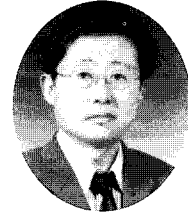


균열을 포함하는 직사각형 평판의 진동해석



김 주 우*

1. 서 론

오늘날까지 직사각형 평판의 자유진동해석에 관한 연구들은 매우 광범위하게 수행되어왔다.^{1)~3)} 그러나, 균열 또는 V노치와 같은 기하학적인 불연속성을 포함하는 직사각형 평판의 진동특성에 관련하여 발표된 문헌들을 발견하는 것은 쉽지 않다. 반복하중이 가해지는 건물 또는 교량의 바닥판과 항공기, 선박 및 자동차를 구성하는 여러 가지 평판 요소에서 발생할 수 있는 균열이나 V노치는 평판 자체의 기능(강성, 강도)을 저하시킬 뿐만 아니라, 고유진동수와 모드형상과 같은 구조물의 고유특성을 변화시킨다. 또한 이러한 균열이나 V노치 선단에 존재하는 특이응력(singular stress)은 균열 진전의 원인이 되며, 평판의 정확한 진동특성을 구하는데 항상 방해요인이 되어왔다. 특히, 이러한 문제를 일반적인 유한요소법의 준균등(quasi-uniform) 유한요소망을 이용해서 해석할 경우, 정확한 결과를 얻지 못함을 지금까지의 연구를 통하여 알 수 있다.

그림 1과 같이 V노치를 포함하는 직사각형 평판의 진동특성을 알아보기 위해, 각기 다른 특성을

가지는 두 가지 적합 함수식으로 가정한 횡진동 변위함수를 Ritz 방법에 적용한다. 이러한 변위함수들은 (1) 수학적으로 완전한 대수 삼각 다항식 풀과 (2) V노치 선단의 특이거동을 나타내는 코너함수로 구성되어 있다. 코너함수의 효과는 광범위한 수렴조사를 통하여 검증된다. 본 기사에서는 다양한 노치 각($360^\circ - \alpha$, 그림 1 참고)과 노치 깊이($1 - c/a$, 그림 1 참고)를 가지는 직사각형 평판에 대한 정확한 고유진동수와 모드형상을 제시하고자 한다. 여기서, V노치 각이 매우 작을 때(즉, 5° 이하), 그 노치는 예리한 균열로 간주될 수 있다.

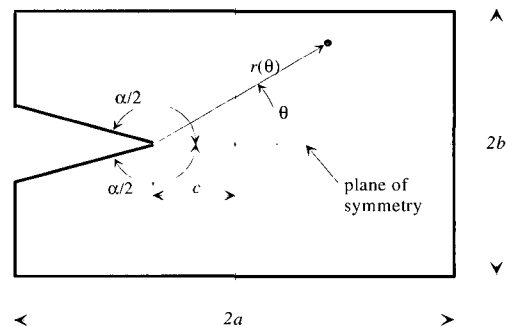


그림 1 V노치를 포함하는 직사각형 평판

* 세명대학교 건축공학과 조교수

2. 이론적 배경

그림 1에서와 같이 길이 $2a$ 와 폭 $2b$ 를 가지는 완전 자유단인 등방성 직사각형 평판에 대해 극좌표계(r, θ)의 원점은 노치 선단에서 취해지며, 이때 횡진동변위함수 w 는 식(1)과 같이 정의된다.

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta) \sin \omega t \quad (1)$$

여기서, t 는 시간이고, ω 는 각 진동수(circular frequency)이다.

