

# 노즐 경사각을 고려한 이동질량을 가진 유체이송 외팔 파이프의 동특성 해석

윤한익\* · 손인수\*\* · 김현수\*\* · 조정래\*\*\*

\*동의대학교 기계산업시스템공학부, \*\*동의대학교 대학원 기계공학과, \*\*\*경북직업전문학교 자동차과

## Dynamic Characteristics of Cantilever Pipe Conveying Fluid with Moving Mass Considering Nozzle Angle

HAN-IK YOON\*, IN-SOO SON\*\*, HYUN-SOO KIM\*\* AND JEONG-RAE CHO\*\*\*

\*Faculty of Mechanical and Industrial System Engineering, Dong-eui University, Busan, Korea

\*\*Dept. of Mechanical Engineering, Graduate School of Dong-eui University, Busan, Korea

\*\*\*Kyungbuk Vocational Training Institute, Daegu, Korea

**KEY WORDS:** Cantilever Pipe Conveying Fluid 유체이송 외팔관, Dynamic Characteristics 동적특성, Moving Mass 이동질량, Natural Frequency 고유 진동수, Nozzle Angle 노즐 경사각.

**ABSTRACT:** The vibrational system in this study consists of a cantilever pipe conveying fluid, the moving mass upon it, and an attached tip mass. The equation of motion is derived by using the Lagrange equation. The influences of the velocity and the velocities of fluid flow in the pipe have been studied on the dynamic behavior of a cantilever pipe using a numerical method. While the moving mass moves upon the cantilever pipe, the velocity of fluid flow and the nozzle angle increase; as a result, the tip displacement of the cantilever pipe, conveying fluid, is decreased. After the moving mass passes over the cantilever pipe, the tip displacement of the pipe is influenced by the potential energy of the cantilever pipe and the deflection of the pipe; this effect is the result of the moving mass and gravity. As the velocity of fluid flow and nozzle angle increases, the natural frequency of the system is decreased at the second mode and third mode, but it is increased at the first mode. As the moving mass increases, the natural frequency of the system is decreased at all modes.

### 1. 서 론

이동하중이나 이동질량에 의해 영향을 받는 보의 동적응답은 기차의 레일, 교량, 그리고 기계공정 등의 설계와 관계되어 광범위하게 연구되어 왔다. 또, 유체이송을 갖는 파이프는 고온의 운반물로 인하여 파이프에 발생하는 열을 파이프 속을 흐르는 유체가 냉각시키는 기계장치에서 발견할 수 있다. 파이프 속을 흐르는 유체에 의하여 파이프에 진동이 발생하며, 유체의 속도가 어떤 임계값에 도달하면 그 진동이 불안정하여 파이프가 좌굴되기도 한다. 점성이 작은 유체의 분사력은 파이프의 끝단에 작용하는 집중종동력으로 되며, 점성이 큰 유체는 파이프의 내면에 작용하는 등분포 접선종동력을 일으킨다. 이러한 종동력들은 비보존력으로써 탄성계의 진동 및 안정성 해석에 중요한 인자가 된다.

유체유동에 의한 송수관의 진동과 안정성에 대한 연구는 아라비아의 횡단 송유관에서 관찰된 진동 현상을 규명하려는 시도에서 비롯된다(Ashley et al. 1950). 이후 2 자유도를 갖는 분절된 송수관 (articulated pipe)의 동역학에 대한 이론 및 실험적

연구를 통해 송수관이 양단 단순 지지된 경우는 유동유체의 힘은 보존적이고, 계는 어떤 임계유속 이상에서 발산형 불안정을 일으키지만, 유체가 나오는 유출끝단이 자유인 경우는 유동유체의 힘이 비보존적이며, 계는 어떤 임계유속 이상에서 플러터(flutter) 불안정을 일으킨다는 것을 제시하였다(Benjamin, 1961; Benjamin, 1961). Sugiyama 등 (Sugiyama et al, 1988)은 집중질량을 갖고 탄성 스프링에 의해 지지된 외팔 수평 송수관의 내부에 유체가 흐르는 경우 스프링과 집중질량의 복합효과가 계의 동역학적 안정성에 어떤 영향을 미치는가를 실험과 수치해석적 방법으로 연구하였고, Wilson(Wilson, 1973)은 집중질량으로 된 이동하중이 아닌 등분포 질량으로 된 이동하중에 대한 보의 응답을 연구하였고, 이동질량에 의한 보 형태 구조물의 동특성에 대한 많은 연구 결과가 발표되었다(Stanisic, 1985; Lee, 1996; 윤한익, 2001).

