체라고 가정하면 모든 유체영역에서 속도포텐셜 ϕ 가 존재하며 유체영역에서의 연속방정식은 식 (1)과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

그리고 탱크 벽체의 강성이 매우 큰 강체라고 가정하면 탱크와 유체간의 경계, 즉 탱크의 벽체와 바닥경계에서는 다음의 조건들이 성립된다.

$$\text{- 벽체경계}(x=0, x=a) : \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\text{- 바닥경계}(z=-h) : \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

* 정회원 · 한국원자력연구소 책임기술원(대표저자 : sunchun@kaeri.re.kr)

** 정회원 · 한국과학기술원 건설 · 환경공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2002년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2002. 10. 21 / 심사종료일 : 2002. 11. 14)

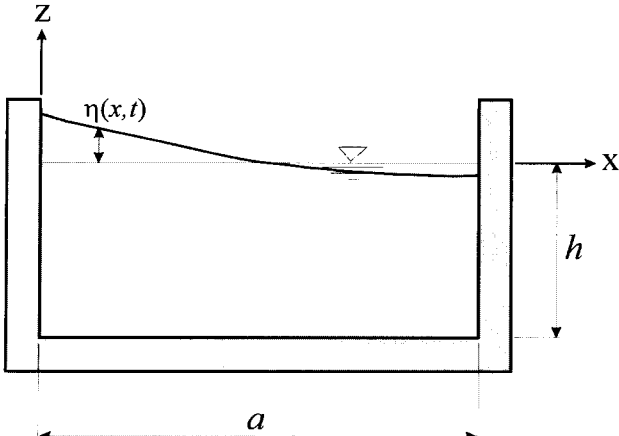


그림 1 2차원 사각형 탱크의 제원

또한 자유표면, 즉 $z = \eta(x, t)$ 에서의 경계조건으로서 운동기하학적조건(kinematic condition)과 동적평형조건(dynamic condition)의 두 식을 만족해야 한다. 즉, 자유표면의 수직속도는 자유표면 상의 유체입자의 수직속도와 같으며(운동기하학적조건), 베르누이 식에서 자유표면 상의 압력은 영이된다(동적평형조건). 그러므로 그림 1과 같은 사각형 유체저장 탱크에 수평방향의 지반가속도 \ddot{u}_g 가 작용할 때 자유표면 상에서의 두 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

- 운동기하학적조건 : $\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ (4)

- 동적평형조건 :

$$g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{u}_g = 0$$
 (5)

여기서, g 는 중력가속도, \ddot{u}_g 는 탱크바닥에서의 가속도를 나타낸다.

섭동법을 사용하여 해석할 경우에는 1보다 작은 양수 값인 섭동계수(perturbed parameter) ϵ 을 사용하여 속도포텐셜과 수면의 변위를 식 (6), (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \phi_n(x, z, t)$$
 (6)

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \eta_n(x, t)$$
 (7)

식 (6)과 (7)을 $z = \eta(x, t)$ 에서 운동기하학적조건(식 (4))과 동적평형조건(식 (5))에 대입하고 지반가속도 \ddot{u}_g 대신에 $\epsilon \dot{X}$ 을 사용하여 정리하면 다음의 두 식이 구해진다.

$$\left[\epsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \dots \right] - \left[\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \dots \right] + \left[\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \dots \right] \left[\epsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \dots \right] = 0$$
 (8)

$$g \left[\epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots \right] + \left[\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \dots \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \dots \right)^2 + \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \dots \right)^2 \right] + \epsilon \left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{X} = 0$$
 (9)

식 (8)과 (9)에서 ϵ 의 저차항인 1, 2차항만을 고려하면 윗 식은 다음의 두 식으로 간단하게 정리할 수 있다.

$$\epsilon \left[\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right]_{z=\eta} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right]_{z=\eta} = 0$$
 (10)

$$\epsilon \left[g\eta_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{X} \right]_{z=\eta} + \epsilon^2 \left[g\eta_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \right]_{z=\eta} = 0$$
 (11)

$z = \eta$ 상에서 식 (7)에 대해 식 (12)의 Taylor series를 적용하고 ϵ 의 1차 항과 2차 항만을 고려하면 식 (13)이 유도된다.⁽¹⁴⁾

$$f(x, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{m!} \left(\frac{\partial^m f}{\partial z^m} \right)_{z=0}$$
 (12)

$$f(x, \eta) = \epsilon f_1(x, z) + \epsilon^2 \left[f_2(x, z) + \eta_1 \frac{\partial f_1(x, z)}{\partial z} \right]$$
 (13)

식 (10)의 운동기하학적조건으로부터 $f_1(x, z)$ 과 $f_2(x, z)$ 는 각각 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$f_1(x, z) = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right]_{z=\eta}$$
 (14)

$$f_2(x, z) = \frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right]_{z=\eta} + \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right]_{z=\eta}$$
 (15)

또한 식 (11)의 동적평형조건으로부터 $f_1(x, z)$ 과 $f_2(x, z)$ 는 각각 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$f_1(x, z) = g\eta_1 + \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right]_{z=\eta} + \left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{X}$$
 (16)

$$f_2(x, z) = g\eta_2 + \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right]_{z=\eta} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right]_{z=\eta}$$
 (17)

식 (14)와 (15)를 식 (13)에 대입하고 식 (10)의 운동기하학적조건을 적용하면 식 (18)과 식 (19)가 얻어진다.

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial z} = 0$$
 (18)

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} + \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right]_{z=\eta} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_1 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial z^2} = 0 \quad (19)$$

또한 식 (16)과 (17)을 식 (13)에 대입하고 식 (11)의 동적평형조건을 적용하면 식 (20)과 식 (21)이 얻어진다.

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial t} + g\eta_1 + \left(x - \frac{a}{2}\right) \ddot{X} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial t} + g\eta_2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial z}\right)^2 \right] + \eta_1 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial t \partial z} = 0 \quad (21)$$

위의 식에서 위첨자 ~로 표시한 것은 $\eta=0$ 에서의 값을 나타낸다. 위의 식들은 다음과 같은 1차 및 2차 지배방정식으로 다시 정리할 수 있다.