진동 사이클 동안의 최대 변형에너지는 식(2)처럼 표현된다.

$$V_{\max} = \frac{D}{2} \int \int_A [(\chi_r + \chi_\theta)^2 - 2(1-\nu)(\chi_r \chi_\theta - \chi_{r\theta}^2)] dA \quad (2)$$

여기서, $dA = r dr d\theta$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 는 휨강성이며, E 는 영의 계수, ν 는 프와송 비이며, $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ 는 식(1)에서 $\sin \omega t = 1$ 로 가정할 때의 최대 휨 곡률과 비틀 곡률로서 식(3)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \chi_r &= \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}, \\ \chi_{r\theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

또한, 진동하는 동안의 최대 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_{\max} = \frac{\rho \omega^2}{2} \int \int_A W^2 dA \quad (4)$$

여기서, ρ 는 평판의 단위 면적 당 질량이다. 식(2)와 식(4)에서 적용되는 적분한계 r 은 θ 의 함수로서(그림 1 참고), 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$r(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \quad (5a)$$

$$r(\theta) = -\frac{a-c}{\cos \theta} \quad (\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3) \quad (5b)$$

$$r(\theta) = -\frac{b}{\sin \theta} \quad (\theta_3 \leq \theta \leq \theta_4) \quad (5c)$$

$$r(\theta) = \frac{a+c}{\cos \theta} \quad (\theta_4 \leq \theta \leq \theta_1) \quad (5d)$$

여기서,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{1}{a+c} \right), \quad \theta_2 = -\tan^{-1} \left(\frac{1}{a-c} \right)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{1}{a-c} \right), \quad \theta_4 = -\tan^{-1} \left(\frac{1}{a+c} \right)$$

응력특이도를 포함하는 평판의 진동특성을 조사하기 위해서 Ritz 방법을 이용할 때, 변위 가정함수들은 식(6)과 같은 혼성함수(hybrid function)로 가정된다.

$$W = W_b + W_c \quad (6)$$

여기서, W_b 는 적합하며 수학적으로 완전한 대수삼각 다항식 꼴이고, W_c 는 V노치 선단에 발생하는 특이응력 거동을 잘 대변하는 적합한 코너함수이다. 대수 삼각 다항식은 평판의 대칭(symmetric) 모드에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} W_b &= \sum_{m=0,2,4}^{M_1} \sum_{n=0,2,4}^m A_{mn} r^m \cos n\theta \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^{M_2} \sum_{n=1,3,5}^m A_{mn} r^m \cos n\theta \end{aligned} \quad (7)$$

또 다른 한편으로, 반대칭(antisymmetric) 모드에 대해서는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} W_b &= \sum_{m=2,4}^{M_3} \sum_{n=2,4}^m B_{mn} r^m \sin n\theta \\ &+ \sum_{m=1,3,5}^{M_4} \sum_{n=1,3,5}^m B_{mn} r^m \sin n\theta \end{aligned} \quad (8)$$

식(7)과 식(8)에서 A_{mn} and B_{mn} 은 미결정된 계수들이고, m 과 n 값들은 $r=0$ 일 때의 불필요한 특이현상을 피도록 특별히 선택되어 있음에도 불구하고, 대수학적으로 완전함이 유지되어 있다. 따라

서, 이러한 함수의 항의 수가 Ritz 방법에 충분히 이용될 경우, 정해(exact solution)에 근접하는 진동해가 얻어질 수 있음을 이론적인 관점에서 보증한다.

응력특이도를 갖는 직사각형 평판에 대해서도 식(7)과 식(8)의 대수 삼각 변위 다항식들은 앞에서 언급한바와 같이 이론적으로는 정확한 진동수 값들을 산출해 내야 하나, 필요한 수의 다항식의 항들에 대해 현실적으로 컴퓨터 연산에서 한계성을 가지고 있다. 이러한 한계성 문제는 V노치 선단의 응력특이도를 적절히 나타내는 적합한 “코너함수”를 대수 삼각 다항식과 함께 사용함으로써 제거될 수 있다. 이 코너함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_c \sum_{k=1}^K C_k W_{c_k}^* \tag{9}$$

여기서, C_k 는 임의의 계수이며, $W_{c_k}^*$ 는 판의 정역학적 휨에 대해서 잘 알려진 4차 겹조화 평형방정식의 해로서 다음과 같이 쓸 수 있다.⁴⁾

$$W_{c_k}^*(r, \theta) = r^{\lambda_k+1} [a_k \sin(\lambda_k+1)\theta + b_k \cos(\lambda_k+1)\theta + c_k \sin(\lambda_k-1)\theta + d_k \cos(\lambda_k-1)\theta] \tag{10}$$