이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 외팔 파이프의 끝단에 집중 종동력이 작용하고 동시에 파이프 위를 질량이 일정 속도로 이동하는 계를 고려하였다. 이러한 계는 선박 등에 짐을 싣거나 산업현장에서 제품의 다음 공정으로의 이동에 있어서 그 이동질량에 의하여 운반대가 가열되는 것을 막기 위하여 내부에 유체가 흐르는 냉각장치를

제1저자 윤한익 연락처: 부산광역시 부산진구 가야3동 산 24  
051-890-1645 hiyoon@dongeui.ac.kr

과파한 기계장치에서 발견할 수 있다. 계의 운동방정식은 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치해석 하였다. 외팔 파이프의 끝단에 작용하는 집중 종동력의 크기는 이송유체 속도의 제곱에 비례하므로 이와 연성되는 파이프 속을 흐르는 유체의 속도 및 이동질량은 외팔 파이프의 동적특성에 관계되고 있다. 따라서 본 연구를 통하여 계를 구성하고 있는 이송유체, 이동질량의 크기 및 속도, 그리고 이송유체에 의한 종동력의 크기에 관계되는 노즐 각이 계의 동특성에 미치는 영향을 제시하였다. 또한, 이동질량이 파이프 위를 떠난 후에 파이프의 동적특성에 대해서도 고찰하였다.

## 2. 이론해석

내부에 유체가 흐르는 외팔 파이프 위를 집중질량이 일정속도로 이동하는 탄성계의 개략도는 Fig. 1에 보인 바와 같다. 여기서  $m_1$ 은 이동질량,  $v$ 는 이동질량의 속도, 그리고  $u$ 는 이송유체의 속도이며  $F$ 는 이송유체의 분사력이다. 또,  $m_p$ 는 파이프의 노즐 등에 해당하는 끝단질량이고,  $l$ 은 외팔 파이프의 전체 길이를 나타내고 있다. 이동질량의 속도와 이동질량의 크기, 그리고 이송유체의 속도변화가 외팔 파이프의 동특성에 미치는 영향을 해석하기 위하여 Lagrange 방정식으로 계의 운동방정식을 유도한다.

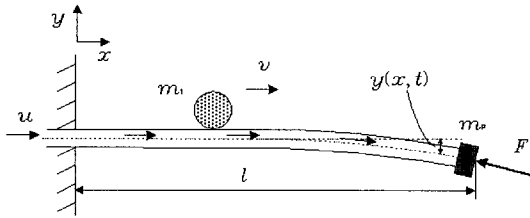


Fig. 1 A cantilever pipe conveying fluid with moving mass

### 2.1 외팔파이프의 에너지식

외팔 파이프의 횡변위  $y(x, t)$ 를 유체가 없는 경우, 경계조건을 만족시키는 외팔 파이프의 자유 진동에 대한 고유함수  $\phi_i(x)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad (1)$$

여기서,  $q_i(t)$ 는 일반화 좌표,  $\mu$ 는 모드의 수를 나타낸다. 또,  $\phi_i(x)$ 는 고유함수로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) \\ &\quad - \alpha_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\alpha_i$ 는 외팔보의 자유진동의  $i$ 번째 고유치이며 아래 식으로 주어진다.

$$\alpha_i = \frac{\cos(\lambda_i l) + \cosh(\lambda_i l)}{\sin(\lambda_i l) + \sinh(\lambda_i l)} \quad (3)$$

또,  $\lambda_i$ 는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\frac{1 + \cos(\lambda_i l) \cosh(\lambda_i l)}{\sin(\lambda_i l) \cosh(\lambda_i l) - \cos(\lambda_i l) \sinh(\lambda_i l)} = \frac{m_p}{m l} (\lambda_i l) \quad (4)$$

여기서,  $m$ 은 외팔 파이프의 단위 길이당 질량이다. 그러므로 파이프의 운동에너지는 다음과 같다 (Meirovitch, 1986).

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} \int (\dot{y})^2 dm + \frac{1}{2} m_p \dot{y}^2(l, t) \\ &= \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2(t) \int_0^l \phi_i^2(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} m_p \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2(t) \phi_i^2(l) \end{aligned} \quad (5)$$

이고,  $(\cdot)$ 는 시간  $t$ 에 대한 미분을 나타낸다. 또, 외팔 파이프의 포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dx - m_p g y(l, t) - mg \int_0^l y dx \quad (6)$$

여기서  $EI$ 는 외팔 파이프의 굽힘강성계수이며,  $(')$ 은  $x$ 에 대한 미분을 나타낸다.

