
곡률을 갖는 산란체의 새로운 선조합 모델링 기법

심재륜*

A New Wiregrid Modeling Scheme for a Curvature Varying Surface

Jaeruen Shim*

이 논문은 2001년도 부산외국어대학교 학술연구조성비에 의해 연구되었음

요 약

곡률을 가진 산란체의 전자파 해석에 유용한 선조합 모델링 기법을 제안한다. 곡률을 가진 2차원 타원형 실린더를 기준으로 곡률 정보가 포함된 선전류에 의해 선조합 모델링한다. 본 논문에서 제안한 선조합 모델링 기법의 우수성은 도체 내부 전계의 크기로 확인하였고, 수치 해석 결과 기존의 동일 반지름에 의한 방법보다 본 방법은 선전류의 개수를 줄일 수 있을 뿐만 아니라 모멘트법 해의 정확성을 높일 수 있다.

ABSTRACT

A new wiregrid modeling scheme is proposed for a curvature varying scatterer. A 2-dimensional conducting elliptic cylinder is modelled by wires with the different size of radius considering the radius of curvature on the surface. The magnitude of the internal field in the conducting elliptic cylinder is used as an indicator to check the accuracy of solutions between two methods. Numerical results show that this new wiregrid model scheme can be reduced the number of wires and applied to enhance the accuracy of solutions for a curvature varying scatterer.

키워드

선조합 모델링, 모멘트법, 타원형 실린더, 곡률 반지름

1. 서론

모멘트법은 안테나와 산란 문제에 많이 이용되고 있다. 모멘트법을 산란체에 적용하기 위해서는 산란체를 선(wire)전류나 평판(plate)전류로 모델링하여야 한다[1, 2, 3]. 특히 선조합 모델링은 Same Surface Area Rule(SSAR)을 기초로 모델링되고 있다. SSAR는 Ludwig가 원형 도체 실린더를 대상으로 수치적으로 정리하였는데, 모멘트법을 위해 선조합 모델링할 때 SSAR를 따를 때 가장 정확한 해를 보인다는 것이다[4]. Paknys는 Ludwig의 연구에 보태어 원거리 전계(far field) 뿐만 아니라, 근거리 전계(near field)에서도 SSAR의 적용의 유효함을 보였고, 이의 증명은 도체 내부 전계의 크기가 작으면 작을수록 도체 외부 전계의 크기의 정확성이 보장됨을 이용하였다. 또한, 도체 내부 전계를 모멘트법 선조합 모델링의 지시기(indicator)로 제안하였다[5].

본 논문에서는 곡률을 가지는 산란체의 정확한 기하학적인 선조합 모델링을 위해서 산란체의 곡률 정보가 포함된 선전류를 발생시킨다. 물론 기존의 방식대로 동일 반지름을 가지는 선전류원으로도 곡률을 가진 산란체에 모멘트법의 적용이 가능하지만, 이럴 경우 실제 산란체의 정확한 모양을 모델링하기가 어려워진다. 모멘트법에서는 실제 산란체를 기하학적으로 가장 근사하게 묘사하여야 해의 정확성이 높아지기 때문에 실제 산란체 외형을 묘사하는 다양한 크기의 선전류원이 필요하다. 즉, 곡률 반지름이 작은 경우에는 작은 반지름의 선전류원을 이용하고, 곡률 반지름이 큰 경우에는 큰 반지름의 선전류원을 이용하는 것이 본 논문의 아이디어이다. 이를 통해 실제 산란체의 외형을 선조합 모델링할 때 피할 수 없는 기하학적 오차를 줄이자는 것이다.

본 논문에서는 타원형 도체 실린더를 기준으로 곡률을 가진 산란체의 선조합 모델링 기법을 제안한다. 이를 위해 우선 타원형 도체 실린더의 고유함수해를 제시하고, 제안하는 선조합 모델에 의한 모멘트법 해와 비교한다. 제안하는 선조합

모델의 우수성을 확인하기 위해 Paknys에 의해 제안된 도체 내부 전계의 크기를 기존의 동일 반지름의 선조합 모델에 의한 모멘트법 해와 비교한다.