식(10)에서의 λ_k 값은 $\theta = \pm a/2$ 에서 식(11)과 같은 경계조건을 적용할 때 구해지는 행렬식의 근으로서 특성값으로 불린다.

$$V_\theta(r, \pm a/2) = M_\theta(r, \pm a/2) = 0 \tag{11}$$

즉, 식(11)은 V노치의 방사상 에지(radial edge)에는 원주방향의 전단력과 모멘트는 존재하지 않는다는 것을 나타낸다. 여기서, 식(11)의 전단력과 모멘트는 각각, 식(12)와 식(13)과 같이 정의된다.

$$V_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (x_r + x_\theta) + (1-\nu) \frac{\partial x_{r\theta}}{\partial r} \right] \tag{12}$$

$$M_\theta = -D(x_\theta + \nu x_r) \tag{13}$$

직사각형 평판의 대칭 모드인 경우 식(10)에서 $a_k = b_k = 0$ 이며, 식(11)의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 특성방정식이 구해진다.

$$\sin \lambda_k a = \frac{1-\nu}{3+\nu} \lambda_k \sin a \tag{14}$$

식(14)로부터 특성값 λ_k 가 결정될 수 있으며, 이에 상당하는 코너함수는 식(15)와 같다

$$W_{c_k}^*(r, \theta) = r^{\lambda_k+1} \left[\frac{\lambda_k(1-\nu) + (3+\nu)}{(\lambda_k+1)(\nu-1)} \frac{\sin(\lambda_k-1)a/2}{\sin(\lambda_k+1)a/2} \cos(\lambda_k+1)\theta + \cos(\lambda_k-1)\theta \right] \tag{15}$$

마찬가지로 반대칭 모드의 경우를 고려한다면, 식(10)에서 $b_k = d_k = 0$ 이고 λ_k 를 얻기 위한 특성방정식은 식(16)과 같고, 이에 상당하는 코너함수는 식(17)처럼 쓸 수 있다.

$$\sin \lambda_k a = \frac{1-\nu}{3+\nu} \lambda_k \sin a \tag{16}$$

$$W_{c_k}^*(r, \theta) = r^{\lambda_k+1} \left[\frac{\lambda_k(1-\nu) + (3+\nu)}{(\lambda_k+1)(\nu-1)} \frac{\sin(\lambda_k-1)a/2}{\sin(\lambda_k+1)a/2} \sin(\lambda_k+1)\theta + \sin(\lambda_k-1)\theta \right] \tag{17}$$

식(14)와 (16)으로부터 계산되는 λ_k 는 복소수 값들로 표현될 수도 있으며, 이러한 경우 코너함수 또한 복소수이며, 실수부와 허수부가 각각 독립적인 함수로 이용되어야 한다.

식(7)~(10)을 식(2)~(4)에 대입하고, 대칭 모드에 대한 식 (18)에서처럼 Ritz 방법의 고유치 방정식을 이용하면 자유진동 문제는 해결될 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} (V_{\max} - T_{\max}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial C_k} (V_{\max} - T_{\max}) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

방정식(18)로부터 미결정된 계수 A_{mn} (또는 B_{mn}) 과 C_k 를 포함하고 있는 연립 선형 동차 대수 방정식을 얻게 되며, 이러한 대수 방정식의 행렬식을 0으로 놓게 되면 무차원의 진동수 파라미터 $\omega l^2 \sqrt{\rho/D}$ 여기서, $l=2a$, 그림 1참고)인 고유치(고유진동수)를 얻게 된다. A_{mn} 또는 B_{mn} 과 C_k 를 포함하는 고유벡터는 고유치를 다시 동차 방정식에 대입함으로써 결정된다. 고유벡터를 식(6)~(10)에 대입하면, 노치를 갖는 직사각형 평판 영역 내의 $r-\theta$ 격자 위에 정규화된 모드형상의 변위 등고선(displacement contour)이 그려진다.