### 2.2 이송유체의 에너지식

외팔 파이프에 대한 유체의 상대속도가  $u$ 이므로, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 유체의 절대속도의 수직성분, 즉  $y$ 방향성분은  $\dot{y} + u y'$ 이고,  $x$ 축에 평행한 수평성분은  $u(1 - \frac{1}{2} y'^2)$ 이다. 따라서 유체의 합을 구하면  $\sqrt{u^2 + 2u \dot{y} y' + \dot{y}^2 + \frac{1}{4} u^2 y'^4}$ 이 된다. 또, 미소항의 고차항  $y'^4$ 을 생략하면 이송유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^l m_f (u^2 + 2u \dot{y}_m y'_m + \dot{y}_m^2) dx \quad (7)$$

유량과 중력을 고려하면 유체의 포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$V_f = - \int_0^l (m_f g y_{m_f}) dx \quad (8)$$

여기서,  $m_f$ 는 유체의 단위 길이당 질량이고,  $y_{m_f}$ 는 다음과 같다.

$$y_{m_f} = y(x_f, t)|_{x_f = ut} \quad (9)$$

### 2.3 이송유체의 분사력에 의한 일량

점성이 매우 작은 유체의 분사력은 파이프의 끝단에 작용하는 집중종동력이 되며, 유체의 분사력에 의한 일은 노즐에서 분출한 분류가 고체 평판에 충돌할 때 고체 평판에 유체가 미치는 힘으로 표현할 수 있다. 따라서 파이프의 끝단질량에 해당하는 노즐부의 경사각은 Fig. 2와 같이 표현할 수 있다.

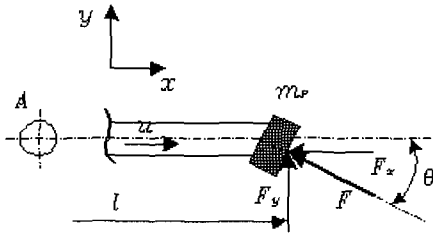


Fig. 2 Works of conveying fluid by jet force

Fig. 2에서 파이프의 끝단에 작용하는 힘과 분류방향 힘의 성분  $F_x$ , 그리고 분류와 수직인 방향의 힘의 성분  $F_y$ 를 쉽게 구할 수 있으며, 끝단에 작용하는 힘  $F$ 는 다음과 같다.

$$F = \rho A_z u_z^2 \cos \theta \quad (10)$$

여기서  $\theta$ 는 노즐의 경사각,  $A_z$ 는 유체가 통과하는 노즐의 단면적, 그리고  $\rho$ 는 유체의 밀도를 나타낸다. 또,  $u_z$ 는 노즐 부에서의 유체속도를 나타내고 있으며 평균유속  $u$ 와의 조합으로 조절할 수 있다(이우식 등, 1991). 이송유체의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은  $x = l$ 인 점에 작용하는 집중 접선종동력이 된다. 이러한 접선 종동력에 의한 일은 수평성분, 즉 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분인 수직성분에 의한 일로 구분된다. 따라서 집중 접선종동력의 보존력 성분에 의한 일은

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho A_z u_z^2 \cos \theta y'^2) dx \quad (11)$$

이고, 집중 접선종동력의 수직성분인 비보존력 성분에 의한 일은 다음과 같다.

$$W_N = -\rho A_z u_z^2 \cos \theta y'(l, t) y(l, t) \quad (12)$$

## 2.4 이동질량의 에너지 식

이동질량의 수평속도가  $v$ 이면 그 수평변위는

$$x_1 = f_1(t) = \int_0^t v dt \quad (13)$$

이고, 수직변위를  $y_{m_1}$  이라고 하면 이동질량  $m_1$ 은 집중질량 이므로 그 운동에너지와 포텐셜에너지는 각각 다음과 같다.

$$T_m = \frac{1}{2} m_1 (\dot{y}_{m_1}^2 + v^2) \quad (14)$$

$$V_m = -m_1 g y_{m_1} \quad (15)$$

여기서  $g$ 는 중력가속도,  $y_{m_1}$ 은 이동 질량  $m_1$ 의 연직방향의 변위인 동시에 파이프의 횡변위이다. 즉, 이동질량은 파이프와 분리되지 않고 접촉된 상태로 이동한다고 본다. 따라서

이동질량의 연직방향 변위와 속도는 다음과 같다.

$$y_{m_1} = y(x_1, t) \Big|_{x_1 = f_1(t)} \quad (16)$$

$$\dot{y}_{m_1} = \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Big|_{x_1 = f_1(t)} \quad (17)$$

이를 고려하고, 식 (1)을 식 (17)에 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{y}_{m_1} &= v \sum_{i=1}^{\mu} q_i(t) \phi_i' [f_1(t)] \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu} \dot{q}_i(t) \phi_i [f_1(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 식 (18)을 식 (14)에 대입하여 정리하면 이동질량의 운동 에너지는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2} m_1 \left\{ v^2 \sum_{i=1}^{\mu} q_i^2(t) \phi_i'^2 [f_1(t)] \right. \\ &+ 2v \sum_{i=1}^{\mu} q_i(t) \dot{q}_i(t) \phi_i [f_1(t)] \phi_i' [f_1(t)] \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{\mu} \dot{q}_i^2(t) \phi_i^2 [f_1(t)] \right\} + \frac{1}{2} v^2 m_1 \end{aligned} \quad (19)$$

