
피라미드의 정방형 2-차원 메쉬로의 새로운 임베딩

장정환*

A New Embedding of Pyramids into Regular 2-Dimensional Meshes

Jung-Hwan Chang*

요 약

병렬 알고리즘의 내재된 자료구조를 대규모 병렬처리시스템의 상호연결망 구조로 매핑시키거나 자원 할당 분야로의 응용을 위해 그래프 임베딩 문제가 연구되어 왔다. 본 논문에서는 피라미드를 정방형 2-차원 메쉬 상호연결망으로 임베딩하는 문제를 다룬다. 높이가 N 인 피라미드를 $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 신장율 $\max\{2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor, 2^{N-3} + 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor\}$ 로 임베딩시킬 수 있는 새로운 임베딩 함수를 제안한다. 이러한 결과는 동일한 조건 하에서 신장율이 기존의 연구결과인 2^{N-1} 을 약 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 로 개선하였음을 의미한다.

ABSTRACT

A graph embedding problem has been studied for applications of resource allocation and mapping the underlying data structure of a parallel algorithm into the interconnection architecture of massively parallel processing systems. In this paper, we consider the embedding problem of the pyramid into the regular 2-dimensional mesh interconnection network topology. We propose a new embedding function which can embed the pyramid of height N into $2^N \times 2^N$ 2-dimensional mesh with dilation $\max\{2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor, 2^{N-3} + 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor\}$. This means an improvement in the dilation measure from 2^{N-1} in the previous result into about $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ under the same condition.

키워드

임베딩, 피라미드, 2-차원 메쉬, 신장율

1. 서론

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는

노드들의 연결 구조를 그래프 형태로 표현한 상호연결망 토폴로지의 역할이 매우 중요한데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적인 수밖에 없기 때문이다.

일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance), 라우팅 알고리즘의 간결성 및 효율성 등이 중요하게 평가되고 있는데, 이러한 요소들을 비교 분석하여 보다 좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심을 받고 있다.

뿐만 아니라 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 그래프 임베딩(embedding) 문제가 대두하게 되었다.^{[1][2]}

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube)를 꼽을 수 있으며^[3], 피라미드(pyramid)와 메쉬(mesh) 또한 병렬처리분야에서 비교적 널리 잘 알려진 상호연결망 구조 중 하나로 널리 이용되고 있는 실정이다.^{[4][5]}

높이 N 인 피라미드의 경우 $(4^N - 1)/3$ 개의 정점들을 갖는 계층적 구조의 그래프로서 멀티미디어 분야의 저레벨에서의 픽셀 단위 영상처리 관련 기능을 효율적으로 처리해 줄 수 있는 구조적 특성으로 인해 관련 분야를 중심으로 널리 이용되어 왔으나 오늘날은 내재된 트리 및 메쉬 구조를 다양하게 활용함으로써 그래프 관련 기본문제들의 해결에도 좋은 성과를 얻고 있는 것으로 알려져 있다.^[5]

한편 2-차원 및 3-차원 메쉬의 경우도 짧은 지름 및 큰 이분폭(bisection width) 등 성능에 미치는 긍정적인 효과와 확장성(extendability) 등의 장점으로 인해 대규모 병렬처리시스템으로 비교적 널리 구현되고 있는 실정이다.

손님(guest) 그래프 G 의 주인(host) 그래프 H 로의 임베딩(embedding)이란 G 의 정점들의 집합 $V(G)$ 로부터 H 의 정점들의 집합 $V(H)$ 로의 일대일 대응을 의미하는 함수 F 로 정의된다. 이때 G 의 에지 $e=(v,w)$ 는 $F(v)$ 와 $F(w)$ 를 연결하는 H 의 경로(path) $F(e)$ 에 대응된다.