3. 고유진동수의 수렴도 분석

이 절에서는 정확한 진동수를 구하기 위해, 충분한 수의 대수삼각 다항식과 코너함수의 적용과 함께 앞 절에서 설명한 Ritz 해석을 이용한다. 이 절과 다음 절에서 수행된 모든 계산에서는 의 프와 송 비를 사용하였다.

표 1에서는 $\alpha=355^\circ$ 와 $c/a=0.75$ 인 노치를 갖는 완전 자유단 직사각형($a/b=2$) 평판의 무차원 진동수($\omega l^2 \sqrt{\rho h/D}$)가 수렴함을 보여준다. 이 예는 예리한 노치를 포함하는 직사각형 평판으로도

표 1 V노치를 가지는 완전 자유단 직사각형 평판의 진동수 파라미터 $\omega l^2 \sqrt{\rho/D}$ 의 수렴도 ($\alpha=355^\circ$, $c/a=0.75$, $a/b=2$)

Mode No. (symmetry class)	No. of Corner function	Total no. of terms in W_p			
		12	20	30	42
1 (A)	0	6.728	6.722	6.717	6.700
	1	5.000	4.990	4.982	4.973
	5	4.894	4.891	4.980	4.885
	10	4.839	4.891	4.889	4.884
	15	4.891	4.890	4.889	-
2 (S)	0	5.437	5.388	5.387	5.386
	1	5.425	5.379	5.378	5.377
	5	5.471	5.379	5.377	5.376
	10	5.392	5.378	5.377	5.376
	15	5.380	5.378	---	---
3 (S)	0	15.01	14.75	14.54	14.42
	1	10.46	10.40	10.38	10.32
	5	10.40	10.34	10.32	10.25
	10	10.37	10.33	10.31	10.24
	15	10.35	10.32	10.31	-
4 (A)	0	15.29	14.88	14.87	14.87
	1	14.73	14.57	14.55	14.54
	5	14.60	14.53	14.51	14.51
	10	14.56	14.51	14.51	14.51
	15	14.54	14.51	---	---
5 (S)	0	22.61	22.29	22.22	22.21
	1	15.45	15.03	15.02	15.00
	5	15.31	14.98	14.96	14.95
	10	15.21	14.96	14.95	14.95
	15	15.11	14.96	---	---
6 (A)	0	26.03	24.91	24.85	24.64
	1	20.42	19.74	19.67	19.50
	5	20.18	19.62	19.58	19.42
	10	19.94	19.61	19.56	19.39
	15	19.75	19.60	19.54	-

* (S) symmetric mode, (A) antisymmetric mode
 --- No results due to ill-conditioning

간주될 수 있다. 완전 자유단 평판의 2차원 진동해석 시, 처음 3개의 모드는 강체 모드(rigid body mode)임을 주지해야 한다. 이러한 강체 모드에 해당되는 진동수는 0이며, 표 1에는 나타나 있지 않다.

표 1에서 1차 모드는 반대칭으로 나타났으며, 코너함수를 이용하지 않고 다항식(W_p)의 항 수만을 증가시킬 경우 진동수 값이 부정확한 값인 6.700으로 매우 느리게 감소하는 것을 볼 수 있다. 즉, 삼각 다항식은 수학적으로 완전하지만 그것만을 이용하는 것은 매우 느린 수렴도를 얻게 됨을 의미한다. 다음 4열의 데이터를 검토해보면, 정확한 진

동수 값은 4.884(유효숫자 4자리까지 수렴)라는 것이 나타난다. 특히, 흥미로운 것은 단 하나의 코너함수를 사용함으로 인해 첫 번째 열의 값보다 훨씬 더 낮은(즉, 정해에 더욱 근접한) 진동수 값이 얻어진다는 것이다. 2차 이상의 고차 모드에서도 유사한 수렴도 및 정확성을 보여준다.