## 2.5 계의 운동방정식

계의 운동방정식을 유도하기 위하여 앞에서 구한 일과 에너지 식을 다음의 Lagrange 방정식에 대입하여 정리한다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (20)$$

여기서  $L$ 은 Lagrangian으로서 다음과 같다.

$$L = (T_p + T_f + T_m) - (V_p + V_f + V_m) + W_c + W_N \quad (21)$$

따라서 계의 운동방정식은  $i = 1$ 부터  $\mu$  항까지의 합으로 표현되며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ m \int_0^l \phi_i^2(x) dx + m_p \phi_i^2(l) \right. \\ &+ m_f \int_0^l \phi_i^2(x_f) dx + m_1 \phi_i^2(x_1) \left. \right\} \ddot{q}_i(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ m_1 \frac{d}{dt} [\phi_i^2(x_1)] + m_f \int_0^l \frac{d}{dt} [\phi_i^2(x_f)] dx \right\} \dot{q}_i(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu} \left[ EI \int_0^l (\phi_i'(x))^2 dx - \rho A_z u_z^2 \cos \theta \int_0^l (\phi_i'(x))^2 dx \right. \\ &+ 2\rho A_z u_z^2 \cos \theta \phi_i(l) \phi_i(l) + v m_1 \frac{d}{dt} (\phi_i(x_1)) \phi_i(x_1) \\ &- m_1 v^2 \phi_i'^2(x_1) + v m_1 \frac{d}{dt} (\phi_i(x_1)) \phi_i'(x_1) \\ &+ u m_f \int_0^l \left\{ \frac{d}{dt} (\phi_i(x_f)) \phi_i(x_f) + \frac{d}{dt} (\phi_i(x_1)) \right. \\ &\left. \phi_i'(x_1) \right\} dx \Big] q_i(t) - \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ (m + m_f) g \int_1^l \phi_i(x) dx \right. \\ &+ m_p g \phi_i(l) + m_1 g \phi_i(x_1) \left. \right\} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 무차원 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \bar{m}_b = \frac{m_b}{Ml}, \\ M_1 &= \frac{m_1}{Ml}, \quad U = u_2 l \sqrt{\frac{\rho A_z}{EI}}, \quad d = \frac{q}{l}, \\ \beta &= \frac{m_1 l}{\sqrt{MEI}} \bar{v}, \quad \gamma = \frac{m_1 l^3}{EI} \bar{v}^2, \quad M = \frac{m_f}{m}, \\ M^* &= \frac{(m+m_f)gl^3}{EI}, \quad m_b^* = \frac{m_b gl^2}{EI}, \quad m_1^* = \frac{m_1 gl^2}{EI} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $\bar{v}$ 는 무차원화를 위한 매개변수로서  $\frac{v}{l}$ 이다. 식 (23)의 무차원 변수를 이용하여 식 (22)의 운동방정식을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 \phi_i^2(\xi) d\xi + M \int_0^1 \phi_i^2(\bar{x}_f) d\xi + \bar{m}_b \phi_i^2(1) \right. \\ &+ \bar{m}_1 \phi_i^2(\bar{x}_1) \} \ddot{d}_i(\tau) + \sum_{i=1}^n \left\{ M \int_0^1 \frac{d}{d\tau} [\phi_i^2(\bar{x}_f)] \right. \\ &+ \bar{m}_1 \frac{d}{d\tau} [\phi_i^2(\bar{x}_1)] \} \dot{d}_i(\tau) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 (\phi_i''(\xi))^2 d\xi - U^2 \cos \theta \int_0^1 (\phi_i'(\xi))^2 d\xi \right. \\ &+ 2U^2 \cos \theta \phi_i'(1) \phi_i(1) + \beta \frac{d}{d\tau} [\phi_i(\bar{x}_1)] \phi_i(\bar{x}_1) \\ &- \gamma \phi_i^2(\bar{x}_1) + \beta \frac{d}{d\tau} [\phi_i(\bar{x}_1)] \phi_i(\bar{x}_1) \\ &+ \sqrt{MU} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} [\phi_i(\bar{x}_f)] \phi_i(\bar{x}_f) d\xi + \sqrt{MU} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} [\phi_i(\bar{x}_f)] \\ &\phi_i(\bar{x}_f) d\xi \} \dot{d}_i(\tau) - \sum_{i=1}^n \left\{ (M^*) \int_0^1 \phi_i(\xi) d\xi + m_b^* \phi_i(1) \right. \\ &+ m_1^* \phi_i(\bar{x}_1) \} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

여기서  $\bar{x}_1 = \bar{v} l^2 \sqrt{\frac{M}{EI}} \tau$ ,  $\bar{x}_f = u l \sqrt{\frac{M}{EI}} \tau$ , 그리고  $(\cdot)$ 는 무차원화된 시간  $\tau$ 에 대한 미분을 나타낸다.