임베딩 F 의 비용을 측정하는 척도로는 신장율(dilation)과 확장율(expansion) 등이 주로 사용되고 있다. 임베딩 F 하에서 G 의 에지 e 의 신장율은 이에 대응되는 H 에서의 경로 $F(e)$ 의 길이를 의미하고 모든 에지에 대해 적용한 결과 최대값을 그 임베딩 F 의 신

장율로 정의하며, 확장율은 두 그래프의 크기의 비로써 G 의 정점들의 개수에 대한 H 의 정점들의 개수의 비로 정의한다. 즉 신장율이란 G 의 구조를 갖는 알고리즘을 H 형태의 상호연결망을 갖는 병렬처리시스템에서 시뮬레이션할 때 필요한 통신 스템의 수를 나타내고 있으므로 전달지연을 의미하며, 확장율은 H 구조의 상호연결망을 갖는 병렬처리시스템에서의 자원의 효율성을 의미하므로 신장율과 확장율은 모두 그 값이 적을수록 우수한 임베딩으로 평가된다.

높이가 N 인 피라미드를 메쉬로 임베딩시킨 관련 연구로는 Stout^[6]이 $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 신장율과 확장율이 각각 2^{N-1} 과 3인 임베딩 방법을 제안한 이후 3차원 메쉬로 확장되어 오고 있다. 3-차원 메쉬를 대상으로 한 피라미드의 임베딩 관련 연구는 2-차원 메쉬에 대한 임베딩 결과들을 활용한 확장으로써 Ip^[7]와 Chung^[8]의 연구 결과들이 알려져 있다. Ip는 자연 임베딩(Natural Embedding)과 다중 임베딩(Multiple Embedding) 기법들을 제안하고 있는데, 높이 N 인 피라미드를 대상으로 전자의 경우는 $2^{N-1} \times 2^{N-1} \times N$ 메쉬로 신장율과 확장율이 각각 $2^{N-2} + 1$ 과 $3N/4$ 로 임베딩 가능함을 보인 것이고, 이를 확장시킨 후자의 경우는 $2^{N-2} \times 2^{N-2} \times 6$ 메쉬로 신장율과 확장율이 각각 $2N-3$ 과 $9/8$ 인 임베딩 방법을 제안하였다^[7]. 한편 Chung은 높이 N 인 피라미드를 3-차원 메쉬 $2^{(2N-1)/3} \times 2^{(2N-1)/3} \times (4^{(N-1)/3} + 2)/3$ 로 신장율과 확장율이 각각 $2^{(2N-1)/3}$ 와 $1 + 2/4^{(N-1)/3}$ 인 개선된 기법을 제안하였다^[8].

이러한 결과들에서 공통적으로 부딪히게 되는 문제는 결국 기반이 되는 2-차원 메쉬에 대한 임베딩으로부터 파생되는 성능에 의존적일 수밖에 없다는 사실로써 결국 피라미드의 2-차원 메쉬로의 임베딩에 대한 중요성이 부각되고 있다.

이러한 배경 하에서 본 논문에서는 2-차원 메쉬를 대상으로 피라미드를 임베딩하는 문제를 다루게 되는데, 병렬처리시스템의 전체적인 통신성능에 큰 영향을 미치는 신장율 측면에서 향상된 성능을 갖는 새로운 임베딩 기법을 제안한다. 이 방법에서는 높이가 N 인 피라미드를 $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 임베딩시킨^[6]에서 제안되고 Ip 및 Chung의 논문에서 사용되어온 기존의 방법에서의 신장율 2^{N-1} 을 동일한 조건하에서 $\max\{2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor, 2^{N-3} + 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor\}$ 로 기존 연구 결과 대비 약 3/8배에 해

당하는 신장을 개선효과를 얻을 수 있음을 보인다.

본 논문은 네 개의 장으로 구성되며, 제2장에서는 본 논문에서 주로 다루게 될 두 그래프에 해당하는 피라미드와 2-차원 메쉬에 대한 정의와 특성들에 대해 살펴보고 제3장에서는 기존의 연구결과를 개선한 새로운 임베딩 기법을 제시하고 해당 임베딩에서의 성능 요소들에 대한 분석을 통해 제안된 기법의 우수성을 증명하며, 마지막 제4장에서 결론을 맺는다.

II. 그래프 특성

본 장에서는 본 논문에서의 임베딩 대상 그래프인 피라미드 및 2-차원 메쉬 구조의 정의 및 그래프 이론적 관점에서의 주요 특성들을 살펴보고자 한다.