- 1차 지배방정식 :

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial z} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial t} + g\eta_1 = -\left(x - \frac{a}{2}\right) \ddot{X} \quad (23)$$

- 2차 지배방정식 :

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial t} + g\eta_2 = -\eta_1 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial z}\right)^2 \right] \quad (25)$$

3. 선형해석

표면파의 선형거동은 식 (22)와 (23)의 1차 지배방정식의 해를 구함으로써 구할 수 있다. 유체영역에서의 연속조건(식 (1))과 탱크의 벽체 및 바닥에서의 경계조건(식 (2), (3))을 만족하는 속도포텐셜은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_1(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) \cos k_n x \cosh k_n(z+h) \quad (26)$$

여기서 $\dot{A}_{1n}(t)$ 는 임의의 시간의 함수 $A_{1n}(t)$ 의 시간에 대한 미분을 나타내며, k_n 은 파수(wave number)로서 $k_n = n\pi/a$ 로 구해진다.

식 (23)을 시간에 대하여 미분하고 식 (22)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial z} = -\left(x - \frac{a}{2}\right) \frac{d}{dt} \ddot{X} \quad (27)$$

식 (26)을 식 (27)에 대입하고 식 (27)의 우변 항의 $(x - a/2)$ 를 Fourier series로 표현하여 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) g k_n \sinh k_n h \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \dot{A}_{1n}(t) \cosh k_n h \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n]}{a k_n^2} \frac{d}{dt} \ddot{X}(t) \end{aligned} \quad (28)$$

윗 식을 시간에 대하여 적분하고 정리하면 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\ddot{A}_{1n}(t) + \omega_n^2 A_{1n}(t) = \frac{2[1 - (-1)^n]}{a k_n^2 \cosh k_n h} \ddot{X}(t) \quad (29)$$

여기서 $\omega_n^2 = g k_n \tanh k_n h$ 이다.

각 모드의 감쇠를 고려하면 식 (29)는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \ddot{A}_{1n}(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{A}_{1n}(t) + \omega_n^2 A_{1n}(t) \\ & = \frac{2[1 - (-1)^n]}{a k_n^2 \cosh k_n h} \ddot{X}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 ξ_n 은 모드감쇠비를 나타낸다.

식 (30)의 해 $A_{1n}(t)$ 는 다음 식으로 구해진다.

$$\begin{aligned} A_{1n}(t) &= \frac{2[1 - (-1)^n]}{a k_n^2 \omega_{Dn} \cosh k_n h} \\ & \int_0^t \ddot{X}(\tau) e^{-\xi_n \omega_n(t-\tau)} \sin \omega_{Dn}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $\omega_{Dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ 이다.

속도포텐셜 $\phi_1(x, z, t)$ 는 식 (31)을 시간에 대하여 미분하고 식 (26)에 대입하면 구할 수 있다. 그리고 지반운동에 대한 유체의 자유표면의 응답은 식 (22)와 (23)으로부터 구한 식 (32) 또는 (33)에 $\dot{A}_{1n}(t)$ 또는 $A_{1n}(t)$ 를 대입함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= -\frac{1}{g} \left[\left(x - \frac{a}{2}\right) \ddot{X}(t) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) \cos k_n x \cosh k_n h \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\eta_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n}(t) k_n \cos k_n x \sinh k_n h \quad (33)$$

식 (31)에서 \ddot{X} 대신에 입력가속도를 섭동계수 ϵ 으로 나눈 값, 즉 \ddot{u}_g/ϵ 을 대입하면

$$\begin{aligned} A_{1n}(t) &= \frac{2[1 - (-1)^n]}{\epsilon a k_n^2 \omega_{Dn} \cosh k_n h} \\ & \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_n \omega_n(t-\tau)} \sin \omega_{Dn}(t-\tau) d\tau \\ & = \frac{1}{\epsilon} A_n(t) \end{aligned} \quad (34)$$

여기서 $A_n(t)$ 는 다음으로 정의된다.

$$A_n(t) = \frac{2[1 - (-1)^n]}{a k_n^2 \omega_{Dn} \cosh k_n h} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau \quad (35)$$

따라서 속도포텐셜과 자유표면의 선형거동은 식 (6)과 (7)에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \varepsilon \phi_1(x, z, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n (z+h) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \varepsilon \eta_1(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) k_n \cos k_n x \sinh k_n h \end{aligned} \quad (37)$$

임의의 유체영역에서의 압력은 선형화된 베르누이 식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} p(x, z, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{A}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n (z+h) \\ &\quad - gz - \left(x - \frac{a}{2}\right) \ddot{u}_g \end{aligned} \quad (38)$$

4. 비선형해석

선형해석에서와 마찬가지로 유체영역에서의 연속조건과 탱크의 벽체 및 바닥에서의 경계조건을 만족하는 속도포텐셜은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_2(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n}(t) \cos k_n x \cosh k_n (z+h) \quad (39)$$

여기서 $B_{1n}(t)$ 는 임의의 시간의 함수이다.

앞에서와 마찬가지로 2차 지배방정식 (25)를 시간에 대하여 미분하여 식 (24)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} &= g \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g \eta_1 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial t \partial z} \\ &\quad - \eta_1 \frac{\partial^3 \tilde{\phi}_1}{\partial t^2 \partial z} - \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial t \partial z} \end{aligned} \quad (40)$$

선형해석에서 구한 $\phi_1(x, z, t)$ 과 $\eta_1(x, t)$, 즉 식 (26)과 식 (33), 그리고 식 (39)를 식 (40)에 대입하여 정리하면 다음 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{B}_{1n}(t) + \omega_n^2 B_{1n}(t)] \cos k_n x \cosh k_n h \\ &= g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{1n}(t) \dot{A}_{1m}(t) k_n^2 k_m \sinh k_n h \cosh k_m h \sin k_n x \sin k_m x \\ &\quad - g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{1n}(t) \dot{A}_{1m}(t) k_n k_m^2 \sinh k_n h \cosh k_m h \cos k_n x \cos k_m x \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) \ddot{A}_{1m}(t) k_n k_m \sinh k_n h \sinh k_m h \cos k_n x \cos k_m x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{1n}(t) \ddot{A}_{1m}(t) k_n k_m \sinh k_n h \sinh k_m h \cos k_n x \cos k_m x \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) \ddot{A}_{1m}(t) k_n k_m \cosh k_n h \cosh k_m h \sin k_n x \sin k_m x \end{aligned} \quad (41)$$

위의 식의 양변에 $\cos k_i x$ 를 곱하고 적분한계 $[0, a]$ 에서 x 에 대해 적분하여 정리하면 다음의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{B}_{1i}(t) + \omega_i^2 B_{1i}(t) = \frac{2}{a \cosh k_i h} F_{1i}(t) \quad (42)$$