II. 타원형 도체 실린더의 고유함수 해

타원형 실린더 좌표(elliptic cylinder coordinates) (u, v) 는 직각 좌표(Cartesian coordinates) (x, y) 에서 다음 식에 의해 변환된다[6].

$$x = \frac{1}{2} d \cosh u \cos v \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2} d \sinh u \sin v \quad (2)$$

여기서, d 는 타원형 실린더의 두 초점 사이의 거리이다. 또한, u 와 v 는 각각 타원형 실린더 좌표의 radial 좌표와 angular 좌표를 나타낸다. 타원형 실린더 좌표에서는 Mathieu 방정식으로 맥스웰 방정식을 변수 분리(separation of variables)할 수 있다. Mathieu 방정식의 해가 Mathieu 함수이다[7, 8].

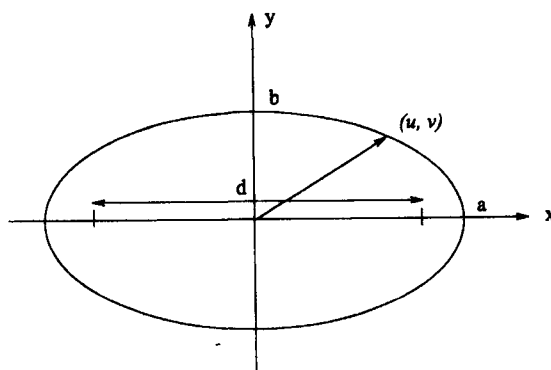


그림 1. 타원형 도체 실린더의 구조
Fig. 1 The geometry of a conducting elliptic cylinder

그림 1은 타원형 도체 실린더를 보여준다. 타

원형 도체 실린더의 장축(semi-major)과 단축(semi-minor)을 각각 a 와 b 로 나타내었다. 그림에서 보듯이 실린더 축이 z 축과 일치한다. 입사 평면파(incident plane wave)가 $+\hat{x}$ 축으로 진행하고, 입사 전계의 편향이 $+\hat{z}$ 방향을 가진다고 가정한다.

$$\vec{E}^i = \hat{z} e^{-jkx} \quad (3)$$

여기서, $e^{j\omega t}$ 의 시간 의존성(time dependence)을 가정하고 앞으로의 모든 전개에서 생략하기로 한다.

식 (3)과 같은 입사 평면파를 타원형 실린더 좌표(elliptic cylinder coordinates)로 변환하면 다음과 같다[9, 10].

$$\vec{E}^i = \hat{z} \left\{ \sum_{m=3}^{\infty} a_m^{inc} Re_m^{(1)}(c, \cosh u) Se_m(c, \cos v) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^{inc} Ro_m^{(1)}(c, \cosh u) So_m(c, \cos v) \right\} \quad (4)$$

여기서,

$$a_m^{inc} = \sqrt{8\pi} \frac{i^m}{N_m^{(e)}} Se_m(c, 1) \quad (5)$$

$$b_m^{inc} = \sqrt{8\pi} \frac{i^m}{N_m^{(o)}} So_m(c, 1) \quad (6)$$

$$c = 0.5kd \quad (7)$$

위 식에서 기호 e 와 o 는 Mathieu 함수의 偶數(even) 및 奇數(odd) 버전을 나타낸다. Se_m 과 So_m 은 각각 Mathieu 방정식의 偶數 및 奇數 angular 함수이고, $Re_m^{(j)}$ 과 $Ro_m^{(j)}$ 은 각각 Mathieu 방정식의 j 번째 偶數 및 奇數 radial 함수이다. Mathieu 방정식의 偶數 및 奇數 정규화 적분(normalization integrals) 형태는 각각 $N_m^{(e)}$ 와 $N_m^{(o)}$ 로 나타낸다.

타원형 도체 실린더에 입사되는 평면파의 산란파(scattered wave)는 Mathieu 함수의 무한합으로 표현 가능하다. Mathieu 함수에 대한 자세

한 수학적 전개는 본 연구의 범위에서 벗어나므로 입사 평면파에 의한 산란파의 최종결과식만 제시한다.

$$E_z^s = -\sqrt{8\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m [A_m Re_m^{(3)}(c, \cosh u) Se_m(c, \cos v) + B_m Ro_m^{(3)}(c, \cosh u) So_m(c, \cos v)] \quad (8)$$

여기서,

$$A_m = \frac{Se_m(c, 1)}{N_m^{(e)}} \frac{Re_m^{(1)}(c, \cosh u_1)}{Re_m^{(3)}(c, \cosh u_1)} \quad (9)$$

$$B_m = \frac{So_m(c, 1)}{N_m^{(o)}} \frac{Ro_m^{(1)}(c, \cosh u_1)}{Ro_m^{(3)}(c, \cosh u_1)} \quad (10)$$

식 (9)와 (10)의 u_1 은 타원형 도체 실린더의 경계면(boundary of the conducting ellipse)을 나타낸다.