[정의 1] 주어진 양의 정수 N에 대해 높이가 N인 피라미드 P_N 은 정점의 집합 $V(P_N)$ 과 에지의 집합 $E(P_N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

- 1) $V(P_N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-1} \{(l, x, y) | 0 \leq x, y \leq 2^{N-l} - 1\}$
- 2) $E(P_N) = \{ \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{ ((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2)) | |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1 \ \&\& \ (l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \in V(P_N) \} \cup [\bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{ (l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor) \} | 0 \leq x, y \leq 2^{N-l} - 1 \}$

[정의 2] 한 번의 길이를 나타내는 주어진 양의 정수 W에 대한 정방형 2-차원 메쉬 $M_{W \times W}$ 는 정점의 집합 $V(M_{W \times W})$ 와 에지의 집합 $E(M_{W \times W})$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

- 1) $V(M_{W \times W}) = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq W-1\}$
- 2) $E(M_{W \times W}) = \{ ((x_1, x_2), (x_1', x_2')) | \sum_{i=1}^2 |x_i - x_i'| = 1 \ \&\& \ (x_1, x_2), (x_1', x_2') \in V(M_{W \times W}) \}$

그림 1은 높이(height)가 3인 피라미드와 8×8인 2-차원 메쉬의 예를 보여주고 있다. 일반적으로 높이가 N인 피라미드 P_N 의 각 레벨 $l(0 \leq l < N)$ 에는 4^{N-l} 개의 정점들로 구성된 정방형 2-차원 메쉬 $2^{N-l} \times 2^{N-l}$ 구조로 이루어져 있어 가장 위 레벨에 해당하는 레벨 N-1의 1개의 정점으로 구성된 2-차원 메쉬로부터 시작하여 가장 아래 레벨에 해당하는 레벨 0의 4^{N-1} 개로

구성된 2-차원 메쉬까지를 부그래프(sub-graph)로 포함하고 있으며 이들 상호간에 레벨간 에지들이 사진 트리(quarterary tree) 형태로 연결된 구조를 형성하고 있음을 알 수 있다.

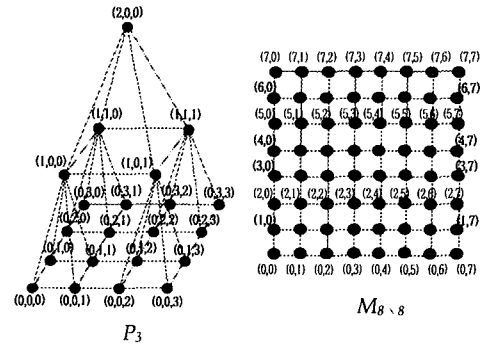


그림 1. 피라미드 및 2-차원 메쉬 그래프 예
Fig. 1 Graph examples of pyramid and 2-D mesh

III. 임베딩 기법

본 장에서는 본 논문에서 제안하고 있는 피라미드의 2-차원 메쉬에 대한 임베딩 기법에 대해 두 그래프 상호간 정점의 매핑 함수 및 임베딩 결과 얻을 수 있는 신장율이라는 성능 파라미터 관점에서의 중점 분석이 언급된다.

3.1 매핑 함수

앞에서 살펴본 바와 같이 높이가 N인 피라미드의 $(4^N - 1)/3$ 개 정점들을 $2^N \times 2^N$ 2-차원 메쉬의 4^N 개 정점들로 일-대-일로 매핑시키기 위한 임베딩은 다음과 같은 함수 f로 정의할 수 있다.

$$f : V(P_N) \rightarrow V(M_{2^N \times 2^N})$$

$$f(l, x, y) = \left\{ \begin{array}{l} (S_x + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l, S_y - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l); \\ \quad \text{if } l \neq N-2 \\ (S_x + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l + (-1)^l \cdot D, \\ \quad S_y - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l + (-1)^l \cdot D); \text{ if } l = N-2 \end{array} \right\} \dots (1)$$

$$\text{여기서, } S_x = 2^l - 1, \quad S_y = 2^{N-l} - 1 \\ D = \lfloor (3 \cdot 2^{N-l} + 1) / 2 \rfloor$$

여기서 S_x 및 S_y 는 각각 레벨 l에 해당하는 정점들

의 시작 위치를 나타내는 x 및 y 좌표값을 의미하고 이 좌표를 시작으로 하여 그림 2에서 보는 바와 같이 우측-상단을 향해 사선 형태로 피라미드 내 해당 레벨 메쉬의 하나의 행(row)에 대응되는 정점들이 위치하게 된다.