여기서 $F_{1i}(t)$ 는 다음 식으로 정의된다.

$$\begin{aligned} F_{1i}(t) &\equiv \\ &g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{1n}(t) \dot{A}_{1m}(t) k_n^2 k_m \sinh k_n h \cosh k_m h \int_0^a \sin k_n x \sin k_m x \cos k_i x dx \\ &\quad - g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{1n}(t) \dot{A}_{1m}(t) k_n k_m^2 \sinh k_n h \cosh k_m h \int_0^a \cos k_n x \cos k_m x \cos k_i x dx \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) \ddot{A}_{1m}(t) k_n k_m \sinh k_n h \sinh k_m h \int_0^a \cos k_n x \cos k_m x \cos k_i x dx \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{1n}(t) \ddot{A}_{1m}(t) k_n k_m \sinh k_n h \sinh k_m h \int_0^a \cos k_n x \cos k_m x \cos k_i x dx \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) \ddot{A}_{1m}(t) k_n k_m \cosh k_n h \cosh k_m h \int_0^a \sin k_n x \sin k_m x \cos k_i x dx \end{aligned} \quad (43)$$

각 모드의 감쇠를 고려하면 식 (42)는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\ddot{B}_{1i}(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{B}_{1i}(t) + \omega_i^2 B_{1i}(t) = \frac{2}{a \cosh k_i h} F_{1i}(t) \quad (44)$$

여기서 ξ_i 는 모드감쇠비이다.

식 (44)의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$B_{1i}(t) = \frac{2}{a \omega_{Di} \cosh k_i h} \int_0^t F_{1i}(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{Di} (t-\tau) d\tau \quad (45)$$

식 (43)에서 i, m, n 을 무한으로 고려하는 것은 실용적이지 못하며 만일 고려하더라도 고차 모드의 영향은 크지 않은 것으로 판단된다. 따라서 여기서는 각각 3개의 항만을 고려하여 수식을 유도하였다. $i, m, n = 1, 2, 3$ 을 식 (43)에 대입하여 정리하면 $F_{11}(t), F_{12}(t), F_{13}(t)$ 은 각각 식 (46), (47) 및 (48)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_{11}(t) &= \frac{1}{\varepsilon^2} F_1(t) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{a}{4} [g \{ A_1(t) \dot{A}_2(t) k_1 k_2 (k_1 - k_2) \sinh k_1 h \cosh k_2 h \\
 &\quad - A_2(t) \dot{A}_1(t) k_1 k_2 (k_1 - k_2) \sinh k_2 h \cosh k_1 h \\
 &\quad + A_2(t) \dot{A}_3(t) k_2 k_3 (k_2 - k_3) \sinh k_2 h \cosh k_3 h \\
 &\quad - A_3(t) \dot{A}_2(t) k_2 k_3 (k_2 - k_3) \sinh k_3 h \cosh k_2 h \} \\
 &\quad - \left\{ 2A_1(t) \ddot{A}_2(t) + 2\dot{A}_2(t) \dot{A}_1(t) + A_1(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_2(t) \right. \\
 &\quad + A_2(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_1(t) \Big\} k_1 k_2 \sinh k_1 h \sinh k_2 h \\
 &\quad + \left\{ 2\dot{A}_2(t) \ddot{A}_3(t) + 2\dot{A}_3(t) \ddot{A}_2(t) + A_2(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_3(t) \right. \\
 &\quad + A_3(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_2(t) \Big\} k_2 k_3 \sinh k_2 h \sinh k_3 h \\
 &\quad + (\dot{A}_1(t) \ddot{A}_2(t) + \dot{A}_2(t) \ddot{A}_1(t)) k_1 k_2 \cosh k_1 h \cosh k_2 h \\
 &\quad + (\dot{A}_2(t) \ddot{A}_3(t) + \dot{A}_3(t) \ddot{A}_2(t)) k_2 k_3 \cosh k_2 h \cosh k_3 h \Big] \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{12}(t) &= \frac{1}{\varepsilon^2} F_2(t) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{a}{4} [g \{ -2 A_1(t) \dot{A}_1(t) k_1^3 \sinh k_1 h \cosh k_1 h \\
 &\quad + A_1(t) \dot{A}_3(t) k_1 k_3 (k_1 - k_3) \sinh k_1 h \cosh k_3 h \\
 &\quad - A_3(t) \dot{A}_1(t) k_1 k_3 (k_1 - k_3) \sinh k_3 h \cosh k_1 h \} \\
 &\quad - \left\{ 2\dot{A}_1(t) \ddot{A}_1(t) + A_1(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_1(t) \right\} k_1^2 \sinh k_1 h \sinh k_1 h \\
 &\quad + \left\{ 2\dot{A}_1(t) \ddot{A}_3(t) + 2\dot{A}_3(t) \ddot{A}_1(t) + A_1(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_3(t) \right. \\
 &\quad + A_3(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_1(t) \Big\} k_1 k_3 \sinh k_1 h \sinh k_3 h \\
 &\quad - \dot{A}_1(t) \ddot{A}_1(t) k_1^2 \cosh k_1 h \cosh k_1 h \\
 &\quad + (\dot{A}_1(t) \ddot{A}_3(t) + \dot{A}_3(t) \ddot{A}_1(t)) k_1 k_3 \cosh k_1 h \cosh k_3 h \Big] \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{13}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} F_3(t) \\
 &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{a}{4} [g \{ A_1(t) \dot{A}_2(t) k_1 k_2 (k_1 + k_2) \sinh k_1 h \cosh k_2 h \\
 &\quad + A_2(t) \dot{A}_1(t) k_1 k_2 (k_1 + k_2) \sinh k_2 h \cosh k_1 h \} \\
 &\quad + \left\{ 2\dot{A}_1(t) \ddot{A}_2(t) + 2\dot{A}_2(t) \ddot{A}_1(t) + A_1(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_2(t) \right. \\
 &\quad + A_2(t) \frac{d}{dt} \ddot{A}_1(t) \Big\} k_1 k_2 \sinh k_1 h \sinh k_2 h \\
 &\quad - (\dot{A}_1(t) \ddot{A}_2(t) + \dot{A}_2(t) \ddot{A}_1(t)) k_1 k_2 \cosh k_1 h \cosh k_2 h \Big] \quad (48)
 \end{aligned}$$