III. 제안하는 선조합 모델링 기법

3.1 기존의 선조합 모델링

타원형 도체 실린더에 식 (3)과 같은 평면파가 입사된다고 가정한다. 우선, 타원형 도체 실린더를 N 개의 선(wire) 전류에 의해 선조합 모델링하고 이 선전류에 의해 산란파를 계산한다. 선전류의 반지름은 기존의 Same Surface Area Rule(SSAR)을 만족하도록 한다. 즉, 타원형 도체 실린더의 둘레 길이를 $2\pi N$ 으로 나눈 값을 선전류의 반지름으로 정한다.

선전류에 의한 산란파 계산을 소개하면, (x_n, y_n) 에 위치한 N 개의 선전류에 의한 (x_m, y_m) 점에서의 산란파는 다음과 같다.

$$E_z^s(x_m, y_m) = \sum_{n=1}^N E_n H_0^{(2)}(kr_{mn}) \quad (11)$$

여기서,

$$r_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \quad (12)$$

식 (11)에서 계수 E_n 은 타원형 도체 실린더의 경계조건에 의해 결정되는 값으로 다음에 의해 구한다.

$$e^{-ikx_m} + \sum_{n=1}^N E_n C_{mn} = 0, \quad m=1, \dots, N \quad (13)$$

여기서,

$$C_{mn} = \begin{cases} H_0^{(2)}(kr_{mn}), & m \neq n \\ H_0^{(2)}(kr)/J_0(kr), & m = n \end{cases} \quad (14)$$

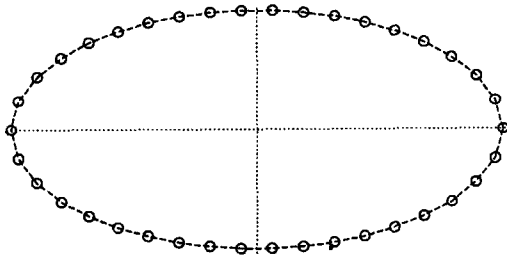


그림 2. SSAR을 만족하는 선조합 모델 결과
($a=1\lambda_0, b=0.5\lambda_0, r=0.0203\lambda_0, N=38$)
Fig. 2 Wiregrid model satisfying the SSAR.

그림 2는 $a=1\lambda_0$ 이고 $b=0.5\lambda_0$ 인 타원형 도체 실린더의 SSAR을 적용한 선조합 모델 결과를 보여준다. 타원형 도체 실린더의 둘레는 $4.84469\lambda_0$ 이고, 총 38개의 선전류원을 이용하였다. 이때 선전류원의 반지름은 $0.0203\lambda_0$ 이다.

3.2 곡률을 고려한 선조합 모델링

선조합 모델(wiregrid model)로 실제 산란체의 외형을 정확하게 모델링하면 할수록 정확한 해를 얻을 수 있다고 알려져 있다. 모멘트법에 의해 전자파 해석을 하기 위해서는 식 (11)의 계수 E_n 을 구하는 것이 우선되어야 한다. 지금까지

는 E_n 을 구하기 위해서는 동일 반지름의 선전류원을 이용하였다. 본 논문에서는 산란체 표면의 곡률 반지름(radius of curvature)을 고려한 선전류원을 이용하여 모멘트법의 결과를 보다 정확하게 하는 선조합 모델을 제안한다. 즉, 선전류원의 반지름은 산란체 표면의 곡률 반지름이 크면 큰 반지름의 선전류원을 이용하고, 산란체 표면의 반지름이 작으면 작은 반지름의 선전류원을 이용하는 것이다. 이와 같은 방법으로 산란체의 외형을 보다 정확하게 모델링할 수 있다. 식 (15)는 산란체 표면의 곡률 반지름을 고려한 선전류원의 반지름의 크기를 결정하는 예이다.