부가적으로, $\alpha=355^\circ$ 이며 $c/a=0.75$ 인 완전 자유단 정사각형 평판($a/b=1$)에 대한 수렴도 분석이 표 2에 요약되어 있다. 표 1에서처럼 1차 모드는 반대칭이며, 정확한 수렴값은 13.20임을 알 수 있다. 표 2와 표 1의 수렴도를 비교해볼 때, 흥미롭

표 2 V노치를 가지는 완전 자유단 정사각형 평판의 진동수 파라미터 $\omega l^2 \sqrt{\rho/D}$ 의 수렴도 ($\alpha=355^\circ, c/a=0.75, a/b=2$)

Mode no. (symmetry class)	No. of corner function	Total no. of terms in W_p			
		12	20	30	42
1 (A)	0	14.38	13.48	13.47	13.45
	1	13.27	13.25	13.23	13.22
	5	13.23	13.22	13.22	13.20
	10	13.23	13.22	13.21	---
	15	13.22	---	---	---
2 (S)	0	19.81	19.64	19.64	19.63
	1	19.53	19.41	19.39	19.38
	5	19.46	19.37	19.36	19.36
	10	19.44	19.37	---	---
	15	19.42	---	---	---
3 (S)	0	24.56	24.32	24.29	24.29
	1	24.27	24.06	24.04	24.03
	5	24.25	24.02	24.01	24.01
	10	24.24	24.01	---	---
	15	24.20	---	---	---
4 (A)	0	35.27	34.54	34.48	34.44
	1	34.26	33.68	33.60	33.52
	5	34.12	33.55	33.51	33.47
	10	33.89	33.53	33.51	---
	15	33.80	---	---	---
5 (S)	0	35.96	35.22	35.16	35.14
	1	35.07	34.51	34.42	34.37
	5	34.97	34.40	34.35	34.33
	10	34.73	34.39	---	---
	15	34.60	---	---	---
6 (A)	0	63.73	61.78	61.66	61.61
	1	62.54	60.81	60.74	60.69
	5	62.03	60.67	60.59	60.55
	10	61.94	60.63	60.59	---
	15	61.71	---	---	---

* (S) symmetric mode, (A) antisymmetric mode
 --- No results due to ill-conditioning

약술기

개도 수렴도에 대한 코너함수의 영향이 정사각형 ($a/b=1$)보다 직사각형 ($a/b=2$)에서 훨씬 더 크게 나타남을 볼 수 있다.

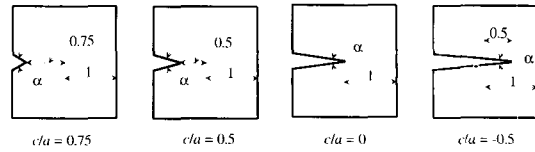


그림 2 다양한 깊이를 갖는 V노치

4. 다양한 노치각과 노치깊이에 대한 진동수와 모드형상

건축이나 토목, 기계구조물에 발생된 균열은 반복하중에 의해 진전을 하게 된다. 이러한 균열 진전은 균열선단에 발생하는 응력집중현상에 의한 것으로, 본 기사에서는 발생될 수 있는 균열 진전의 예로서, 노치 깊이 ($1 - c/a$)가 0.25, 0.5, 1, 1.5 일 때(그림 2 참고) 진동수를 나타냈다. 또한, 다양

한 노치각 ($\alpha=90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 355^\circ$)을 갖는 정사각형 평판의 정확한 진동수에 대한 데이터베이스의 구축을 위해 광범위한 수렴 연구가 수행되었다. 이러한 연구의 결과가 표 3에 4자리 유효 숫자로 요약되어 있다. 본 기사에서 제시된 정사각형 평판 외에 여러 가지 다른 형상비 (a/b)를 갖는 완전 자유단 직사각형 평판에 대한