### 2.6 계의 고유치 해석

식 (24)를 자유진동해석을 위하여 간단히 행렬 형태의 식으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} = \{0\} \quad (25)$$

식 (25)는 고유치 문제를 해결하기 위하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\{\dot{\eta}\} = M^* \{\eta\} \quad (26)$$

여기서 각 항은 각각 다음과 같다.

$$M^* = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\{\eta\} = \begin{Bmatrix} \dot{d} \\ d \end{Bmatrix} \quad (28)$$

여기서, I는 단위행렬을 의미하며, 복소모드 해석을 위해 식 (28)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\eta = e^{\lambda \tau} \theta \quad (29)$$

여기서  $\lambda$ 는 복소수 값의 고유치이고,  $\theta$ 는 모드형상을 나타내는 행렬이다. 식 (26)~(29)를 이용하여 구해진 고유치는 복소수 값을 갖는데 이 값으로부터 무차원 고유진동수를 구할 수 있다.

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

이 연구에서는 이론해석에서 유도된 운동방정식을 바탕으로 계의 동특성을 지배하는 이송유체의 속도, 이동질량의 크기 및 속도들에 대하여 외팔 파이프의 횡진동을 10차 모드까지 고려하여 ( $\mu = 10$ ) 그 각각의 영향을 수치해석 하여 비교, 고찰하였다. 해석 프로그램은 Matlab(ver 6.1)을 사용하였으며, 4차의 Runge-Kutta법으로 해석하였다.

Fig. 3은 무차원 이동질량의 크기가 1, 이동질량의 속도가 0.2 m/s 일 때 유속의 변화에 따른 외팔 파이프의 끝단 횡변위를 도시하고 있다. 전반적으로 이동질량이 파이프 위를 통과하는 동안의 진폭과 파이프의 처짐은 이송유체의 속도가 빠를수록 작아지는 것을 알 수 있다. 이것은 임계유속에 도달하기전의 현상이며 이 현상은 유체의 흐름으로 파이프의 진동을 억제할 수 있다는 실험을 통한 연구결과 (Sugiyama et al. 1988)와 동일한 경향을 보여준다. 이동질량이 파이프 위를 통과한 후의 파이프 진폭을 살펴보면 이동질량이 파이프 위를 떠나면서 파이프 처짐에 의한 탄성에너지의 증가를 동반하게 되며, 이 처짐에 의한 탄성에너지의 증가와 외팔 파이프 자체의 탄성에너지 증감시기와 서로 관계하면서 이동질량이 파이프 위를 떠난 후의 파이프 진폭을 결정한다. Fig. 3의 무차원 유속이 0.5 일 때와 1.5 일 때를 비교하면 이동질량이 파이프 위를 통과하고 있는 동안은 유속이 0.5 인 경우가 1.5 인 경우에 비해 진폭이 약 3 배정도 크고, 이동질량이 파이프 위를 떠난 후의 파이프 진폭은 약 4 배정도 큰 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 이동질량의 속도가 0.2 m/s, 무차원 이송유체의 속도가 1 일 때 이동질량의 크기에 따른 외팔 파이프의 끝단 횡변위를 보여주고 있다. 이동질량 크기의 증가는 이동질량이 파이프 위를 이동하는 동안의 처짐을 증가시킨다. 하지만 이동질량이 파이프를 통과한 후의 파이프 진폭을 살펴보면 무차원 이동질량의 크기가 1 일 때가 2 일 때에 비해 더 큰 진폭을 보이고 있다. 이는 이동질량이 파이프 위를 떠나는 순간에 질량이 2 일 때는 외팔 파이프 탄성에너지의 감소가 시작되는 시점이고, 질량이 1 일 때는 파이프 탄성에너지가 증가하고 있는 시점이기 때문이다. 이동질량이 파이프를 통과한 후의 파이프 끝단