$$r = r_\infty - (r_\infty - r_0) e^{-ax^{-1}} \quad (15)$$

여기서,

$$r_\infty = 0.033\lambda_0, \quad r_0 = 0.004\lambda_0, \\ x^{-1}(v) = \frac{(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^{3/2}}{ab} \quad (16)$$

r_∞ 와 r_0 는 각각 산란체 표면의 곡률 반지름이 ∞ 와 0일 때의 선전류원의 반지름이다. x^{-1} 는 산란체 표면의 곡률 반지름이고, a 는 r_0 에서 r_∞ 까지의 점근 속도(speed of convergence)이다. 평판(plate)의 경우에 해당하는 r_∞ 를 $0.033\lambda_0$ 으로 정한 이유는 선전류원끼리의 간격이 최소 $0.207\lambda_0 (=2\pi r_\infty)$ 이 유지되도록 하기 위한 것이다. 또한, r_0 를 $0.004\lambda_0$ 으로 정해 곡률 반지름이 0일 경우에도 선전류원끼리의 간격이 최소 $0.025\lambda_0 (=2\pi r_0)$ 이 유지되도록 한다. 선전류원의 최대반지름과 최소반지름의 비는 8.25가 된다.

그림 3은 식 (15)에 의한 산란체 표면의 곡률 반지름의 변화에 따른 선전류원의 반지름 크기의 변화를 보여준다. 그림 3에서 보듯이 a 의 변화에 의해 r_0 에서 r_∞ 까지의 점근 속도를 조

절할 수 있다.

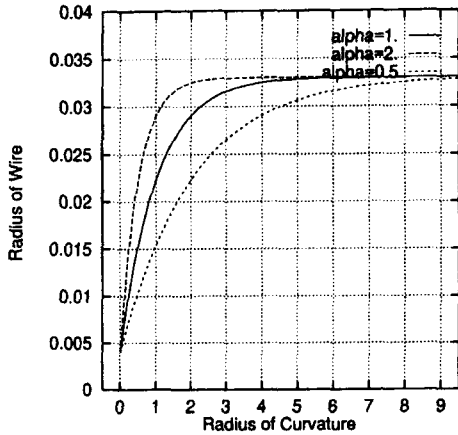


그림 3. 곡률 반지름의 변화에 따른 선전류원의 반지름 크기
 Fig. 3 The radius of wire by the change of a radius of curvature

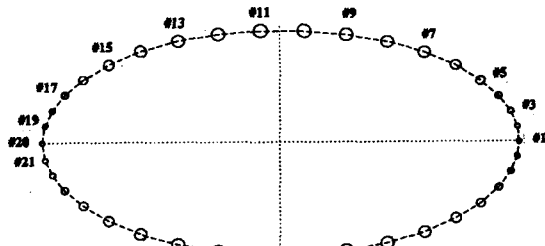


그림 4. 곡률 반지름을 고려한 새로운 선조합 모델 결과 ($a=1\lambda_0, b=0.5\lambda_0, N=38$)
 Fig. 4 The new wiregrid model considered the radius of curvature.

그림 4는 타원형 도체 실린더의 곡률 반지름을 고려한 선조합 모델링 결과이다. 총 38개의 선전류원을 이용하였고, SSAR(Same Surface Area Rule)이 만족된다. 그림 2는 기존의 선조합 모델로 38개의 선전류원으로 SSAR을 만족하는 모델링 결과이다.

IV. 수치 결과

그림 5는 타원형 도체 실린더에 평면파의 입사에 의한 산란파(scattered field)의 정규화된 근거리 전계 패턴(normalized near field patterns)으로 선조합 모델에 의한 결과와 고유함수해의 비교이다. 그림 5에서 보듯이 고유함수해와 두 가지 방법에 의한 선조합 모델에 의한 결과가 매우 잘 일치한다. 두 가지 선조합은 모두 38개의 선전류원을 이용하였다.

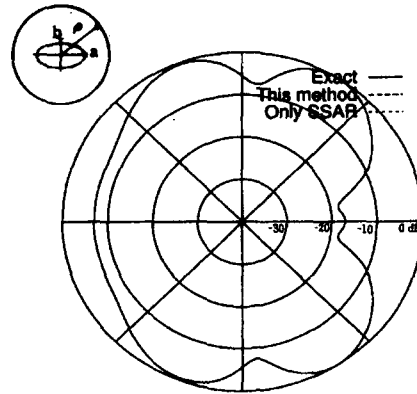
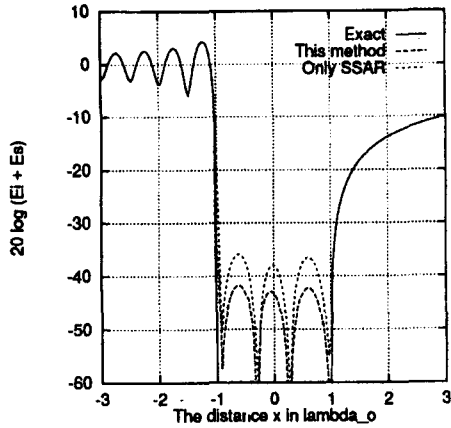