기존의 방법에서 신장율이 길어지게 되는 요인을 분석한 결과 피라미드 내의 인접 레벨간 에지에서 신장율을 증대시키는 요인이 되어 레벨 $N-1$ 과 $N-2$ 사이의 연결 에지들에서 최대의 신장율인 2^{N-1} 을 갖게된다는 사실을 확인하였다. 따라서 이를 개선하기 위해 피라미드 내 각 레벨 메쉬들의 행들을 사선 형태로 배열시켜 최대 신장율 발생 위치를 레벨 내의 정점들을 연결하는 에지들로 변형시켰고 이 경우에도 피할 수 없게 된 레벨 $N-2$ 에서의 정점간 연결 에지들에서의 최대 신장율을 감소시키기 위해 매핑함수에서 특별하게 처리하도록 변형을 가해 극복하게 되었다.

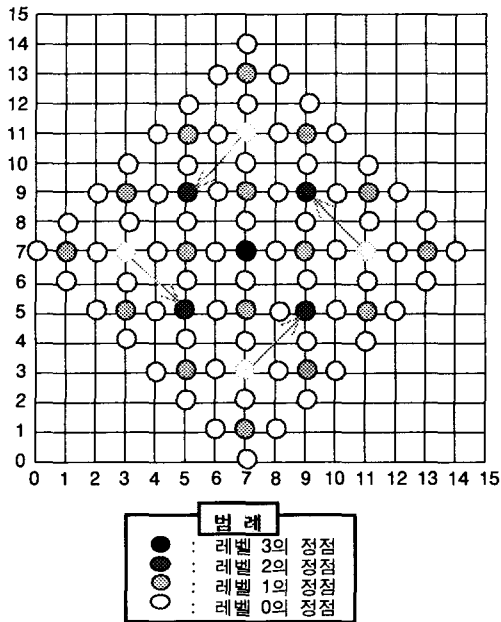


그림 2. 피라미드의 2-차원 메쉬로의 임베딩 예
Fig. 2 An embedding example of pyramid into 2-D mesh

여기서 좌표의 조정을 위해 도입된 변위값 D 는 조정 후에 예상되는 신장율의 감소 효과를 극대화할 수 있도록 선정된 값으로써 조정 후 $N-2$ 레벨 정점들에 미치는 감소분이 반영된 신장율 $2^{N-1}-2D$ 와 $N-3$ 레벨 정점들에서의 증가분이 반영된 $2^{N-3}+2D$ 에 해당하

는 값의 차이를 최소화 하는 정수값을 의미하는 값으로써 두 식을 등식으로 두고 D 값을 구하면 $D=3 \cdot 2^{N-5}$ 라는 값을 얻을 수 있다. 그러나 이 값은 $N \leq 4$ 인 경우에는 정수값이 아닌 관계로 근사 정수값을 구하기 위해 반올림한 값에 해당하는 D 표현식이 식 (1)에 주어져 있다.

이러한 새로운 매핑함수를 적용시킨 새로운 임베딩의 예를 그림 2에서 보여주고 있는데 여기서는 P_4 를 16×16 메쉬로 임베딩하면서 레벨 3의 해당하는 정점들을 조정값 $D=2$ 만큼씩 각각 x 및 y 좌표값을 이동시킨 새로운 좌표로 매핑하고 있음을 보여주고 있다.

3.2 성능 분석

위에서 제시된 새로운 임베딩을 통해 얻을 수 있는 임베딩의 성능을 분석하기 위해 본 절에서는 신장율의 측면에서 각 에지의 신장율 특성을 분석한다.

[보조정리 1] P_N 내의 $0 \leq l \leq N-2$, $0 \leq x \leq 2^{N-l}-1$ 및 $0 \leq y \leq 2^{N-l}-2$ 를 만족하는 레벨 l 내의 임의의 두 정점 (l, x, y) 와 $(l, x, y+1)$ 를 연결하는 에지들에 대한 임베딩 f 적용시 최대 신장율은 $2^{N-l}-2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-l}+1)/2 \rfloor$ 이다.