표 3 다양한 V노치를 가지는 완전 자유단 정사각형 평판 ($a/b=1$)의 진동수 파라미터 $\omega l^2 \sqrt{\rho/D}$

α	c/a	Mode number					
		1	2	3	4	5	6
90°	0.75	23.94	25.72	35.10	59.16	69.35	76.07
	0.5	25.77	32.36	44.31	64.84	86.43	90.93
	0.0	38.14	58.25	90.79	98.95	144.7	168.2
	-0.5	15.25	23.30	36.32	39.58	57.88	67.26
180°	0.75	15.28	20.94	29.46	37.69	41.70	60.88
	0.5	17.99	21.35	39.76	42.60	51.93	62.58
	0.0	21.41	26.47	58.17	59.48	87.88	100.8
	-0.5	21.36	51.90	59.28	107.6	125.4	170.5
270°	0.75	11.34	19.38	22.27	29.76	31.39	50.11
	0.5	12.41	20.36	22.51	32.42	33.91	57.22
	0.0	11.54	19.20	26.29	35.28	48.50	51.29
	-0.5	14.48	18.70	41.87	49.05	58.36	75.51
300°	0.75	13.49	17.89	24.96	31.29	37.64	46.38
	0.5	10.63	18.64	21.91	28.21	29.27	45.88
	0.0	9.514	18.66	22.39	30.81	43.28	44.02
	-0.5	8.131	17.39	23.35	30.38	41.09	54.37
330°	0.75	13.16	17.32	23.60	31.28	35.05	45.76
	0.5	11.60	18.39	24.04	30.85	30.92	44.84
	0.0	8.766	17.00	21.76	26.35	37.51	39.53
	-0.5	5.966	14.12	21.44	26.64	28.16	37.02
350°	0.75	14.17	16.58	25.04	32.85	36.30	55.35
	0.5	11.97	16.65	23.64	29.69	32.42	45.45
	0.0	8.311	15.30	21.56	23.13	32.92	26.57
	-0.5	5.090	11.49	20.45	20.47	25.91	29.61
355°	0.75	13.20	19.36	24.01	33.47	34.33	60.55
	0.5	12.29	18.44	23.23	30.91	33.41	50.56
	0.0	8.381	15.14	22.17	23.93	32.74	37.80
	-0.5	5.194	11.42	20.93	21.51	32.27	28.14
Square Plate		13.49	19.79	24.43	35.02	35.02	61.53

* antisymmetric mode, + cf. Leissa⁵⁾

진동수와 모드형상의 데이터베이스 구축은 현재 진행 중에 있으며, 본 학회 논문집에 발표할 예정이다.

표 3에서는 다양한 노치각과 노치 깊이의 증가에 대한 진동수 값의 변화에서 흥미로운 경향이 발견된다. $c/a=0.75, 0.5, 0$ 인 경우, 노치각(α)이 증가할 때 대부분의 진동수는 감소함을 알 수 있으며,

이것은 정사각형 평판의 강성이 V노치각의 증가할 때 감소함을 의미한다. $\alpha=90^\circ$ 와 $\alpha=180^\circ$ 인 경우에는 V노치를 형성하지 않음을 주의하고, $\alpha=180^\circ$ 인 경우에, 주어진 c/a 의 비에 따라 다양한 형상비를 가지는 직사각형 평판으로 간주될 수 있다. 특히, $\alpha=90^\circ$ 인 경우 분절된 정사각형 평판의 진동

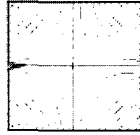
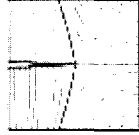
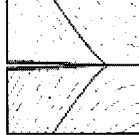
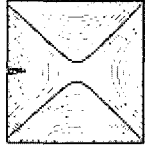
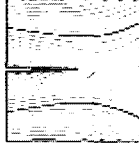
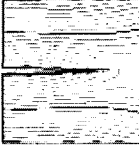
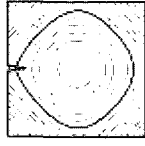
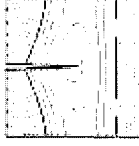
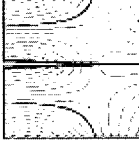
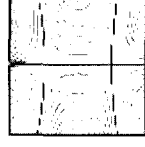
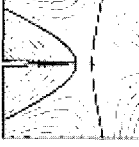
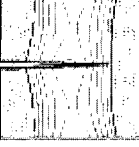

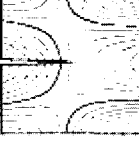
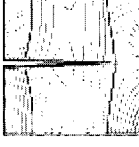
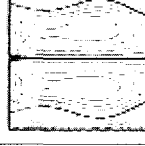