지반운동에 대한 유체의 자유표면의 비선형 응답성분은 식 (25)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \eta(x, t) &= -\frac{1}{g} \left[\sum_{n=1}^3 \dot{B}_{1n}(t) \cos k_n x \cosh k_n h \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{1n}(t) \ddot{A}_{1m}(t) k_n k_m \cos k_n x \cos k_m x \sinh k_n h \sinh k_m h \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) k_n \sin k_n x \cosh k_n h \right)^2 \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{1n}(t) k_n \cos k_n x \sinh k_n h \right)^2 \right] \quad (49)
 \end{aligned}$$

그러므로 속도포텐셜과 자유표면에서의 비선형 응답은 식 (6)과 (7)에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \phi(x, z, t) &= \varepsilon \phi_1(x, z, t) + \varepsilon^2 \phi_2(x, z, t) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n(z+h) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^3 \dot{B}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n(z+h) \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta(x, t) &= \varepsilon \eta_1(x, t) + \varepsilon^2 \eta_2(x, t) \\
 &= -\frac{1}{g} \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{A}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n h \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^3 \dot{B}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n h \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n(t) \ddot{A}_m(t) k_n k_m \cos k_n x \cos k_m x \sinh k_n h \sinh k_m h \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(t) k_n \sin k_n x \cosh k_n h \right)^2 \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(t) k_n \cos k_n x \sinh k_n h \right)^2 \right] \quad (51)
 \end{aligned}$$

여기서 $B_n(t)$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 B_n(t) &= \frac{2}{a \omega_{Dn} \cosh k_n h} \\
 &\quad \int_0^t F_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n(t-\tau)} \sin \omega_{Dn}(t-\tau) d\tau \quad (52)
 \end{aligned}$$

임의의 유체영역에서의 압력은 다음의 베르누이 식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 p(x, z, t) &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - gz - \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{u}_g \quad (53)
 \end{aligned}$$

식 (53)에 식 (6)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 p(x, z, t) &= -\varepsilon \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{X} \right] \\
 &\quad - \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] - gz \quad (54)
 \end{aligned}$$

식 (54)에 식 (26)과 식 (39)를 대입하고 정리하면 비선형 거동으로 인한 임의의 유체영역에서의 압력식을 다음 식으로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 p(x, z, t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{A}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n(z+h) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^3 \dot{B}_n(t) \cos k_n x \cosh k_n(z+h) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(t) k_n \sin k_n x \cosh k_n(z+h) \right)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(t) k_n \cos k_n x \sinh k_n(z+h) \right)^2 \\
 &\quad - gz - \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{u}_g \quad (55)
 \end{aligned}$$

그리고 수평 지반운동에 의해서 발생하는 탱크 벽체 바닥에서의 전단력과 전도모멘트는 각각 식 (56)과 (57)로 각각 산정할 수 있다.

$$Q(t) = \int_{-h}^{\eta_a} p(a, z, t) dz - \int_{-h}^{\eta_0} p(0, z, t) dz \quad (56)$$

$$M(t) = \int_{-h}^{\eta_a} (h-z) p(a, z, t) dz - \int_{-h}^{\eta_0} (h-z) p(0, z, t) dz + \int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right) p(x, -h, t) dx \quad (57)$$

위의 식에서 η_0 와 η_a 는 양쪽 벽체, 즉 $x=0$ 과 $x=a$ 에서의 파고를 나타낸다.

5. 예제해석

앞에서 유도한 유체저장탱크의 선형 및 비선형 응답 해석 방법을 사용하여 지진시 유체표면의 유동특성을 분석하였다. 그림 2는 조화진동에 대한 유체표면의 선형 및 비선형 거동을 도시한 것이다. 해석대상 탱크의 폭은 9.14m, 유체의 깊이는 4.57m이며 감쇠는 고려하지 않았다. 그림 2(c)에서 비선형 거동이 잘 나타나고 있다. 표 1은 해석결과 얻은 좌측 벽체($x=0$)와 우측 벽체($x=a$)에서의 최대진폭을 정리한 것으로서 비선형 해석결과가 선형해석에 비해 약 30% 정도 크게 산정되었다.

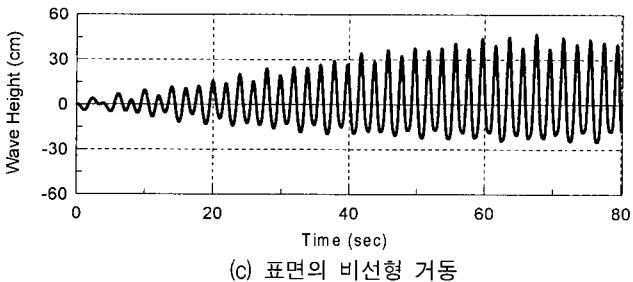
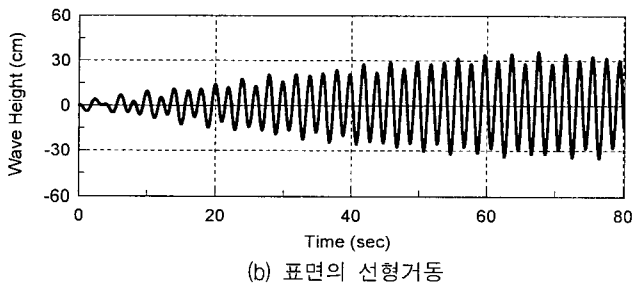
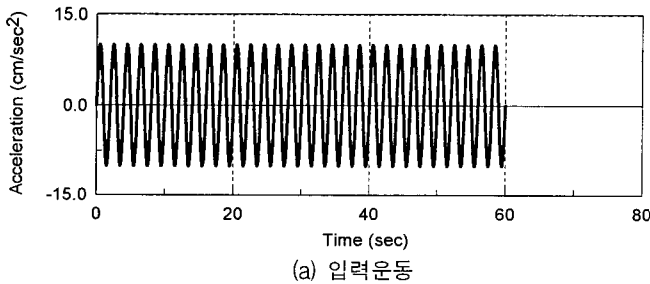


그림 2 조화진동에 의한 유체표면의 유동

표 1 조화진동에 대한 비선형 거동

표면유동	$x=0$ 에서의 최대진폭 (cm)	$x=a$ 에서의 최대진폭 (cm)
선형해석	36.0	36.0
비선형해석	45.5	47.2
증가율(%)	26.4	31.1