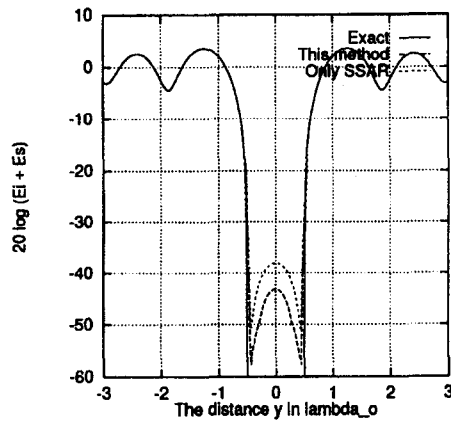
그림 5. 정규화된 근거리 전계 패턴 ($\rho=2\lambda_0, a=1\lambda_0, b=0.5\lambda_0$)
 Fig. 5 Normalized Near Field Patterns

그림 6은 타원형 도체 실린더의 x축과 y축을 따라 계산된 전계 강도를 보여준다. 타원형 도체 실린더 외부 전계는 고유함수해(Exact)와 곡률을 고려한 선조합 모델(This Method)에 의한 결과뿐만 아니라, 기존의 선조합 모델(Only SSAR) 결과 모두 일치한다. 다만 도체 내부 전계의 크기가 다르다.

Paknys[5]에 의하면 도체 내부 전계의 크기가 작으면 작을수록 도체 외부 전계의 정확성을 높여준다. 그림에서 보듯이 도체 내부 전계의 크기가 작은 곡률을 고려한 선조합 모델(This Method)이 기존의 선조합 모델 보다 우수한 결과를 보장한다고 할 수 있다. 두 가지 선조합은 모두 38개의 선전류원을 이용하였다.



(a) x-축을 따라 계산



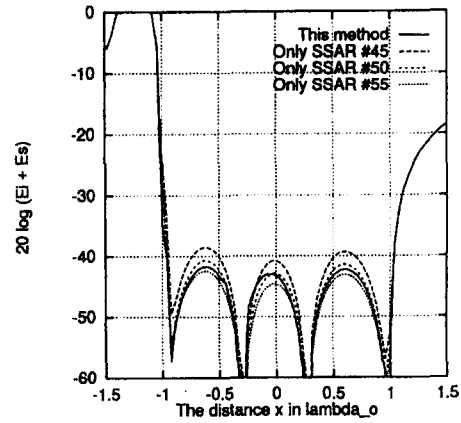
(b) y-축을 따라 계산

그림 6. E field의 크기 ($a=1\lambda_o, b=0.5\lambda_o$)

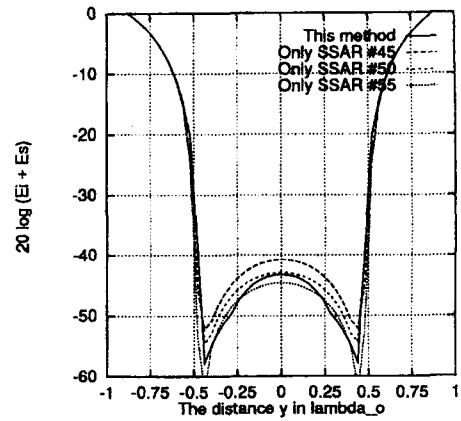
Fig. 6 The magnitude of E field.

그림 7은 도체 내부 전계의 크기를 비교한 결과이다. 즉, 곡률을 고려한 38개의 반지름 크기가 각기 다른 선전류원에 의한 선조합 모델(This Method) 결과와 각각 45개, 50개, 55개의 동일 크기의 반지름을 가지는 선전류원에 의한 선조합 모델 결과를 비교하였다. 그림 7에서 보듯이 곡률을 고려한 38개의 선전류원에 의한 선조합 모델(This Method) 결과는 동일 반지름을

갖는 50개의 선전류원 선조합 결과와 도체 내부 전계의 크기가 비슷하다. 이는 도체 외부 전계의 정확성의 척도가 된다.