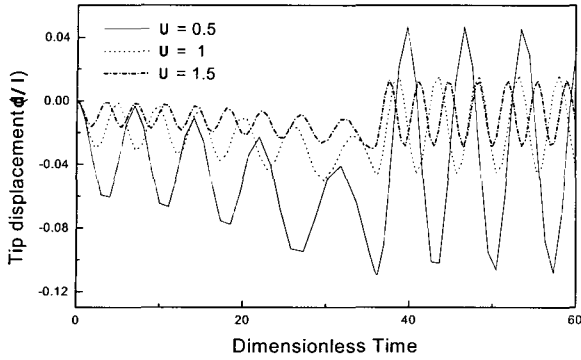


Fig. 3 Tip displacement of cantilever pipe due to variation of fluid velocity

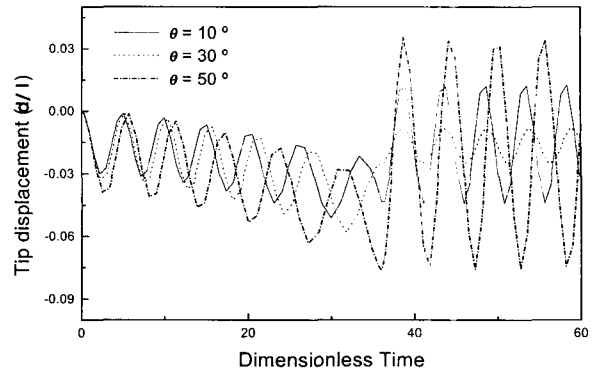


Fig. 6 Tip displacement of cantilever pipe due to variation of nozzle angle

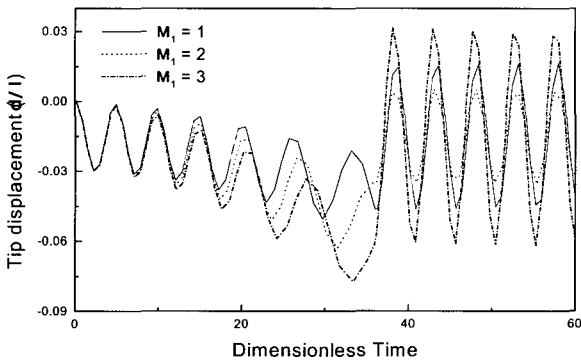


Fig. 4 Tip displacement of cantilever pipe due to moving mass

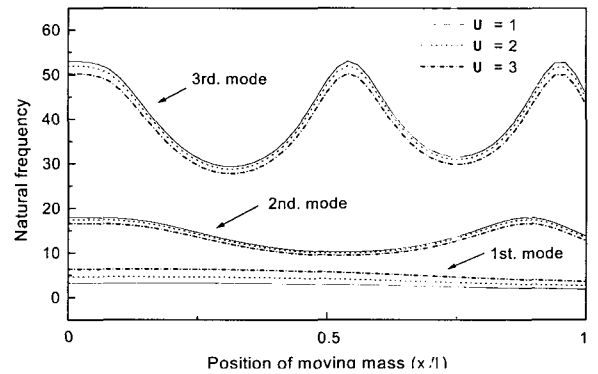


Fig. 7 Natural frequency of cantilever pipe due to variation of fluid velocity

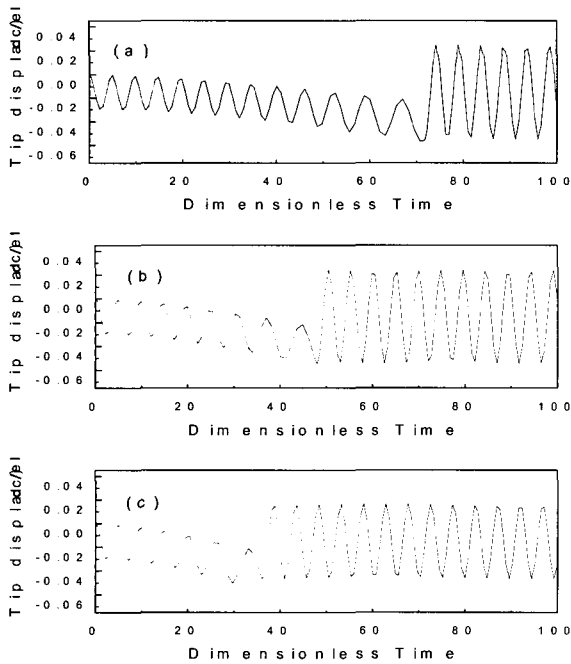


Fig. 5 Tip displacement of cantilever pipe due to variation of velocity of moving mass;

(a)  $v = 0.1$  m/s, (b)  $v = 0.15$  m/s, (c)  $v = 0.2$  m/s

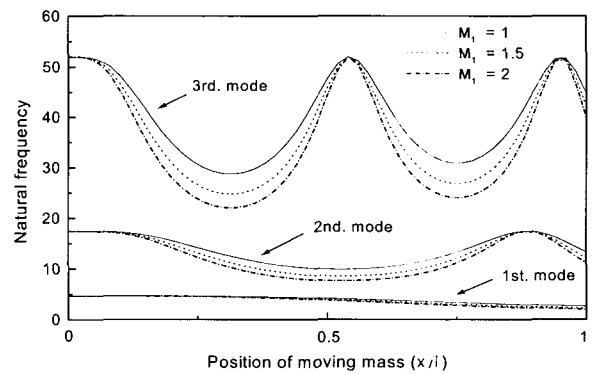


Fig. 8 Natural frequency of cantilever pipe due to moving mass

변위는 이동질량과 중력효과에 의한 파이프 처짐에도 영향을 받지만 특히, 외팔 파이프 자체의 탄성에너지 증감시기와 서로 관계되어 진폭이 결정되어진다.