그림 3은 El Centro 지진에 대한 유체탱크의 선형 및 비선형 응답을 도시한 것으로서 본 연구에서 제시한 방법으로 구한 결과(그림 (b))는 Chen⁽⁷⁾에 의해서 구해진 결과(그림 (a))와 유사한 결과를 보이고 있어서 본 연구에서 제시한 방법이 타당하다는 것을 알 수 있다. 해석에서 사용한 탱크의 제원은 앞에서와 같은 폭 9.14m, 유체 깊이 4.57m이다. 표 2와 3은 각각 최대진폭과 최대전단력 및 전도모멘트를 정리한 것이다. 본 연구의 결과와 Chen⁽⁷⁾의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

지반의 특성과 탱크의 형상에 따른 유체의 거동특성을 몇 가지 예제를 통하여 분석하였다. 그림 4는 전단파 속도

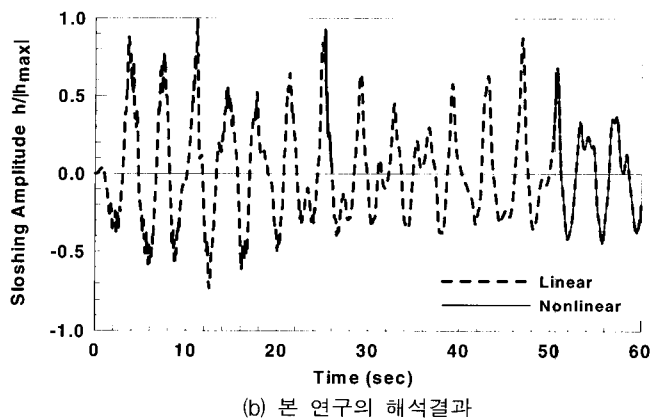
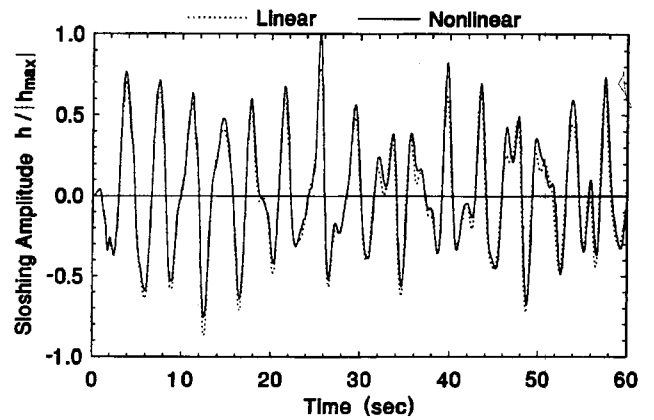


그림 3 El Centro 지진에 의한 유체표면의 유동

표 2 El Centro 지진에 대한 유동해석 결과

	$x=0$ 에서의 최대진폭 (cm)		$x=a$ 에서의 최대진폭 (cm)	
	선형해석	비선형해석	선형해석	비선형해석
Chen의 결과	50.6	65.0	56.6	69.6
본 연구 결과	52.8	67.5	52.8	74.7

표 3 El Centro 지진에 대한 탱크의 최대응답

	바닥전단력(kN)		전도모멘트(kN·m)	
	선형해석	비선형해석	선형해석	비선형해석
Chen의 결과	51.40	52.32	193.21	195.52
본 연구 결과	50.64	50.41	217.65	217.73

$V_s=5,000\text{m/sec}$ 인 암반지반에서의 가속도 시간이력으로서 최대지반가속도는 142.39cm/sec^2 이다. 그림 5는 암반지역 위에 성토한 토사지반 상에서 얻은 가속도 시간이력이다. 성토한 토사의 전단과 속도는 $V_s=150\text{m/sec}$ 로 가정하였다. 이때 최대가속도는 385.04cm/sec^2 로서 암반지반에 비해 약 2.7배 증폭된 값을 나타내었다. 그림 6과 그림 7은 각 입력 운동의 Fourier 스펙트럼을 나타낸 것으로서 암반지반의 입력운동에 비해 토사지반의 입력운동에 저진동수 성분이 많이 포함되어 있음을 알 수 있다.

그림 8과 9는 각각 암반지역 ($V_s=5,000\text{m/sec}$) 및 토사지역 ($V_s=150\text{m/sec}$)에 위치한 폭 30m, 유체 깊이 13m인 폭에

비해 유체의 깊이가 매우 작은 Broad Tank에 대한 표면유동 응답을 도기한 것이다. 해석에서 사용한 유체의 감쇠비는 0.005로 가정하였다. 유체 표면의 지진응답은 암반지반보다 토사지반에서 월등히 크며, 비선형 거동은 암반지반 보다는 토사지반에서 탁월하게 나타나는 것을 알 수 있다. 표 4에서 부터 최대 표면유동의 비선형해석 결과는 선형해석 결과에 비해 토사지반의 경우 약 34%, 암반지반의 경우 약 10% 크게 산정되었다. 그러나 탱크 바닥에서 발생하는 최대 전단력과 전도모멘트는 표 5에서 보는 바와 같이 선형해석과 비선형해석의 경우 거의 차이가 없는 것으로 나타났다. 토사지반의 경우가 암반지반에 비해 2.6배 정도 큰 응답을 보이고 있다.

그림 10과 11은 각각 암반지역 ($V_s=5,000\text{m/sec}$) 및 토사지역 ($V_s=150\text{m/sec}$)에 위치한 폭 7m, 유체 깊이 7.3m인 폭과 유체의 깊이가 거의 같은 Tall Tank에 대한 표면유동 응답을 도기한 것이다. 해석에서 사용한 유체의 감쇠비로는 앞서서와 마찬가지로 0.005로 가정하였다. 유체 표면의 지진 응답은 암반지반과 토사지반의 경우 차이가 크지 않았으며,