(a) x-축을 따라 계산



(b) y-축을 따라 계산

그림 7. E field의 크기 ($a=1\lambda_o, b=0.5\lambda_o$)

Fig. 7 The magnitude of E field.

즉, 선조합에 있어서 곡률을 고려하면 38개의 선전류원으로도 기존의 동일 반지름에 의한 50개의 선전류원에 의한 만큼의 정확성을 보장한다는 것이다.

V. 결론

본 논문에서는 산란체 표면의 곡률 반지름이 고려된 선전류원에 의한 새로운 선조합 모델 기법을 제안하였다. 기존의 선조합 모델 기법은 동일 크기의 반지름을 가지는 선전류원으로 산란체의 외형을 모델링하였다. 이러한 기법은 산란체 외형을 기하학적으로 정확하게 묘사할 수 없어 기하학적인 오차가 발생한다. 본 논문에서는 이러한 기하학적 오차를 줄이기 위해 산란체 표면의 곡률 반지름을 고려하여 산란체 외형을 가능한 한 정확하게 모델링하였다. 타원형 도체 실린더를 대상으로 수치해석한 결과 기존의 선조합 모델 기법에 의한 해 보다 본 연구에서 제안하는 기법은 근거리 전계의 정확성을 한층 더 보장할 수 있음을 확인하였다. 즉, 타원형 도체 실린더의 장축이 $1\lambda_0$ ($a=1\lambda_0$)이고, 단축이 $0.5\lambda_0$ ($b=0.5\lambda_0$)의 경우, 곡률 반지름을 고려한 38개의 선전류원에 의한 선조합 모델의 결과는 동일 반지름을 가지는 50개의 선전류원으로 구한 결과와 비슷한 정확성을 보장한다. 본 결과는 곡률을 가진 산란체의 전자파 해석에 유용할 것으로 생각된다.

참고 문헌

[1] K. S. H. Lee, L. Marin, and J. P. Castillo, "Limitations of Wire-Grid Modeling of a Closed Surface," *IEEE Trans. on EMC*, vol. 18, no. 3, pp. 123-129, August 1976.

[2] E. H. Newman and D. M. Pozar, "Electromagnetic Modeling of Composite Wire and Surface Geometries," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 26, no. 6, pp. 784-789, Nov. 1978.

[3] J. T. Mayhan, "Characteristics Modes and Wire Grid Modeling," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 38, no. 4, pp. 457-469, April 1990.

[4] A. C. Ludwig, "Wire Grid Modeling of Surfaces," *IEEE Trans. on Antennas and*

Propagation, vol. 35, no. 9, pp. 1045-1048, Sept. 1987.

[5] R. J. Paknys, "The Near Field of a Wire Grid Model," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 7, pp. 994-999, July 1991.

[6] P. L. E. Uslenghi and N. R. Zitran, "The Elliptic Cylinder," in *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, J. J. Bowman, T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi, Eds. Amsterdam, North Holland, The Netherlands, 1969, pp. 416-471.

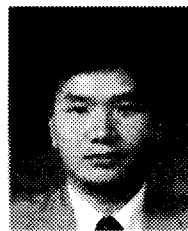
[7] R. Holland and V. P. Cable, "Mathieu Functions and Their Applications to Scattering by a Coated Strip," *IEEE Trans. on EMC*, vol. 34, no. 1, pp. 9-16, Feb. 1992.

[8] D. B. Hodge, "The Calculation of the Eigenvalues and Eigenfunctions of Mathieu's Equation," Ohio State University, ElectroScience Lab., Rep. 2902-4, June 1971.

[9] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

[10] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vols. I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.

심재륜(Jae-ruen Shim)



1990년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학사, 1992년 포항공과대학교 전자전기공학과 공학석사, 1999년 8월 포항공과대학교 전자전기공학과 공학박사

1992년 7월~1995년 6월 육군사관학교 전자공학과 전임강사, 1999년 8월~2000년 2월 포항공과대학교 전과 기술연구실 박사후연구원, 2000년 3월~현재 부산외국어대학교 컴퓨터전자공학부 전임강사

※ 관심분야 : 안테나 설계, 전자장 해석, RF 시스템