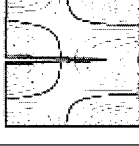
Mode no.	$\alpha = 355^\circ$		
	$c/a = 0.75$	$c/a = 0$	$c/a = -0.5$
1			
	13.20	8.381	5.194
2			
	19.36	15.14	11.42
3			
	24.01	22.17	20.93
4			
	33.47	23.93	21.51
5			
	34.33	32.74	32.27
6			
	60.55	37.80	28.14

그림 3 V노치를 갖는 완전 자유단 정사각형 평판의 정규화된 횡변위 등고선(W/W_{max})

수 값을 나타내며, 이전에 발표된 적이 없는 매우 흥미로운 데이터로서 고려될 수 있다.

표 3에서 $\alpha=355^\circ$ 와 $c/a=0.75$ 인 경우, 예리하고 얇은 균열을 갖는 완전 자유단 정사각형 평판으로 간주될 수 있으며, 그것의 진동수 값이 완전한 정사각형 평판(즉, $c/a=0$, $\alpha=180^\circ$, $a/b=2$)의 진동수 데이터(cf. Leissa⁵⁾)와 비교하는 것은 매우 중요하다. 이 비교로부터 균열의 발생은 대칭 모드인 2차, 3차, 5차 모드에 대해 각각 2.17%, 1.72%, 1.79% 만큼 진동수가 감소하였고, 반면에 반대칭 모드인 1차, 4차, 6차 모드에 대해서는 2.15%, 4.43%, 1.59%의 감소를 보여준다.

그림 3에는 다양한 노치 깊이를 갖는 완전 자유단 정사각형 평판이 $\alpha=355^\circ$ 일 때 정규화된 횡변위 등고선이 나타나 있다. 이 등고선은 최대 횡변위 값에 대해 정규화 되며(즉, $-1 \leq W/W_{\max} \leq 1$), 그림 3에 $W/W_{\max} = \pm 0.2, \pm 0.4, \pm 0.6, \pm 0.8, \pm 1$ 에 대해서 보여준다. 또한 진동하는 동안 각 모드에 대한 형상은 횡변위가 0인 것을 나타낸 더 진한 선을 고려함으로써 성취될 수 있다.

5. 결 론

Ritz 방법론과 고전판 이론을 함께 이용하여, V 노치 또는 예리한 균열을 포함하는 완전 자유단 정사각형 및 직사각형 평판에 대하여 매우 정확한 진동수 값을 구하였다. 이러한 과정에서, Ritz 방법에 이용되는 변위함수는 수학적으로 완전한 대수삼각 다항식과 V노치 선단에 존재하는 모멘트 특이도를 반영하는 코너함수로 되어있다. 그러한 코너함수의 유효성이 진동수의 수렴도 분석을 통해 검증되었다.

본 기사에서는 세가지 기하학적 파라미터(즉, 노치각, 노치깊이, 형상비)를 갖는 무차원 진동수를 보여주는 수치표의 일부분을 제시하였다. 본 기사에서 제공한 진동수 데이터를 주의깊게 검토함으로써, 노치 또는 균열을 포함하는 평판에 존재하는 상당히 큰 국부응력에 대한 기본적인 이해를 얻는데 도움이 될 것이다. 특히, 현 결과는 유한요소법과 함께 접목시킬 수 있고 특이거동을 고려하는 Ritz 슈퍼요소의 개발에 이용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Leissa, A. W., *Recent Research in Plate Vibrations: 1973-1976, Complicating Effects*, Shock and Vibration Digest, Vol. 10, No. 12, pp. 21 ~ 35, 1977
2. Leissa, A. W., *Plate Vibration Research: 1973-1976, Complicating Effects*, Shock and Vibration Digest, Vol. 13, No. 10, pp.19~36, 1981
3. Leissa, A. W., *Recent Studies in Plate Vibrations: 1981-1985, Part II, Complicating Effects*, Shock and Vibration Digest, Vol. 19, No. 3, pp.10~24, 1987
4. Williams, M. L., *Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Singular Corners of Plates Under Bending*, Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp.325~329, 1951
5. Leissa, A. W., *The Free Vibration of Rectangular Plates*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 3, pp.257~293, 1973 