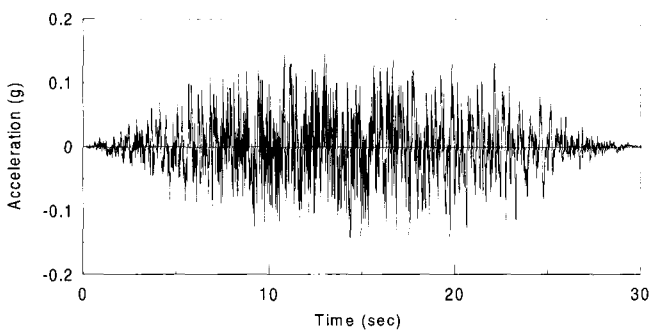


그림 4 암반지반 ($V_s=5,000\text{m/sec}$)에서의 지반운동

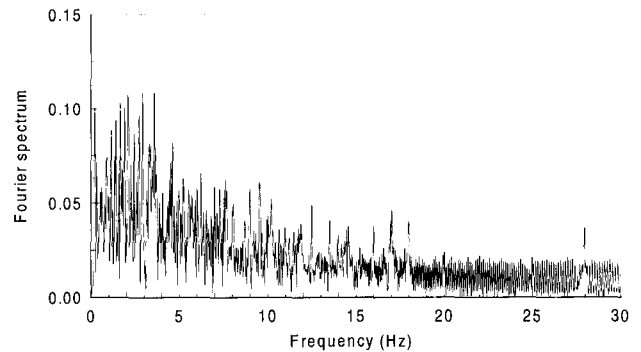


그림 6 암반지반 ($V_s=5,000\text{m/sec}$) 입력운동의 진동수 특성

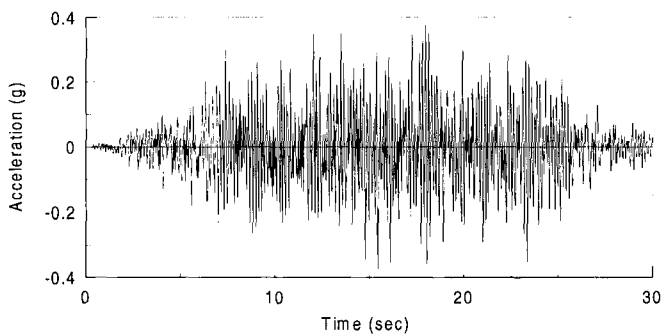


그림 5 토사지반 ($V_s=150\text{m/sec}$)에서의 지반운동

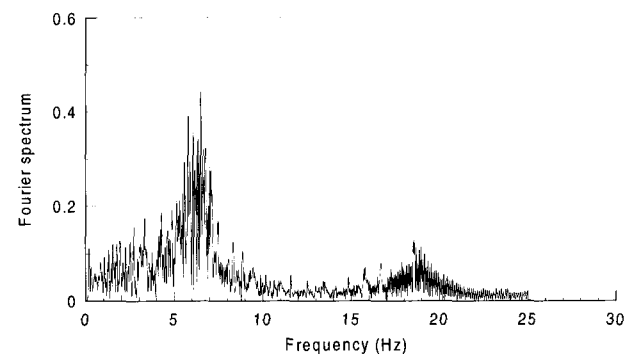
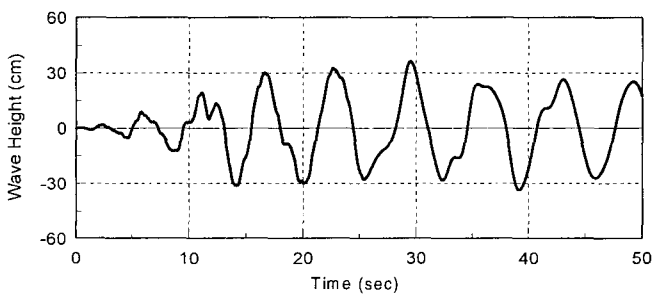
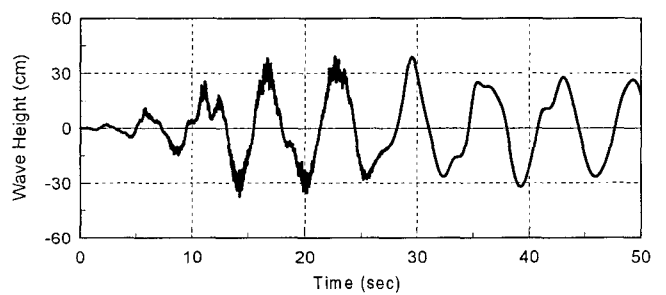


그림 7 토사지반 ($V_s=150\text{m/sec}$) 입력운동의 진동수 특성



(a) 선형거동



(b) 비선형거동

그림 8 암반지반 ($V_s=5,000\text{m/sec}$)에서의 표면유동(Broad Tank)

비선형 거동도 두 종류의 지반에서 거의 유사한 것을 알 수 있다. 최대표면유동의 비선형해석 결과는 선형해석 결과에 비해 두 지반에서 모두 약 35% 크게 산정되었다(표 6). 탱크 바닥에서의 최대 전단력과 전도모멘트는 선형해석과 비선형해석의 경우 거의 차이가 없는 것으로 나타났으며 토사지반

의 경우가 암반지반에 비해 2.5배 정도 큰 응답을 보이고 있다(표 7).

그림 12와 13은 각각 토사지반에 놓인 Broad Tank와 Tall Tank에서 벽체에 작용하는 동수압의 분포를 나타낸 것이다. Broad Tank에서의 동수압은 Tall Tank에 비해 대단히 크며

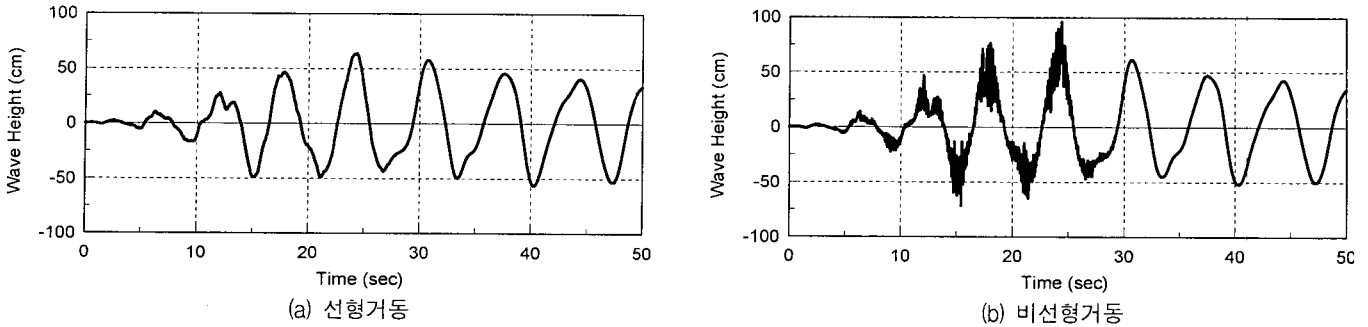


그림 9 토사지반($V_s=150\text{m/sec}$)에 대한 표면유동(Broad Tank)