Fig. 5는 무차원 이동질량의 크기가 1, 무차원 유속이 1 일 때 이동질량의 속도에 따른 파이프의 끝단 횡변위를 표현하고 있다. 이동질량의 속도와 시간 사이에  $l = vt$ 의 관계가 성립하므로, 이동질량의 속도는 이동질량이 파이프를 통과하는 시간을 결정한다. Fig. 5에서 볼 수 있는 것처럼 이동질량의 속

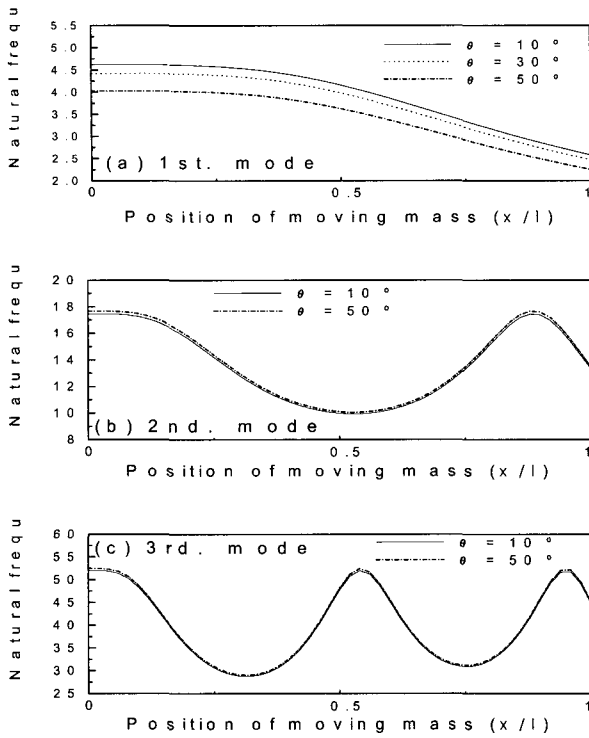


Fig. 9 Natural frequency of cantilever pipe due to variation of nozzle angle

변화는 이동질량이 파이프 위를 이동하고 있는 동안은 외팔 파이프 끝단의 진폭에 큰 영향을 미치지 않고, 다만 이동질량이 파이프 위를 떠나는 시기만을 결정한다. 또한, 파이프의 처짐량도 거의 일정하다. 하지만 Fig. 3, 4에서 설명한 것처럼 이동질량이 파이프 위를 떠나는 시점은 탄성에너지의 증감시기에 관계하기 때문에 이동질량이 파이프를 떠난 후 진폭을 결정하는 중요 인자임을 판단할 수 있다.

Fig. 6은 무차원 이송유체의 속도가 1인 경우에 노즐의 경사각의 변화에 따른 외팔 파이프의 끝단 횡변위를 나타내고 있다. 전반적으로 노즐의 경사각이 클수록 파이프의 처짐과 끝단 진폭은 증가하는 경향을 보이고 있다. 경사각이 10°인 경우와 50°인 경우를 비교해 보면 이동질량이 파이프 위를 통과하는 동안은 경사각이 10°일 때가 50°인 경우에 비해 진폭이 약 1.2배정도 더 크고, 이동질량이 파이프 위를 통과한 후의 진폭은 약 2배정도 크게 나타난다. 또, 이동질량이 파이프를 통과한 후의 진폭을 살펴보면 경사각이 50°인 경우에 진폭이 제일 크게 나타나며, 이것은 이동질량이 파이프 위를 떠나는 순간 파이프의 처짐과 자체 탄성에너지 증가시기에 가장 가까운 위치에 있기 때문이라 사료된다.

Fig. 7은 이송유체의 속도가 변할 때 파이프 위를 이동하는 이동질량의 위치에 따른 고유진동수 변화를 3차 모드까지 도시하고 있다. 무차원 이송유체의 속도가 1인 경우가 3인 경우에 비해 이동질량이 파이프 위를 통과하는 전 영역에 걸쳐 2차 모드에서는 약 8.1% 정도, 3차 모드에서는 약 5.6% 정도 일정하게 증가하는 현상을 보이고 있지만 1차 모드에서는 오히

려 이송유체의 속도가 3일 때의 경우와 비교해서 97.7% 정도의 증가를 보이고 있다. 이것은 계에 영향을 미치는 파라메타의 변화에 따른 모드별 특성으로 설명할 수 있다(Fung et al. 1988).