[증명] 피라미드에서 동일 레벨 내의 y 좌표값이 인접된 두 정점 사이의 신장율은 매핑 함수 적용 결과 대응되는 2-차원 메쉬에서의 두 정점 사이의 거리로 다음과 같이 계산이 가능하다.

① 레벨 $l \neq N-2$ 인 경우:

$$\begin{aligned} \text{Dist}_f((l, x, y+1), (l, x, y)) &= |S_h + x \cdot 2^l + (y+1) \cdot 2^l - (S_h + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &\quad + |S_h - x \cdot 2^l + (y+1) \cdot 2^l - (S_h - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &= |2^l| + |2^l| = 2^{l+1} \end{aligned}$$

이 경우에 높이가 N 인 피라미드에서 $l=N-1$ 인 경우는 정점이 하나밖에 없기 때문에 해당이 없고, 그 다음으로 상위 레벨인 $l=N-3$ 일 때 신장율이 최대가 되고 그 값은 $2N-2$ 가 된다.

② 레벨 $l=N-2$ 인 경우: 이 경우는 그림 2에서 진하게 표시된 네 개의 정점들에서 보는 바와 같이 다른 레벨과 다르게 정점들의 위치에 변형을 줌으로써 표 1에서 확인할 수 있는 바와 같이 $-2D$ 만큼의 감소 효과를 얻을 수 있게 되므로 결국 $2^{N-1}-2D$ 에 해당하는 값 $2^{N-1}-2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-l}+1)/2 \rfloor$ 이다.

따라서 종합하면 y 좌표값이 인접한 두 정점들에서의 신장율은 최대값에 해당하는 $2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$ 라는 사실을 알 수 있다. \square

표 1. N-2 레벨에서의 좌표 변위와 그 영향
Table. 1 Coordinates displacement and its effect in level N-2

좌표 값	좌표 변위 값		에지에 미치는 영향		
	x-방향	y-방향	동일레벨	상위레벨	하위레벨
(0,0)	+D	+D	-2D	0	+2D
(0,1)	+D	-D	-2D	0	+2D
(1,0)	-D	+D	-2D	0	+2D
(1,1)	-D	-D	-2D	0	+2D

(여기서, $D = \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$)

[보조정리 2] P_N 내의 $0 \leq l \leq N-2$, $0 \leq x \leq 2^{N-1} - 2$ 및 $0 \leq y \leq 2^{N-1} - 1$ 을 만족하는 레벨 l 내의 임의의 두 정점 (l, x, y) 와 $(l, x+1, y)$ 를 연결하는 에지들에 대한 임베딩 f 적용시 최대 신장율은 $2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$ 이다.

[증명] 위 보조정리 1에서와 유사하게 피라미드에서 동일 레벨 내의 x 좌표값이 인접된 두 정점 사이의 신장율은 매핑 함수 적용 결과 대응되는 2-차원 매쉬에서의 두 정점 사이의 거리로 다음과 같이 계산이 가능하다.

① 레벨 $l=N-2$ 인 경우:

$$\begin{aligned} Dist_x((l, x+1, y), (l, x, y)) &= |S_{lx} + (x+1) \cdot 2^l + y \cdot 2^l - (S_{lx} + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &\quad + |S_{ly} - (x+1) \cdot 2^l + y \cdot 2^l - (S_{ly} - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &= |2^l| + | -2^l | = 2^{l-1} \end{aligned}$$

이 경우 역시 보조정리 1에서 언급한 것과 동일한 이유로 인해서 $l=N-3$ 일 때 신장율이 최대가 되고 그 값은 2^{N-2} 가 된다는 사실을 확인할 수 있다.

② 레벨 $l=N-2$ 인 경우: 이 경우는 보조정리 1의 ②에서와 유사하게 적용시키면 표 1에서 확인할 수 있는 바와 같이 $-2D$ 만큼의 감소 효과를 얻을 수 있게 되므로 결국 $2^{N-1} - 2D$ 에 해당하는 식 $2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$ 을 통해 구할 수 있다.

따라서 종합하면 y 좌표값이 인접한 두 정점들에서의 신장율은 위 두 경우에서의 최대값에 해당하는 값 $2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$ 임을 알 수 있다. \square

[보조정리 3] P_N 내의 $0 \leq l \leq N-2$ 및 $0 \leq x, y \leq 2^{N-1} - 1$ 을 만족하는 두 개의 인접 레벨 l 과 $l+1$ 내의 임의의 두 정점 (l, x, y) 와 $(l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)$ 를 연결하는 에지들에 대한 임베딩 f 적용시 최대 신장율은 $2^{N-3} + 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$ 이다.