표 4 Broad Tank에 대한 표면유동

부지종류	$x=0$ 에서의 최대진폭(cm)		$x=a$ 에서의 최대진폭(cm)	
	선형해석	비선형해석	선형해석	비선형해석
토사지반($V_s=150\text{m/sec}$)	63.7	85.3	63.7	95.6
암반($V_s=5,000\text{m/sec}$)	36.1	39.7	36.1	38.7

표 5 Broad Tank에 대한 지진응답

부지종류	최대전단력(kN)		최대회전모멘트(kN·m)	
	선형해석	비선형해석	선형해석	비선형해석
토사지반($V_s=150\text{m/sec}$)	753.40	753.44	10,711.95	10,711.43
암반($V_s=5,000\text{m/sec}$)	289.72	289.79	4,038.10	4,038.08

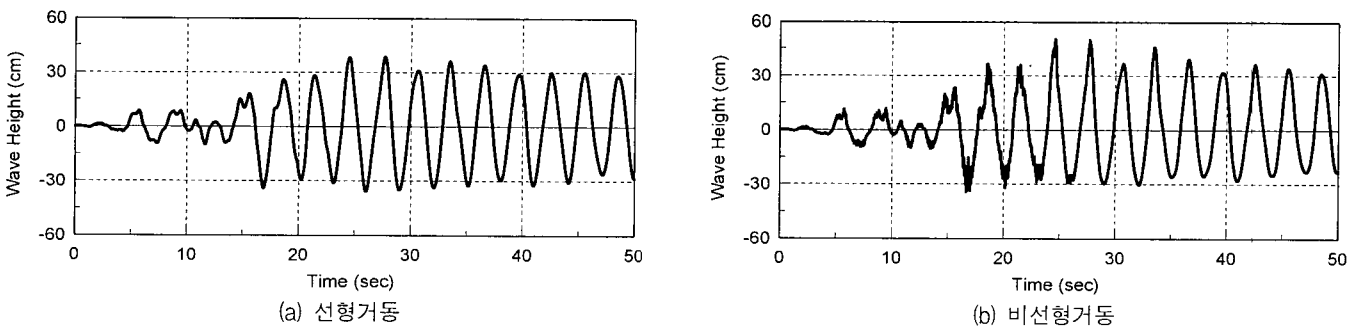


그림 10 암반지반($V_s=5,000\text{m/sec}$)에서의 표면유동(Tall Tank)

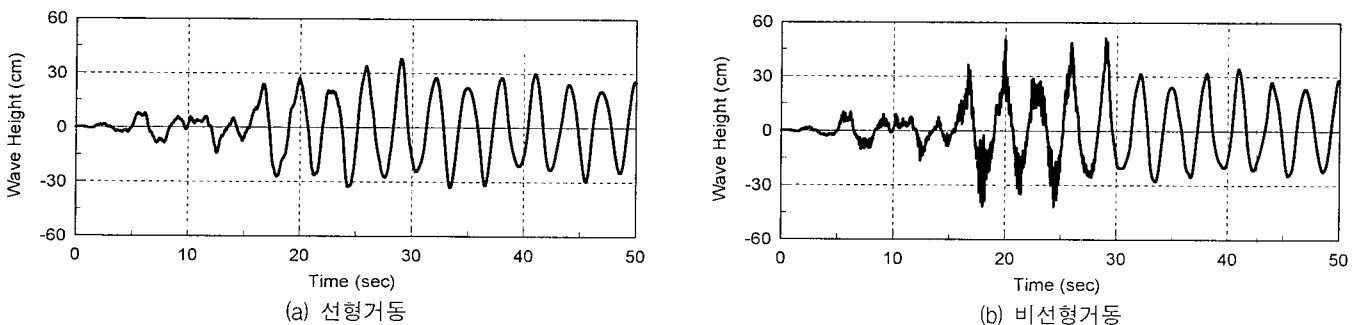


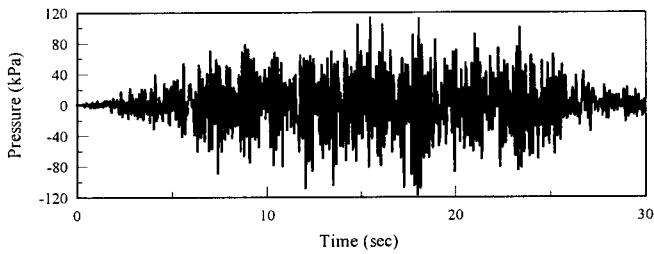
그림 11 토사지반($V_s=150\text{m/sec}$)에서의 표면유동(Tall Tank)

표 6 Tall Tank에 대한 표면유동

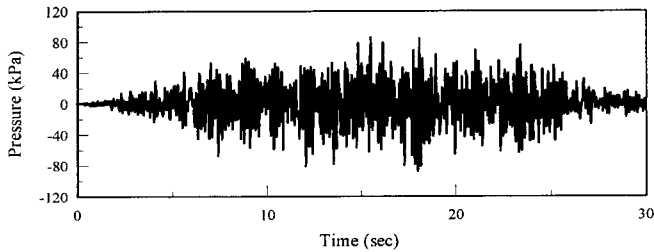
부지종류	$x=0$ 에서의 최대진폭(cm)		$x=a$ 에서의 최대진폭(cm)	
	선형해석	비선형해석	선형해석	비선형해석
토사지반($V_s = 150\text{m/sec}$)	37.8	50.4	37.8	51.2
암반($V_s = 5,000\text{m/sec}$)	38.3	53.0	38.3	50.2

표 7 Tall Tank에 대한 지진응답

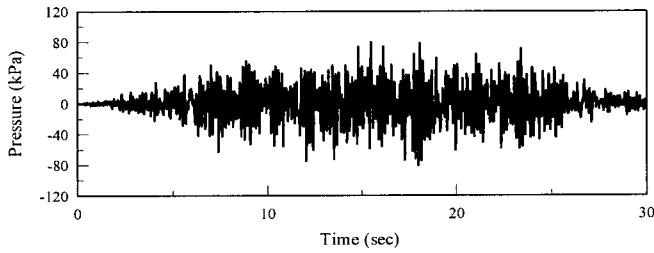
부지종류	최대전단력(kN)		최대회전모멘트(kN · m)	
	선형해석	비선형해석	선형해석	비선형해석
토사지반($V_s = 150\text{m/sec}$)	151.50	151.69	720.21	720.13
암반($V_s = 5,000\text{m/sec}$)	62.81	62.85	279.18	279.17