Fig. 8은 이동질량의 크기가 변할 때 이동질량의 위치에 따른 고유진동수 변화를 표현하고 있다. 계의 고유진동수는 이동질량의 크기와 관계없이 2차 모드에서는 이동질량의 위치가 0.86을 통과할 때, 그리고 3차 모드에서는 0.67, 0.92의 위치에 있을 때 같은 값을 가진다. 이것으로 이 지점이 외팔 파이프의 절점이 형성되어짐을 판단할 수 있다. 그리고 이 지점을 제외한 부분에서는 각 모드에서 이동질량의 크기가 작을수록 외팔 파이프의 고유진동수는 큰 값을 나타낸다.

Fig. 9는 노즐 경사각의 변화가 이동질량의 위치에 따른 고유진동수 변화에 미치는 영향을 각 모드별로 표현하고 있다. 그림에서 보는 것처럼 노즐 각이 50°일 때에 비해 10°인 경우 2차 모드에서는 1.3% 정도, 그리고 3차 모드에서는 0.9% 정도 작은 고유진동수를 가지고, 1차 모드에서는 14.7% 정도 고유진동수가 증가함을 알 수 있다.

## 5. 결론

접성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 외팔 파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용하고, 동시에 외팔 파이프 위를 질량이 일정한 속도로 이동하는 계를 수치해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 이동질량이 파이프 위를 통과하는 동안에는 이동질량의 크기와 계의 진폭은 서로 반비례하며, 노즐의 경사각과는 서로 비례한다. 또, 이동질량의 속도는 계의 진폭에 큰 영향을 미치지 않는다.
- (2) 이동질량이 파이프 위를 통과한 후의 계의 진폭은 이동질량 및 중력에 의한 파이프 처짐에 비례하고, 특히 이 처짐에 의한 탄성에너지의 증가와 외팔 파이프 자체의 탄성에너지 증감시기와 서로 관계하면서 이동질량이 파이프 위를 떠난 후의 파이프 진폭을 결정한다.
- (3) 계의 고유진동수는 2, 3차 모드에서는 이송유체의 속도와 노즐 각이 서로 반비례하며, 1차 모드에서는 비례한다.
- (4) 이동질량의 크기와 계의 고유진동수는 전 모드에 걸쳐 반비례하며, 이동질량의 크기와 계의 고유진동수의 관계를 통하여 외팔 파이프의 절점을 판단할 수 있다.

## 참고 문헌

- 이우식, 박철희, 홍성철 (1991). "내부에 유체가 흐르는 파이프 계의 동적안정성 및 응답해석", 대한기계학회논문집, 제15권, 제6호, pp 1861-1871.
- 윤한익 (2001). "단순지지 송수관의 동특성에 미치는 이동질량의 영향", 한국해양공학회지, 제15권, 제2호, pp 135-140.
- Ashley, H. and Haviland, G. (1950). "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, Vol 17, pp 229-232.

- Benjamin, T.B. (1961). "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol 261, pp 457-486.
- Benjamin, T.B. (1961). "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiments)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol 261, pp 487-499.
- Chen, S.S. (1971). "Dynamic Stability of Tube Conveying Fluid", Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE, Vol 97, pp 1469-1485.
- Fung, E.H.K. and Yau, D.T.W. (2001). "Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol 241, No 5, pp 857-878.
- Lee, H.P. (1996). "Dynamic Response of a Beam with a Moving Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol 191, pp 289-294.
- Meirovitch, L. (1986) Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, Second Edition, pp 282-285.
- Stanisic, M.M. (1985). "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses", Ingenieur-Archiv, Vol 55, pp 176-185.
- Sugiyama, Y., Kawagoe, H., Kishi, T. and Nishiyama, S. (1988). "Studies on the Stability of Pipes Conveying Fluid(The Combined Effect of a Spring Support and a Lumped Mass)", JSME International Journal, Series 1, Vol 31, No 1, pp 20-26.
- Sugiyama, Y., Katayama, T., and Kanki, E. (1996). "Stabilization of Cantilevered Flexible Structures by Means of an Internal Flowing Fluid", Journal of Fluids and Structures, Vol 10, pp 653-661.
- Wilson, J. F. (1973). "Response of Simple Structures to Moving Mass Loads", AIAA Journal, pp 4-5.

---

2002년 6월 3일 원고 접수

2002년 10월 23일 최종 수정본 채택