[증명] 피라미드에서 인접된 두 레벨 l 과 $l+1$ 사이 에 에지로 연결된 두 정점간 신장율은 매핑 함수 적용 결과 대응되는 2-차원 매쉬에서의 두 정점 사이의 거리로 다음과 같이 계산이 가능하다.

① 레벨 $l \leq N-4$ 인 경우:

$$\begin{aligned} Dist((l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor), (l, x, y)) &= |(\lfloor 2^{l-1} - 1 \rfloor + \lfloor x/2 \rfloor \cdot 2^{l-1} + \lfloor y/2 \rfloor \cdot 2^{l-1} - ((2^l - 1) + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l))| \\ &\quad + |(\lfloor 2^{N-2} - 1 \rfloor - \lfloor x/2 \rfloor \cdot 2^{N-2} + \lfloor y/2 \rfloor \cdot 2^{N-2} - ((2^{N-2} - 1) - x \cdot 2^{N-2} + y \cdot 2^{N-2}))| \\ &= \begin{cases} \lfloor 2^l \rfloor, & \text{if } x \text{ is odd \& } y \text{ is even} \\ \lfloor 2^l \rfloor, & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= 2^l \end{aligned}$$

이 경우에는 $l=N-4$ 일 때 신장율이 최대가 되고 그 값은 2^{N-4} 가 된다.

② 레벨 $l=N-3$ 인 경우: 레벨 $N-3$ 과 $N-2$ 사이를 연결하는 에지들의 경우는 레벨 $N-2$ 에서의 좌표 변형에 따라 표 1에서 보는 바와 같이 $+2D$ 에 해당하는 변화값의 영향을 받게됨을 확인할 수 있다. 따라서 이 경우의 신장율 값은 $2^{N-3} + 2D$ 에 해당하는 식 $2^{N-3} + 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$ 의 값에 의해 결정된다.

③ 레벨 $l=N-2$ 인 경우: 레벨 $N-2$ 와 $N-1$ 사이를 연결하는 에지들의 경우는 레벨 $N-2$ 에서의 좌표 변형에도 불구하고 표 1에서 보는 바와 같이 변화값이 서로 상쇄되어 영향을 주지 않음을 확인할 수 있다. 따라서 이 경우의 최대 신장율 값은 ①에서와 동일하게 적용하여 2^{N-3} 을 갖는다.

따라서 종합하면 인접 레벨간 정점들에서의 신장율은 값은 세 경우에서의 최대값에 해당하는 $2^{N-3} + 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1)/2 \rfloor$ 임을 알 수 있다. \square

지금까지의 신장율 분석 결과를 요약하면 아래의 표 2로 요약할 수 있으며 표 3을 통해 신장율의 관점에서 성능 개선 내용을 확인할 수 있다.

표 2. 높이 N 값에 따른 신장율 변화
Table. 2 A variation of diameter according to the value of height N

N	신장율 계산을 위한 중간값			신장율
	D	$2^{N-1}-2D$	$2^{N-3}+2D$	
2	0	2	2	2
3	1	2	3	3
4	2	4	6	6
≥ 5	$3 \cdot 2^{N-2}$	$(5/8) \cdot 2^{N-1}$	$(5/8) \cdot 2^{N-1}$	$(5/8) \cdot 2^{N-1}$

(여기서, $D = \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1) / 2 \rfloor$)

표 3. 높이 N 값에 따른 신장율 계산 비교
Table. 3 A comparison of diameter calculation according to the value of height N

N	신장율 비교		개선효과 (B-A)
	제안된 방법 (A)	기존 방법[6] (B)	
3	2	4	2
4	5	8	3
5	10	16	6
6	20	32	12
7	40	64	24
8	80	128	48
9	160	256	96
10	320	512	192
15	26624	32768	6144
20	851968	1048576	196608

위의 세 보조정리들을 종합하면 본 논문에서 제안된 새로운 매핑함수 f에 의해 정의된 임베딩 적용시 피라미드 에지들에 대한 2-차원 메쉬에서의 신장율은 다음과 같은 정리 1로 요약할 수 있다.