(a) 정지표면($z=0$)

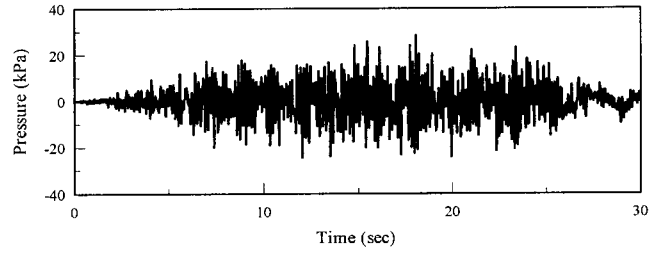


(b) 중간지점($z=h/2$)

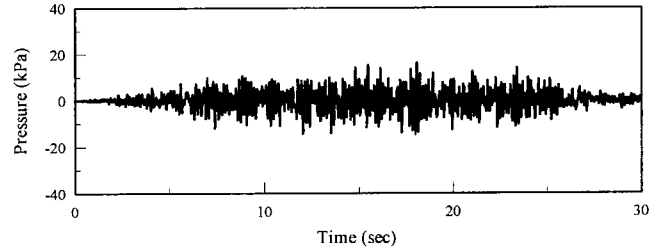


(c) 탱크바닥 ($z=h$)

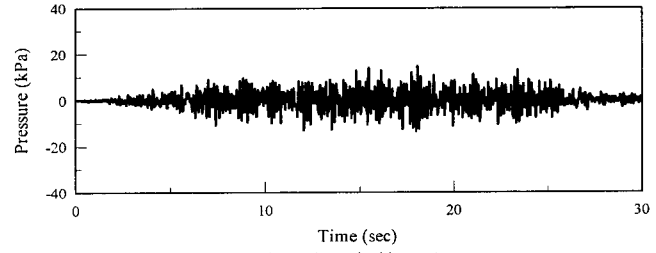
그림 12 Broad Tank에서의 동수압



(a) 정지표면($z=0$)



(b) 중간지점($z=h/2$)



(c) 탱크바닥 ($z=h$)

그림 13 Tall Tank에서의 동수압

탱크바닥에 까지 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 따라서 Broad Tank의 설계시에는 표면유동 뿐만 아니라 동수압의 영향을 신중히 검토할 필요가 있다. 특히 입력지진의 특성이 저진동수가 탁월한 경우에는 유체의 고유진동수와 근접하여 응답이 현저하게 증가할 가능성이 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 섭동법을 사용하여 사각형 탱크내에 저장되어 있는 유체의 비선형 거동을 해석하였다. 몇 가지 예제 해석을 통해 지반의 특성과 탱크의 형상에 대한 유체 표면의 비선형 거동 특성을 분석한 결과 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- 탱크에 저장된 유체의 표면유동은 비선형 해석의 경우 선형해석 결과에 비해 35% 정도 크고 암반지반 보다는 토사지반에서 비선형 거동이 탁월하다.
- 탱크의 지진응답은 일반적으로 토사지반에서 크게 나타난다.
- 유체의 표면유동은 탱크의 형상과 지반운동의 진동수 특성에 따라서 좌우된다. 토사지반에서는 Broad Tank에서의 응답이 대단히 크며 암반지반에서는 Tall Tank의 응답이 다소 큰 것을 알 수 있다.
- 유체표면 유동의 비선형 해석결과는 지반의 특성, 탱크의 형상 등에 관계없이 선형해석결과 보다 크게 나타났다.

유체유동의 비선형 해석은 대단히 중요하며, 선형해석 만으

로는 최대응답을 과소평가할 수 밖에 없으므로 비선형 해석을 반드시 수행해야 한다. 특히 대형 유체저장 탱크의 경우 유체의 표면파로 인한 충격으로 탱크의 상부가 손상될 가능성이 있으므로 반드시 비선형 해석을 통한 최대진폭의 정확한 예측이 필요하다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(과제번호: 1999-1-311-001-3)의 재정지원으로 수행되었으며 이의 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Cooper, T. W. "A Study of the performance of petroleum storage tanks during earthquakes, 1933-1995", NIST GCR 97-720, National Institute of Standards and Technology, 1997, p. 102.
2. Housner, G., "Dynamic pressure on accelerated fluid containers," *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 47, 1957, pp. 15-35.
3. Housner, G., "The dynamic behavior of water tanks," *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 53, 1963, pp. 381-387.
4. Ramaswamy, B., Kawahara, M., and Nakayama, T., "Lagrangian finite element method for the analysis of two-dimensional sloshing problems," *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 6, 1986, pp. 659-670.
5. Okamoto, T., "Two-dimensional sloshing analysis by lagrangian finite element method," *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, 1990, pp. 453-477.
6. Ushijima, S., "Three-dimensional arbitrary Lagrangian-Eulerian numerical prediction method for non-linear free surface oscillation," *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, 1998, pp. 605-623.
7. Chen, W., Haroun, M. A., and Liu, F., "Large amplitude liquid sloshing in seismically excited tanks," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, 1996, pp. 653-669.
8. Chen, B. F. and Chiang, H. W., "Complete 2D and fully nonlinear analysis of ideal fluid in tanks," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, 1999, pp. 70-78.
9. Nakayama, T. and Washizu, K., "The boundary element method applied to the analysis of Two-dimensional nonlinear sloshing problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, pp. 1631-1646.
10. Nakayama, T., "A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface," *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 10, 1990, pp. 683-695.
11. Liu, Z. and Huang, Y., "A new method for large amplitude sloshing problems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, 1994, pp.185-195.
12. Faltinsen, O. M., "A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks," *Journal of Ship Research*, Vol. 18, 1974, pp. 224-241.
13. Hayama, S., Aruga, K., and Watanabe, T., "Nonlinear responses of sloshing in rectangular tanks(1st Report, Nonlinear responses of surface elevation)," *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 26, 1983, pp. 1641-1648.
14. Ippen, A. T., *Estuary and Coastline Hydrodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1966, p. 744.