[정리 1] 높이가 N인 주어진 피라미드 PN의 정방형 2-차원 메쉬 $2^N \times 2^N$ 에 대한 새로운 매핑 함수 f에 의해 정의된 새로운 임베딩에서의 신장율은 $\max\{2^{N-1} - 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1) / 2 \rfloor, 2^{N-3} + 2 \cdot \lfloor (3 \cdot 2^{N-1} + 1) / 2 \rfloor\}$ 이다. □

위 정리 1은 표 2 및 표 3에서 확인할 수 있는 바와 같이 $N \geq 5$ 인 경우에 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이라는 신장율을 갖게 됨을 의미하고 따라서 [6]에서 제안된 기존의 방법에 비해 $(3/8) \cdot 2^{N-1}$ 에 해당하는 개선효과가 있음을 확인할 수 있다.

그리고 위의 매핑 함수를 이용하여 주어진 피라미드의 각 정점들을 대응되는 2-차원 메쉬의 해당 정점들로 매핑시키는 알고리즘은 아래와 같이 적용할 수 있다.

```

procedure map-to-mesh(N,pl,px,py)
int N,pl,px,py;
{ /* 주어진 피라미드의 높이 N 및 정점 정보
(pl,px,py)를 인수로 받아서 2-차원 메쉬에서의
대응되는 정점의 (mx,my) 좌표값을 계산 */
  slx=2N-1-1;
  sly=2N-1-1;
  D=⌊(3*2N-1+1)/2⌋;
  if(pl==N-2) {
    mx=slx+x*2l+y*2l+(-1)x*D;
    my=sly-x*2l+y*2l+(-1)y*D;
  } else {
    mx=slx+x*2l+y*2l;
    my=sly-x*2l+y*2l;
  }
  return mx & my;
}
    
```

그림 3. 두 그래프의 대응되는 정점간 매핑 알고리즘
Fig. 3 An algorithm for mapping between the corresponding vertices in two graphs

N. 결론

본 논문에서는 다중 병렬처리시스템에서의 영상처리 및 그래프 문제 해결에 다양하게 응용됨에 따라 많은 관심을 받고 있는 상호연결망 그래프 중의 하나인 피라미드를 대상으로 2-차원 메쉬로의 임베딩 문제를 다루었다.

임베딩에 수반되는 성능 평가 요소 중 정점간 지연과 관련하여 중요한 의미를 갖는 신장율에 대한 기존의 연구 결과를 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 로 줄인 새로운 임베딩 기법을 제시하였다. 이러한 연구결과는 3-차원 메쉬 구조로 확장 적용 가능성을 시사하는 연구 결과로써 2-차원 또는 3-차원 메쉬 구조를 상호연결망으로 채택하고 있는 대규모 병렬처리시스템에서 수행되는 피라미드 기반의 자료구조 형태를 갖는 각종 영상처리 및 그래프 관련 알고리즘의 시뮬레이션 및 자원 할당 등의 분야에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," J. of Parallel and Distrib. Comput., Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," Computing Supplement, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," IEEE Trans. on Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.
- [4] F. T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes," Morgan Kaufmann Pub., CA., 1992.
- [5] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," SIAM J. on Comput., Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [6] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," Proc. of the IEEE, pp.982-995, 1988.
- [7] D. M. C. Ip, C. K. Y. Ng, L. K. L. Pun, M. Hamdi, and I. Ahmad, "Embedding Pyramids into 3D Meshes," Proc. of 1993 Int'l Conf. on Paral. and Distrib. Sys., pp.348-352, 1993.
- [8] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," Nordic J. of Computing, Vol.2, No.3, pp. 326-337, 1995.

산학과 공학박사

1985. 4~2000. 8 KT 선임연구원

2000. 9~현재 부산외국어대학교 컴퓨터전자공학과 전
임강사

※관심분야 : 상호연결망, 그래프이론, 병렬처리, 통신
망 보안

저 자 소 개



장정환(Jung-Hwan Chang)

1983. 2 경북대학교 전자공학과 공
학사

1985. 2 한국과학기술원(KAIST) 전
산학과 공학석사

1998. 8 한국과학기술원(KAIST) 전